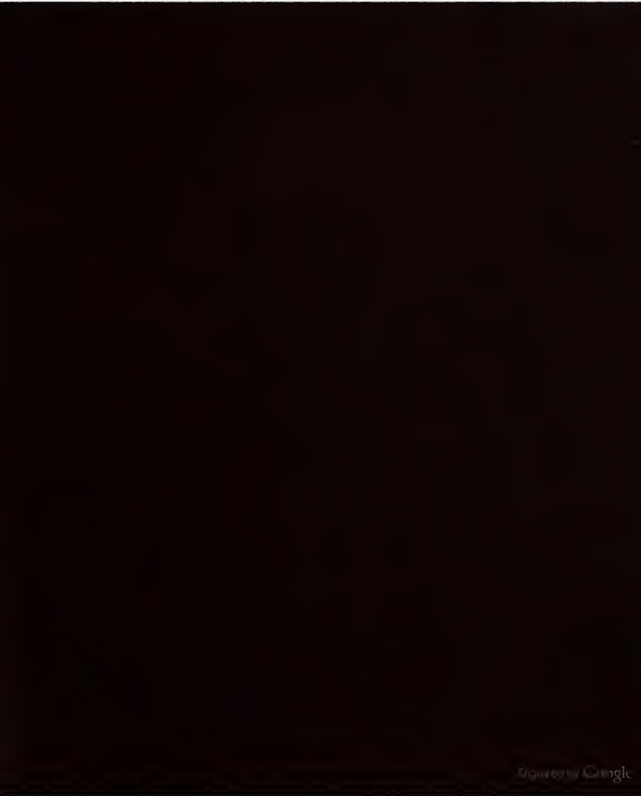


CHRISTIANI WOLFII,

POTENTISSIMI SUECORUM REGIS, HASSIÆ LANDGRAVII, CONSILIARII REGIMINIS, MATHEMATUM AC PHILOSOPHIÆ PROFESSORIS PRIMARII IN ACADEMIA MARBURGENSI, PROFESSORIS PETROPOLITANI HONORARII, ACADEMIÆ REGIÆ SCIENTIARUM PARISINÆ SOCIETATUMQUE REGIARUM BRITANNICÆ ATQUE BORUSSICÆ MEMBRI,

ELEMENTA MATHESEOS UNIVERSÆ.

TOMUS QUINTUS,

Qui Commentationem de Præcipuis Scriptis Mathematicis, Commentationem de Studio Mathematico recte Instituendo & Indices in Tomos Quinque Matheseos Universæ continet.

EDITIO NOVA,

PRIORI MULTO AUCTIOR ET CORRECTIOR.





GENEVÆ,

Apud HENRICUM-ALBERTUM GOSSE, & Socios.

MDCCXLI.



PRÆFATIO.



RODIT tandem Tomus Quintus novæ Editionis Elementorum noſtrorum Matheſeos univerſæ, qui dudum lucem adſpexiſſet, niſi alii labores aliaque impedimenta indeclinabilia moram injeciſſent. Equidem nihil reſtabat quam recenſio Autorum, qui Matheſin vel ſuis inventis, vel ſcriptis illuſtrarunt, quam adjeceramus tam Germanicæ Elementorum Matheſeos, quam primæ Latinæ Editioni; una cum Indice in quatuor Elementorum horum Tomos: ne tamen nimis ſterilis judicaretur Tomus quintus, addere lubuit Commentationem de Studio mathematico recte inſtituendo. Primo igitur loco ſiſtitur brevis Commentatio de præcipuis Scriptis mathematicis. Omnia recenſere nec potuimus, nec recenſeri conſultum fuit. Recen-

* 2 ſuimus

ſuimus ea, quæ ipſimet poſſidemus, & pauca quædam, quæ aliunde nobis nota ſunt. Hanc Autorum notitiam abunde ſufficere credimus ei, qui vel ſe totum Matheſi dare, vel ejus aliquam partem ſibi quaſi propriam reddere decreverit. Et quoniam ſingulis adhuc annis ſcripta mathematica prodeunt, unusquiſque, cui volupe fuerit, hanc recenſionem facile continuabit. Qui vero Matheſi tantummodo operam navare voluerit, ut non modo divinæ hujus ſcientiæ compos fiat, verum etiam intellectus eum perfectionis gradum conciliet, ut eodem in omni cognitione reliqua rite ac prompte utatur; ei abunde ſatisfacient ſola Elementa noſtra, ut nullo alio librorum apparatu indigeat. Quodſi autem quis in aliqua ejus parte ulterius progredi voluerit; ex commentatione noſtra facile videbit, quem vel quosnam ſibi eligere debeat duces, ut voti ſui compos reddatur. Ceterum cum nemo Autorum ſibi propoſuerit, ut eam omni perſpicuitate explicaret, quam tyro merito deſideraverit, ac demonſtrationes daret conſummatas, quas in Logica appellamus; ſuademus ſerio ne quis ad lectionem aliorum Autorum accedat, antequam noſtra ſibi familiaria reddiderit. Verendum enim, ne confundatur, & perplexitate deſertor ſtudii utiliſſimi efficiatur. Si quis, ſolius intellectus perficiendi gratia, ad Matheſin animum appellit, is vel in Elementis Arithmeticæ, Geometriæ Elementaris & Trigonometriæ plane ſubſiſtere, vel ex ceteris addere poteſt, quæ maxime ſunt ad ipſius palatum; modo ſibi caveat, ne negligat eas diſciplinas, ex quibus demonſtrandi principia petuntur, niſi hæc tanquam certa ſumere voluerit, etſi eorum evidentiam non perceperit. Et quænam hic obſervan-

servanda sint, ex Commentatione de Studio mathematico recte instituendo haud difficulter addiscet.

Secundo loco hic comparet Commentatio de Studio mathematico recte instituendo. Non omnes, qui eidem sese dedunt, eodem fine ad ipsum accedunt. Quamobrem nostrum fuit, non idem singulis dare consilium; sed potius pro diversitate finis diversa. Equidem Elementa nostra eo modo concinnavimus, ut singulis satisfaciant, quocunque tandem animo ad Mathesin accedant; cum tamen omnibus non conveniant omnia, indicandum omnino erat, quænam omittenda sint, quænam prætermitti minime debeant, & quomodo in iis percipiendis sit versandum, prouti unusquisque hunc vel alium finem sibi proposuerit; quamvis iis, qui sciendi cupidine flagrant, & in Philosophia aliisque scientiis cum laude versari voluerint, commendanda sit lectio integrorum nostrorum Elementorum. Ea sane hoc modo conscripsimus, ut haud multo temporis spatio integram Mathesin addiscere liceat, ac deinde qualibet ejus parte ulterius progredi detur, quantum libuerit. Cognitu nimirum utilissima & quæ ad ulteriora viam sternunt, cum primis principiis ita connexa sunt, ut ideas maxime adæquatas ex his Elementis haurire & ex aliis operibus petenda cum iisdem connectere liceat: id quod etiam in operibus nostris philosophicis eadem methodo conscriptis intendimus. Neque enim alia datur via, qua ad certam & solidam rerum cognitionem perveniatur. Etsi autem Mathesis multas afferat utilitates ad felicitatem generis humani promovendam, ut adeo digna sit, quæ excolatur; non tamen hinc recte infertur, eam omnibus omnino esse addiscendam, qui

ſtudiis literariis operam navant. Sufficit enim eſſe aliquos, qui eidem, vel uni alterive parti, ſe conſecrant, ut humanum genus utilitates iſtas conſequatur. Enim vero quatenus Studium mathematicum perficit intellectum, ea ejus utilitas eſt, ut nemo ad ſciencias alias tractandas admitti debeat niſi in Matheſi verſatus. Hæc ipſa utilitas omni ævo agnita, ex quo ſcientiæ honos fuit. Semper enim unanimi conſenſu aſſertum, ac hodienum aſſeritur, ſtudio Matheſeos perfici intellectum. Non tamen defuere, qui utilitatem iſtam in dubium vocarunt, cum viderent viros in Matheſi præſtantes nihil agere, ubi extra eandem demonſtrationes dare audent. Immo hinc enata eſt opinio, quaſi ſolius Matheſeos ſit ea, quæ affirmantur vel negantur, demonſtrare; in Philoſophia vero & facultatibus, quæ vocantur ſuperioribus ad demonſtrationes perveniri non poſſe. Ex hoc labyrintho patet egrediendi via, ſi paulo intimius inſpicias, cur Matheſis acuat intellectum. Memini jam alias plus ſimplici vice me monuiſſe, methodo tribuendum eſſe, ut Matheſeos ſtudio perficiatur intellectus. Ut vero methodum diſtincte cognoſcas, eamque in poteſtatem tuam redigas, non quælibet tractatio ſufficit, ſed legitimo quodam modo tractanda eſt Matheſis. Quinam igitur ſit modus, a quo tam præclara utilitas unice ſperanda, in Commentatione noſtra ex inſtituto docemus. Neque enim hactenus ſatis hoc animadverſum ab aliis: unde accidit, ut Mathematici ſummi, qui divinis prorſus inventis ſcientiam nobiliſſimam ditarunt, genuinam demonſtrationis formam non perſpexerint, quemadmodum in ipſa Commentatione clariſſime oſtendi. Quicquid igitur alii ſentiant de Tomo hoc quinto Elemento-

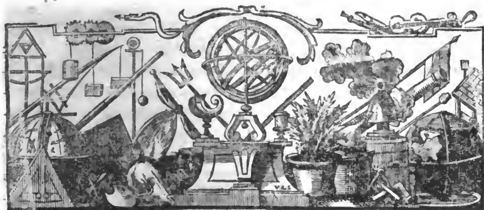
rum

rum Matheſeos, quorum unicuique liberum ſuum relinquimus judicium; ego hoc nomine eundem maximi facio, quod genuinum facultatum mentis noſtræ uſum hinc addiſcere liceat, quo ad ſolidam rerum cognitionem pervenitur. Non nego eundem uſum regulis comprehendi in Logica, & a nobis in opere præſertim Latino majore, quod de Logica conſcripſimus, demonſtrari. Monui tamen jam alias, ſtudio Matheſeos rite inſtituto eum acquirendum eſſe. Quomodo igitur id ipſum rite inſtituatur, ut in omni cognitionis genere facultatum humanarum rectum facere addiſcas uſum, in Commentatione noſtra tanta perſpicuitate docuimus, ut, quid amplius deſiderari poſſit, non videamus. Quamobrem, ſi quis conſilio noſtro uti voluerit, is in ſe ipſo experietur, quod non modo regulas logicas, quas in opere noſtro expoſuimus, nunc penitus intelligat, & nihil in iis ſuperſit obſcuri; verum etiam quod iiſdem prompte ac ſine ulla aberratione ſatisfacere poſſit, modo attentionem ſuam in ſe deſiderari minime patiatur. Dari aliquam Artem inveniendi, quæ hactenus abſque regulis exercetur, Mathematici exemplo ſuo abunde confirmant, qui noſtro præſertim ævo novis indies inventis Matheſin augent. Nemo diffitebitur, qui vel ad ea animum advertit, quæ ſpeciminis loco in Arithmetica (*) tradidimus, ab exemplis abſtrahi poſſe regulas. Quoniam igitur ſumma intellectus perfectio eſt, eum facere facultatum noſtrarum uſum, qui ad veritatem latentem inveſtigandam requiritur; id quoque egimus in Commentatione noſtra ut oſtenderemus, quomodo verſandum ſit in Matheſi, ut uſum iſtum conſequamur. Hactenus

(*) §. 125.

tenus Ars inveniendi regulis comprehensa non est, quæ enim sub hoc titulo prostant, augustum istud nomen non merentur. Demus autem mox affore tempus, quo Ars inveniendi omnibus suis numeris absoluta exactisque regulis comprehensa in publicum prostet; minime tamen hinc sequitur, ea, quæ in Commentatione nostra in usum hujus Artis acquirendæ præcipiuntur, nullius fore utilitatis: valent enim de hac Arte eadem quo modo de Logica annotavimus. Quid, quod etiam consilium nostrum de studio Matheseos in usum Artis inveniendi acquirendæ instituendo ei prodesse possit, qui eam regulis comprehendere voluerit?

Ultimo demum loco sequuntur Indices, de quibus ut multa dicam opus non est. Unicum tantummodo moneri consultum duxi. Initio constitueram Indices omnes rerum & verborum in Elementis nostris contentorum in unum compingere. Enimvero cum consultissimum videretur in iis citari paragraphos, literis autem alphabeti singulæ partes non commode distingui possent; potius visum est singulos singulorum Tomorum Indices sigillatim conficere. Quoniam enim in separato Tomo leguntur, absque ulla opera, quæ in uno non inveniuntur, in alio quæruntur. Ac ita tandem Elementa nostra Matheseos universæ ad umbilicum perduximus; nil magis in votis habentes, quam ut iisdem in addiscenda Mathesi utentes eum consequantur usum, quem Commentatio nostra promittit. Dabam Marburgi Cattorum d. 17. Septembr. A. O. R. 1740.

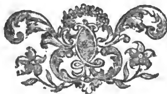


PRÆFATIO.



On nobis propoſitum eſt condere Hiſtoriam Matheſeos univerſæ, ut ortus ejus pateat atque progreſſus ad noſtra uſque tempora. Opus enim hoc arduum eſt ac difficile, quod infinitam propemodum requirit lectionem & Bibliothecam libris omnibus tam antiquis, quam recentioribus inſtructiſſimam. Noſtrum jam non eſt in hunc campum deſcendere. Quod ordinaria negotia nobis relinquunt otium, in Philoſophia reformanda totum conſumendum, etiamſi alia non obſtarent, de quibus in præſenti dicere nil attinet. Neque etiam nobis animus eſt recenſendi Autores omnes, qui vel de Matheſi integra, vel de una aut altera ejus parte, vel etiam de particularibus quibuſdam argumentis commentati ſunt: Sufficit recenſuiſſe ſcripta præcipua, quorum lectione in ſtudio Matheſeos feliciter progredi licet. Etſi enim hodie reperiantur

plurimi, qui in historia literaria industriam suam exercent: nullibi tamen magis quam in Mathematicorum scriptis recensendis eandem deficere animadvertes, cum plerumque Mathematum rudes sint, qui ad hoc studiorum genus animum appellunt. Utile tamen est, immo necessarium nosse libros, a quorum lectione recedas doctior, ne in legendis iis, qui ad scopum minime faciunt, tempus fallas & magno conatu parum aut nihil discas. Me igitur non inutilem operam præstitisse confido iis, qui ad Mathesin addiscendam sese convertunt. Patebit hoc ex sequente commentatione de studio mathematico, in qua indicaturus sum, quinam pro diverso discentium scopo legendi sint autores. Ceterum non dubito, hanc recensionem Autorum etiam prodesse posse iis, qui ad Historiam Matheseos condendam sese accingent observaturi eas leges, quas præscripsimus in opere nostro Logico. Vix tamen eandem ab uno homine expectes. Rationes perspicies ex iis, quæ de Historia scientiarum in Logica tradidimus. Optandum foret, ne pars eruditionis longe utilissima diutius negligeretur, & bene de humano genere merebitur, qui vel unius Matheseos partis historiam exasciatam dederit, exemplo suo excitaturus alios ad socias operas conferendas.



DE

DE
PRÆCIPUIS SCRIPTIS MATHEMATICIS
BREVIS COMMENTATIO.

CAPUT PRIMUM.

De Cursibus, Operibus atque Lexicis Mathematicis.

§. 1.

PRimus *Cursum mathematicum* Latino & Gallico idiomate edidit PETRUS HERIGONIUS *Parisiis* 1644. in 8. (10 Alph. 2 plag.). Constat Tomis sex. Primo continentur 1. Elementa EUCLIDIS XV. 2. Data EUCLIDIS, 3. APOLLONII PERGÆI de determinata sectione Geometria, a WILLEBRORDO SNELLIO restituta, 5. Ejusdem APOLLONII inclinationum Geometria, a MARINO GHETALDO restituta, 6. Ejusdem APOLLONII Tactionum Geometria, a FRANCISCO VIETA restituta, 7. Doctrina Sectionum angulorum. Tomus secundus complectitur 1. Arithmeticam practicam, & 2. Algebram tum vulgarem, tum speciosam, una cum ratione componendi ac demonstrandi per regressum sive repetitionem vestigiorum Analyseos. Tomus tertius exhibet 1. Constructionem Canonum, Sinuum, atque Tangentium & Logarithmorum, 2. ipsos hos Canones, 3. Trigonometriam planam, 4. Geometriam practicam, 5. Architecturam militarem, 6. Tractatum de militia Græcorum, Romanorum, & hodierna, 7. Mechanicam. Tomus quartus continet 1. Doctrinam de Sphæra mundi, 2. Geographiam tam veterem, quam novam, 3. Histiodromiam, seu Artem navigandi. In Tomo quinto extant, 1. Optica EUCLIDIS aucta & novis demonstrationibus illustrata, 2. Catoptrica EUCLIDIS, 3. Dioptrica, 4. Perspectiva, 5. THEODOSII Sphæricorum libri

libri tres, quibus additur quartus de triangulis sphæricis & trigonometria sphærica, 6. Theoricæ planetarum, 6. Gnomonica, 8. Musica EUCLIDIS. Denique Tomus sextus supplementis destinatur 1. in Algebram, 2. in Perspectivam, 3. in Theoriam Planetarum: quibus additur introductio in Chronologiam. Apparet adeo, præter inventa recentiora, quæ Autor suo tempore tradere nondum potuit, desiderari adhuc 1. Theoremata Archimedea, 2. Doctrinam Conicorum, 3. Staticam, 5. Hydraulicam, 6. Architecturam civilem, 7. Pyrotechniam. Quæ vero de singulis disciplinis monenda sunt, ea inferius suo loco annotabimus. Nunc in genere observamus, Autorem ubique accurata uti demonstrandi methodo, eaque nova, per notas reales & universales, ita ut demonstrationes ipsius ab eo, qui notarum vim animo comprehendit, citra usum cujuscunque idiomatis intelligi possint. Sed cum signa sint Autori peculiaria & diversa ab iis, quibus hodie in casibus similibus utimur; nonnihil difficultatis facessunt sub initium lectionis, aliis præsertim signis jam adsueto. Ubi tamen signa familiaria evaserint, multum facilitatis habet hæc demonstrandi methodus: quia integra demonstratio uno obtutu haud difficulter comprehenditur & una singulæ ejus partes distincte exhibentur. Ceterum HERIGONIUS theoriam magis, quam praxin cordi habet, & ab ejus tempore pleræque disciplinæ mathematicæ multum mutationis subierunt, ad altius fastigium evectæ, ita ut nostro ævo non satisfaciat iis, qui ad Mathesin universam addiscendam animum appellunt.

§. 2. Anno 1662, CASPARUS SCHOTTUS, e Societate Jesu, *Cursum Mathematicum* edidit *Herbipoli* in fol. recusum *Francofurti ad Mœnum* An. 1674, & denuo *Bambergæ* An. 1677, in fol. (7 Alph. 19 plag. una cum 2 Alph. 4. plag. figurarum æri incisarum). Constat opus Libris 28 quorum primus Isagogen continet ad Mathesin, in qua problemata facillima Geometriæ practicæ explicantur: secundus Arithmeticam: tertius Libros VI priores Elementorum EUCLIDIS, quartus & quintus Trigonometriam; sextus Geometriam practicam secundum pantometron KIRCHERI; septimus elementa Astronomiæ; octavus Theoricas planetarum; nonus problemata Astronomiæ practicæ; decimus Astrologiam judiciariam; undecimus Chronographiam; duodecimus Geographiam; decimus tertius Hydrographiam; decimus quartus Horographiam; decimus quintus Mechanicam; decimus sextus Staticam; decimus septimus Hydrostaticam; decimus octavus Hydrotechniam; decimus nonus Opticam; vigesimus Catoptricam; vigesimus primus Dioptricam; vigesimus secundus & tertius Architecturam militarem; vigesimus quartus Tacticam hodiernam;

nam; vigesimus quintus Musicam; vigesimus sextus Algebram; vigesimus septimus Logarithmorum doctrinam; vigesimus octavus Synopsin Matheseos tradit. Desiderantur adeo Pyrotechnia, Architectura civilis & Ars navigandi; pleræque disciplinæ nimis breviter pertractantur, nec demonstrativa methodus ubique adhibetur: desunt etiam recentiora inventa, nec sublimiora attingit Autor, ipsius præsertim ævo parum trita. Non ergo satisfacit, nostro tempore, iis qui ad solidam Mathematum notitiam adspirant.

§. 3. Anno 1681, *Londini* in 4. idiomate Anglico prodiit JONÆ MOORE Novum systema Mathemacum (*A new Systeme of the Mathematicks*). Constat Tomis duobus, quorum primo continentur 1. Arithmetica tum decadica, tum decimalis, tum speciosa, 2. sex libri priores Elementorum EUCLIDIS, una cum undecimo & duodecimo, atque Geometria practica, 3. Trigonometria plana & Sphærica, 4. Cosmographia, 5. Ars navigandi, 6. Doctrina Sphærica secundum hypothesin terræ motæ: in altero autem extant Tabulæ astronomicæ, Sinuum versorum & Logarithmorum, atque Geographia seu descriptio præcipuarum Regionum. Eorum potissimum conatibus inservit hoc opus, qui Artem navigandi solidioribus fundamentis superstructam addiscere gestiunt. Commendatur quoque doctrina Sphærica talia continens, quæ alibi frustra quæsiveris.

§. 4. CLAUDIUS FRANCISCUS MILLIET DECHALES, Cameriensis, e Societate Jesu, An. 1674, edere cœpit *Cursum* seu *Mundum mathematicum*, tribus Tomis: sed cum novam editionem multo auctiorem meditatus ante diem obiisset, AMATUS VARCINUS ex eadem Societate An. 1690, editionem ex MSC. Autoris auctam & emendatam dedit *Lugduni Gallorum* in fol. (32 Alph.) Editio posthuma in 4 Tomos digesta, quorum primo continentur 1. Tractatus de progressu Matheseos & de illustribus Mathematicis, 2. EUCLIDIS Elementa XIV. 3. THEODOSII Sphærica, 4. Tractatus de sectionibus Conicis, 5. Arithmetica practica, 6. Trigonometria, 7. Algebra, 8. Hypothesium Cartesianarum refutatio: secundo 1. Geometria practica, 2. Mechanica, 3. Statica, 4. Geographia, 5. Tractatus de Magnete, 6. Architectura civilis, 7. Ars tignaria, 8. Tractatus de lapidum sectione: tertio 1. Architectura militaris, 2. Hydrostatica. 3. Tractatus de fontibus & fluviis, 4. Hydraulica, 5. Ars navigandi, 6. Optica, 7. Perspectiva, 8. Catoptrica, 9. Dioptrica: quarto denique 1. Musica, 2. Pyrotechnia, 3. Astrolabium, 4. Gnomonica, 5. Astronomia, 6. Astrologia, 7. Tractatus de Meteoris, 8. Calendarium. Autor, in Mathesi pura, antiqua & vulgaria bene explicat; recentiora vero inventa & subli-

ſublimiora non attingit. De diſciplinis ad Matheſin mixtam ſpectantibus dicemus ſuo loco, id unice nunc annotaſſe contenti ſumus, quod ad diſcurſus phyſicos ſæpius digrediatur. In demonſtrando rigori veterum perſpicuitatem jungit. Curſuum Mathematicorum, qui hactenus lucem publicam adſpexerunt, abſolutiſſimus eſt.

§. 5. Anno 1690, WILHELMUS LEYBORN, Anglus, patrio idiomate publicavit Curſum Mathematicum ſub titulo: *Mathematical Sciences in nine Books*; *Londini* in fol. (11 Alph. Tab. æn. 43). Liber primus explicat Arithmeticam, vulgarem pariter, ac decimalem, cum logarithmica; ſecundus Geometriam elementarem (cui appendicis inſtar ſubjungitur brevis ad Algebram ſpecioſam introductio); tertius doctrinam de primo mobili; quartus Coſmographiam, Geographiam & Chronologicam doctrinam de epochis; quintus Trigonometriam planam & ſphæricam; ſextus uſum inſtrumentorum Geometricorum in Geodæſia, Planimetria & Architectura tam civili, quam militari; ſeptimus Artem navigandi; octavus Gnomonicam; nonus librum ſecundum Inſtitutionum Aſtronomicarum NICOLAI MERCATORIS de theoria planetarum. Plurimas diſciplinas Mathematicas in hoc curſu deſiderari ſtatim apparebit, ſi quidem eam cum curſu præcedente conferre libuerit.

§. 6. ABRAHAMUS DE GRAAF, Batavus, idiomate patrio *Amſtelodami* An. 1694, in 4. (1 Alph. 21 plag. Tab. æn. 94.) ſub titulo *De geheele Matheſis of Wiskonſt* publici juris fecit Curſum Mathematicum, in quo reperiuntur 1. tractatus brevis de Proportione, 2. Arithmetica practica, 3. Geometria elementaris, 4. Trigonometria plana & ſphærica, 5. Aſtronomia, 6. Ars agrimenſoria cum Stereometria doliorum, 7. Ars navigandi, 8. Architectura militaris, 9. Gnomonica, 10. Perſpectiva, 11. Dioptrica cum Catoptrica, 12. Mechanica, 13. Algebra. In pleriſque nimis brevis, Algebra excepta.

§. 7. Anno 1697, OZANAM, Gallus, vir variis ſcriptis mathematicis ſuo loco commendandis celebris, in publicum emiſit Curſum Mathematicum, quatuor Tomis comprehenſum, ſub tit. *Cours de Mathematique*, *Pariſiis* in 8., recuſum *Amſtelodami* (quamvis Pariſiorum nomen præ ſe ferat) An. 1699. (4 Alph. 14 plag. Tab. æn. 155.). Tomus primus complectitur Elementa EUCLIDIS ſex priora, una cum undecimo & duodecimo, atque Arithmetica litterali; ſecundus Trigonometriam planam & Sphæricam, cum Tabulis Sinuum, Tangentium, atque Logarithmorum; tertius Geometriam practicam; quartus Mechanicam atque Perſpectivam; quintus Geographiam & Gnomonicam. Deſunt adeo diſciplinæ quam plurimæ. Ceterum in demonſtrando rigorem veterum pulchre obſervat Cl. Autor.

§. 8. JAC.

§. 8. JAC. TAYLOR in Thesaurario Mathematicæ, quod An. 1707, W. ALINGHAM *Londini* in 8. recudi fecit (1 Alph. 12 plag. Tabb. æn. 18.) sermone Anglico sub Titulo *Treasury of the Mathematicks*, explicat præcipua problemata Arithmeticæ, Geometriæ practicæ, Trigonometriæ utriusque, Astronomiæ Sphæricæ, Geographiæ, Navigationis, Geodesiæ, Stereometriæ, Gnomonicæ, Architecturæ militaris & Pyrotechniæ, suppositis terminorum definitionibus, & demonstrationibus sepositis. Adduntur Tabulæ Logarithmorum, & Tabulæ Sinuum atque Tangentium.

§. 9. Cum sub finem An. 1706, munus docendi publice Mathesin in Academia Halensi in me translatum esset; statim animadverti, me eidem ex voto satisfacere non posse, quamdiu desit liber, multiplici studiosorum ad celeberrimam hanc Musarum sedem undiquaque confluentium scopo conveniens. Prælectiones mathematicæ in Academiis Germaniæ tum instituebantur in *Mathesin Compendiariam* JOANNIS CHRISTOPHORI STURMII, Philosophiæ Naturalis & Matheseos in Academia Altorfina Professoris, paucis Tabulis comprehensam. Sed cum in iis nonnisi prima Matheseos rudimenta continerentur, ac inprimis desideraretur methodus, qua intellectus juvenum ad reliqua studia rectius absolvenda formatur; meo, quem in docenda & discenda Mathesi mihi præfixeram, scopo eædem parum conveniebant. Equidem idem An. 1699, duobus Tomis *Norimbergæ* in 8. ediderat *Mathesin Juvenilem*, quorum prior Arithmeticam practicam, Geometriam practicam, cum palmariis Geometriæ elementaris theorematis, Trigonometriam planam, Architecturam militarem atque civilem, & Staticam seu Artem mechanicam; posterior Opticam, Catoptricam & Dioptricam, Astronomiam, Chronologiam, & Gnomonicam continet: in ea tamen nonnisi uberiori discursu illustrantur, quæ in Tabulis concisius proponuntur. Utitur Autor methodo erotematica, nec demonstrationibus locum concedit, ut ipse in præfatione moneat, non quærendam in hoc libro esse Mathesin suis numeris absolutam, ac demonstrationibus exactissimis ubique firmatam, sed facilem, planam ac demonstrationibus discentium captui accommodatis illustratam verius, quam corroboratam. (Tom. I. 2 Alph. 12 plag. Tabb. æn. 52. Tom. II. 2 Alph. 9 plag. Tabb. æn. 57.)

§. 10. Filius ejus LEONHARDUS CHRISTOPHORUS STURMIUS, Francofurti ad Oderam Matheseos Professor, Compendium Matheseos conscripsit in usum Prælectionum suarum, idiomate patrio, methodo erotematica, ad imitationem Matheseos juvenilis parentis sui, in quinque partes divisam, quarum prima Mathesin universalem, Arithmeticam, Geometriam elemen-

elementarem, Phoronomiam, Algebram; secunda Arithmeticam practicam, Geometriam practicam, Architecturam militarem & civilem, Pyrotechniam, Mechanicam; tertia Astronomiam, Geographiam & Chronologiam; quarta Gnomonicam, Opticam, Perspectivam & Acusticam, quinta Tabulas quasdam mathematicas continet. Prodiit secunda vice *Francofurti ad Oderam*, 1710, in 8. sub Titulo: *Kurtzer Begriff der gesammten Mathesis*. Autor totum se dederat studio Architecturæ civilis ac militaris & Geometriæ practicæ, ut adeo in theoria elementari cespitet. In ceteris vestigia parentis in Mathesi juvenili legit, quantum ipsi dabatur.

§. 11. Ut igitur ad verum Matheseos studium juventutem Academicam manuducerem, Universæ Matheseos Elementa idiomate patrio conscripsi, & quatuor Tomis *Halæ*, 1710, in 8. sub Titulo: *Anfangs-Gründe der Mathematischen Wissenschafften*, evulgavi (5 Alph. 10 plag. Tabb. æn. 111.) Tomus primus continet Commentationem de Methodo mathematica, Arithmeticam, Geometriam, Trigonometriam & Architecturam civilem; secundus Pyrotechniam, Architecturam militarem, Mechanicam, Hydrostaticam, Aërometriam & Hydraulicam; tertius Opticam, Catoptricam, Dioptricam, Perspectivam, Trigonometriam Sphæricam, Astronomiam, Chronologiam, Geographiam & Gnomonicam: quartus denique Algebram communem, Analysin infinitesimalem Illustris LEIBNITII, & appendicem de præcipuis scriptis mathematicis. Theoretica parcius exposui, ut tempori ac loco servirem, quantum ad praxes, quas uberius tradidi, demonstrandas sufficere deprehendi, reliquis in parte quarta per Analysin erutis. Ubivis tamen methodi rationem habui, ut verioris Logicæ praxis animis discentium insinuaretur, & ad solidam doctrinam capiendam discentes apti efficerentur. Non inutilem fuisse huncce laborem, tum propria experientia me quotidie adhuc edocet, tum alii publice confessi sunt. Videantur Acta Eruditorum An. 1711, pag. 279; An. 1713, pag. 222, 428; & An. 1714, p. 250. Quinta vice recusa sunt hæc Elementa An. 1738, in 8. (6 Alph. Tabb. æn. 121.) Prodeunt nunc *Amstelodami* in linguam Batavorum translata & *Lausannæ* in Latinum versa eduntur.

§. 12. Quoniam hæc Elementa nonnullis prolixiora videbantur, quam ut tyronibus promiscue proponerentur, & inprimis Algebra in parte quarta prolixius explicata eorum captui non convenire, nec ad omnium palatum esse judicaretur; desiderio aliorum satisfacturus eadem in *Compendium* redegi & An. 1713, *Halæ* in 8. edidi (2 Alph. Tabb. æn. 45). Continetur in hoc compendio Commentatio de Methodo mathematica, Arithmetica, Geometria, Trigonometria

metria plana, Mechanica, Hydrostatica, Aërometria, Hydraulica, Optica, Catoptrica, Dioptrica, Perspectiva, Astronomia, Geographia, Chronologia, Pyrotechnia, Architectura militaris & civilis, Algebra speciosa ad exempla arithmetica applicata. Editio sexta prodiit *Halæ* An. 1737.

§. 13. Quid me impulerit, ut *Elementa Matheseos* Latina a Germanicis diversa ederem, in præfatione Tomi primi exposui. An finem mihi propositum fuerim consecutus, aliorum esto judicium. Editio altera, quæ ab Anno 1730 prodiit & cui nunc Tomo quinto colophonem imponimus, recusa est *Genevæ* in 4. ab Anno 1732 forma majore. Enimvero editionem nitidissimam & ab omnibus mendis expurgatam Veronæ parat JOSEPHUS SERERIUS, Medicinæ ac Philosophiæ Doctor, in omni Mathesi ac Philosophia versatissimus. Ad commodiorem usum figuræ ipsi textui inseruntur. Eandem operam iisdem impendit, quam orbi erudito in recudendis operibus nostris philosophicis Latinis abunde comprobavit. Ut Gallorum commodis inserviat JOANNES THEOBALDUS BION, Elementa hæc nostra quoad substantiam in linguam Gallicam transfundit; satis ingenue ac feliciter, quemadmodum ex speciminibus ad me transmissis intellexi.

§. 14. Ab eo tempore, ex quo Elementa Matheseos, tam patrio, quam Latino sermone conscripta edidi, plura in Germania passim prodiere Compendia Matheseos, Nostris satis nota & in bibliopolis nostris ubivis obvia. Sed de singulis dicere nimis foret prolixum & a præsenti instituto alienum.

§. 15. CONRADUS DASIPODIUS, Mathematum Professor Argentoratensis, *Argentorati*, an. 1573, edidit *Dictionarium Mathematicum* Græce atque Latine conscriptum in 8. (plag. 12.) Continentur in eo definitiones ac divisiones Arithmeticæ, Logisticæ, Geometriæ, Geodesiæ, Astronomiæ, & Harmonicæ. Non ordinem alphabeti sequitur Autor, sed disciplinarum. In iis etiam disciplinis, quas attingit, opera ejus est admodum imperfecta.

§. 16. HIERONYMI VITALIS, Capuani, Clerici Regularis Theatini, *Lexicon Mathematicum, Parisiis* 1668, in 8. prodiit (1 Alph. 18 plag.) In eo tamen nonnisi voces Geometriæ elementaris, Astronomiæ & Astrologiæ explicantur. Idem An. 1690, *Romæ* in 4., recusum & ex omnibus fere disciplinis Mathematicis insigniter auctum, multis inutilibus passim resciffis. (6 Alph. 3 plag.)

§. 17. OZANAM supra laudatus *Lexicon Mathematicum*, secundum ordinem disciplinarum disposuit, editum *Parisiis* An. 1691, in 4. (4 Alph.) Explicat Cl. Autor terminos Arithmeticæ, Algebræ, Geometriæ speculativæ & practicæ, Cosmographiæ, Astronomiæ,

nomiæ, Navigationis, Geographiæ tum astronomicæ, tum naturalis, tum historicæ, Opticæ, Perspectivæ, Gnomonicæ, Catoptricæ, Dioptricæ, Artis pictoriæ, Mechanicæ, Staticæ, Hydrostaticæ, Architecturæ civilis & militaris, atque Musicæ.

§. 18. J. HARRIS in Lexico Technico magno, cujus Tomus primus *Londini* 1704, alter ibidem 1710, in fol. prodiit, præter alios terminos Artium & Scientiarum non modo Mathematicos terminos, verum etiam res ipsas explicat. Titulus operis est: ***An universal English Dictionary of Arts and Sciences, explaining not only the Terms of Arts, but themselves.***

§. 19. E. CHAMBERS *Londini* An. 1728, duobus Voluminibus in fol. forma majore edidit Lexicon Universale artium & scientiarum, sub Titulo, ***Cyclopædia, or an Universal Dictionary of Arts and Sciences*** ordine alphabetico conscriptum (Alph. 22. plag. 8. Tabb. æn. 28.) In eo etiam explicantur, quæ ad Mathesin spectant, ita ut Lexici Mathematici nomen simul tueatur. Mathematica pleraque ex Elementis hisce nostris petuntur, quæ etiam passim citat.

§. 20. An. 1716, lucem publicam adspexit *Lipsiæ* in 8. forma majore, *Lexicon Mathematicum*, (2. Alph. 5. plag. cum multis figuris textui insertis) quod nonnullorum precibus fatigatus, idiomate vernaculo, secundum ordinem alphabeticum, ita digessi, ut non modo singulos terminos in disciplinis Mathematicis passim obvios explicuerim, verum etiam Autores citaverim, qui vel primi res iisdem notatas invenerunt, vel optima ratione exposuerunt, ac præterea præcipua dogmata recensuerim, singulorumque usum indicaverim, ut scilicet usui sit illis, qui vel historicam Matheseos cognitionem affectant, vel in lectione Autorum ob voces non intellectas hærent, vel denique ducem in cognoscendo aliquo argumento desiderant. In Italicum idioma idem transtulit JOSEPHUS SERERIUS supra laudatus (§. 13.)

§. 21. Cum bibliopola novam hujus Lexici editionem dare vellet, a me desideravit, ut idem ad mentem ipsius reformarem aut alteri hunc laborem committerem, sed paterer, ut nomen meum eidem præfigeretur. Quoniam non possideo calamum venalem, insulso petito deferre nec volui, nec potui. Bibliopola itaque, cum Lexicon istud diu desideraretur, tandem aliud edidit An. 1734, (2. Alph. Tabb. æn. 26) de quo judicium meum lubens suspendo. Sed quia vulgo pro meo Lexico venditur ac emitur; monendus est Lector, me istud pro meo non agnoscere, nec mea facere, quæ in eodem immutata. Præfationem quoque, quæ eidem præfigitur, diversam esse ab ea, quæ a me profecta fuerat, ipsa collatio utriusque prodit. Ne tamen abusui nominis mei locus daretur; Autor ejus nomen suum præfigere debuisset.

§. 22. In

§. 22. In gratiam eorum, qui castra sequuntur, Lexicon militare, pyrotechnicum & navale conscripsit JOANNES LUDOLPHUS FÆSCH, quod *Dresdæ* An. 1735, in 8. forma majore (2. Alph. 8. plag. Tabb. æn. 21.) prodiit sub Titulo: *Kriegs-Ingenieur-Artillerie-und See-Lexicon.* Explicantur in iis termini, qui in Architectura & re militari, Pyrotechnia, & Architectura navali ac navigatione occurrunt, figurisque æri incisis, ubi opus est, illustrantur.

§. 23. SIMON STEVINUS varia Opera mathematica conscripsit, quæ sub titulo: *Les Oeuvres Mathematiques de* SIMON STEVIN *de Bruges*, *Lugduni Batavorum* in fol. publicavit An. 1634, ALBERTUS GIRARDUS (1. Alph. 19. plag.) Continentur in iisdem 1. Arithmetica tam rationalium, quam irrationalium cum regulis Algebræ; 2. Sex libri DIOPHANTI *Alexandrini*, quorum quatuor priores opera STEVINI, duo posteriores a GIRARDO traducti, 3. Usurarum computus, Logistica decimalis, & incommensurabilium doctrina, ubi simul Elementum EUCLIDIS decimum illustratur; 4. Trigonometria plana & sphærica, 5. Geographia, 6. Astronomia, 7. Geometria practica, 8. Statica, 9. Optica, 10. Castrametatio, 11. Ratio muniendi per cataractas, 12. Architectura militaris. Autor & in theoria, & in praxi cum laude versatus.

§. 24. CHRISTOPHORI CLAVII, Bambergensis, e Societate Jesu, *Opera Mathematica* in quinque Tomos distributa, & ab Autore ipso correcta, plurimisque locis aucta, prodiere *Moguntiæ* An. 1612, in fol. (40 Alph. 9 plag.) Tomus primus complectitur XVI Elementa EUCLIDIS & Libros tres Sphæricorum THEODOSII, cum Commentariis CLAVII in utrumque Autorem, Sinuum, Tangentium & Secantium rationem & Canones; Tractationem triangulorum, tum rectilineorum, tum Sphæricorum. Tomus secundus Geometriam practicam, Arithmeticam, & Algebram, una cum refutatione Cyclometriæ JOSEPHI SCALIGERI. Tomus tertius JOANNIS DE SACRO BOSCO, libellum de Sphæra, cum prolixo Commentario CLAVII in eundem, atque libros tres de Astrolabio. Tomus quartus Gnomonicam, Fabricam & usum instrumenti ad Horologiorum descriptionem peropportuni, Horologiorum novam descriptionem, Compendium brevissimum describendorum Horologiorum horizontalium ac declinantium, cum notis in idem. Tomus denique quintus Romani Calendarii a GREGORIO XIII P. M. restituti explicationem, Novi Calendarii Romani Apologiam adversus MICHAELEM MÆSTLINUM, & Appendicem ad Novi Calendarii Romani Apologiam, in qua JOSEPHUS SCALIGER, GEORGIUS GERMANUS & FRANCISCUS VIETA, qui Calendarium aliter instaurandum esse contenderunt, seor-

ſim ſinguli confutantur. CLAVIUS inſtar veterum, EUCLIDIS, ARCHIMEDIS & APOLLONII, demonſtrator rigidus.

§. 25. FRANCISCI VIETÆ Galli, *Opera Mathematica* in unum volumen congeſta *Lugduni Batavorum*, in fol. An. 1646, edidit FRANCISCUS A SCHOOTEN, Leydenſis, in Academia patria Mathematum Profeſſor (6 Alph.) Continentur in iiſdem 1. Iſagoge in Artem analyticam, 2. ad Logiſticen Speciofam Notæ priores, 3. Zeteticorum libri quinque, 4. De æquationum recognitione & emendatione Tractatus duo, 5. de numeroſa poteſtatum ad exegeſin reſolutione, 6. Effectionum Geometricarum Canonica recenſio, 7. Supplementum Geometriæ, 8. Pſeudo-Meſolabum & alia quædam adjuncta capitula, 9. Theoremata ad ſectiones angulares, 10. Reſponſum ad problema, quod omnibus Mathematicis totius orbis conſtruendum propoſuit ADRIANUS ROMANUS, 11. Apollonius Gallus, 12. Variorum de rebus Mathematicis Reſponſorum Liber VIII, 13. Munimen adverſus nova Cyclometrica, 14. Ratio Calendarii vere Gregoriani, 15. Calendarium Gregorianum perpetuum, 16. Adverſus CHRISTOPHORUM CLAVIUM Expoſtulatio.

§. 26. PHILIPPI LANSBERGII *Opera omnia* prodiere, *Middelburgi in Selandia* A. 1663, in fol. (10 Alph.) Continentur in iiſdem 1. Triangulorum Geometriæ libri quatuor, 2. Cyclometriæ novæ libri duo, 3. Uranometriæ libri tres, 4. in quadrantem tum Aſtronomicum, tum Geometricum, nec non in Aſtrolabium Introductio, 5. Horologiographia plana, 6. Commentationes in motum Terræ diurnum & annuum, & in verum adſpectabilis cœli typum, 7. Tabulæ motuum cœleſtium perpetuæ, cum novis motuum cœleſtium Theoricis & Aſtronomicarum Obſervationum theſauro, 8. Chronologiæ Sacræ libri tres, in quibus annorum mundi ſeries, ab orbe condito ad everſa per Romanos Hieroſolyma, nova methodo oſtenditur.

§. 27. In *Opuſculis Mathematicis* GUILIELMI OUGHTRED, quondam Collegii Regalis in Cantabrigienſi Academia Socii, *Oxonii*, An. 1677, in 8. editis, habentur 1. Inſtitutiones Mechanicæ, 2. De variis corporum generibus, gravitate & magnitudine comparatis Tractatus ex MARINI GHETALDI *Archimede promoto* excerptus, 3. Tractatus alius de Automatis, 4. quæſtionum DIOPHANTI *Alexandrini* Libri tres, 5. de triangulis planis rectangulis, 6. de diviſione ſuperficierum Tractatus, 7. Muſicæ Elementa, 8. Architectura militaris, 9. Tractatus de ſectionibus angularibus (15 plag.)

§. 28. ANDREÆ TACQUET, Antverpienſis, e Societate Jeſu, *Opera Mathematica*, *Antverpiæ* An. 1669, in fol. publicavit SIMON LAURENTIUS VETERANUS ex Comitibus *Montis Calvi*, e Societate Jeſu (9 Alph. 15 plag.

plag. Tab. æn. 88.) Extant in iisdem 1. Astronomiæ libri octo cum Appendice, 2. Geometriæ practicæ libri tres, 3. Opticæ libri tres, 4. Catoptricæ libri tres, 5. Architecturæ militaris liber unus, 6. Cylindricorum & Annularium libri quinque, 7. Dissertatio Physico-Mathematica de Circulorum volutionibus.

§. 29. Anno 1692, prodiit *Parisiis* in 12. Synopsis Tractatuum Mathematicorum, qui necessarii esse possunt Nobilibus terra marive operam militiæ daturis; auctore P. HOSTO, e Societate Jesu, Mathematum Professore Tulonensi. Titulus operis: *Recueil des Traités de Mathématique, qui peuvent être nécessaires à un Gentilhomme, pour servir par mer, ou par terre.* (Plag. 26, Tab. æn. 67.) Constat hæc synopsis tribus Tomis, quorum primus Elementa EUCLIDIS, Arithmeticam & Trigonometriam; secundus Geometriam practicam, Sphæricam, Mechanicam, Artem muniendi & Pyrotechniam; tertius denique Artem navigandi complectitur.

§. 30. Anno 1693, munificentia LUDOVICI MAGNI, Galliarum Regis, *Parisiis* in fol. reg. lucem adspexerunt *Veterum Mathematicorum Opera*, Græce & Latine, pleraque tum primum edita. (4 Alph. Fig. æn. 174.) Continentur in istorum numero ATHENÆUS de machinis; APOLLODORI Poliorcetica; PHILONIS liber quartus de telorum constructione, & quintus de rationibus tolerandæ instituendæque obsidionis; BITON de constructione machinarum bellicarum & catapultarum; HERONIS Belopœeca, Spiritalia, & Automata, JULII AFRICANI Cesti; Anonymi liber de toleranda obsidione. Adduntur BERNARDINI BALDI scholia in HERONIS Belopœeca & nonnulla alia.

§. 31. Ex eadem typographia Regia An. 1693, in fol. prodiere, Varia Opera Mathematica & Physica, Autoribus Academicis Regiis scientiarum. Titulus operis: *Divers Ouvrages de Mathématique & de Physique par Messieurs de l'Académie Royale des sciences* (Plag. 108.) Reperies in hoc Volumine 1. FRENICLII Tractatum de Exclusionibus; 2. ejusdem compendium Combinationum; 3. ejusdem Tractatus de quadratis magicis; 4. ROBERVALLI observationes super compositionem motuum, quam ad tangentes curvarum ducendas applicat; 5. Delineatio libri Mechanici de motu composito; 6. de recognitione æquationum liber; 7. Tractatus de indivisibilibus; 8. Liber de Trochoide; 9. Epistola ad MERSENNUM de TORRICELLII quibusdam propositionibus; 10. TORRICELLII litteræ ad ROBERVALLIUM missæ occasione præcedentis epistolæ; 11. ROBERVALLII Epistola, qua sua sibi inventa contra TORRICELLIUM aliosque Italos vindicat; 12. HUGENII opusculum de causa gravitatis; 13. Æquilibrii in libra demonstratio; 14. Potentiarum fila funesque trahentium vires; 15.

Nova vis movens ope pulveris pyrii & aëris; *16.* Constructio ingeniosa loci ad hyperbolam per asymptotos; 17. Regula FERMATII de maximis & minimis demonstrata & ad mirabilem brevitatem perducta; 18. Problema Opticum sive *39* Prop. lib. 5. ALHAZENI, aut 22. lib. *6.* VITELLIONIS constructum; *19.* PICARDI praxis magnorum sciatericorum per calculum absolvenda; 20. Schediasma de mensuris; 21. Mensuræ ab originalibus desumptæ; 22. de mensura liquidorum & aridorum; 23. de proportione aquarum effluentium; 24. experimenta circa aquas effluentes, 25. Fragmenta dioptrica de vitrorum potissimum focis determinandis; 26. AUZOUT Tractatus de micrometro; 27. MARIOTTI Regulæ de aquæ jactibus; 28. ROEMERI Regulæ de crassitie & viribus tuborum in aquæductibus secundum diversas fontium altitudines diversasque tuborum diametros; *29.* ejusdem experimenta circa altitudines & amplitudines projectionis corporum gravium.

§. 32. FRANCISCI MAUROLYCI, Abbatis Messanensis, *Opuscula Mathematica*, *Venetiis* 1575, in 4. edita (1. Alph. 18½ plag.) complectuntur 1. de Sphæra librum unum, in quo termini in hac doctrina obvii explicantur: 2. Computum Ecclesiasticum: 3. Tractatum instrumentorum Astronomicorum, nempe de Quadrato Geometrico, Quadrante, Astrolabio, Armillis, Sphæra Solida: 4. De lineis horariis Tractatum Gnomonicum: 5. Propositiones libri decimi tertii Elementorum EUCLIDIS: *6.* Musicæ traditiones, continentes epitomen Musicæ *Boëtianæ* & paucas de Musica regulas: 7. De lineis horariis libros tres, Gnomonicæ uberiora fundamenta exponentes: 8. Arithmeticorum libros duos.

§. 33. *Opuscula Mathematica* THOMÆ CEVÆ, e Societate Jesu, *Mediolani* *1699*, in 8. typis descripta (plag. 4.), constant ex nonnullis demonstrationibus de ratione æquilibrii, de sectione Geometrico-harmonica & arithmetica; de sectione anguli rectilinei in quotvis partes tum organice, tum per quasdam lineas curvas, Cycloides scilicet anomalas; de parabola consideranda instar ellipsis maximæ atque instar hyperbolæ habentis transversam diametrum infinitam; de lineis phantasticis & flexilineis. Adduntur quædam excerpta ex VINCENTII VIVIANI Exercitatione mathematica, cui titulus *Formatione di tutti cieli*, & ex idea universali Matheseos Cl. OZANAMI.

§. 34. JOHANNIS WALLISII, SS. Theol. Doct. & Geometriæ Professoris Saviliani in Academia Oxoniensi celeberrimi, *Opera Mathematica* tribus voluminibus prostant. Volumen primum editum *Oxonii* An. *1665*, in fol. (11. Alph. 17. plag.) continet 1. Orationem inauguralem An. *1649*. d. ultimo Octobris habitam, cum publicam Professionem auspicaretur: 2. Ma-

Mathesin universalem seu Arithmeticum opus integrum, tam philologice, quam mathematice traditum: 3. Tractatum elenchticum adversus MARCI MEIBOMII de Proportionibus Dialogum: 4. Tractatum de Sectionibus Conicis nova methodo expositis: 5. Arithmeticam infinitorum: 6. Tractatus duos de Cycloide & Cissoide ac corporibus inde genitis, & de curvarum tum linearum εὐθυνσίᾳ, tum superficierum πλατυσμῷ: 7. observationem eclipsis solaris An. 1654, d. 2 Aug. Oxonii visæ: 8. Mechanicam, sive de motu Tractatum Geometricum. Volumen secundum, quod ibidem An. *1693*, in fol. prodiit, (10. Alph. 17. plag.) complectitur, 1. Tractatum Historicum & practicum de Algebra, 2. de combinationibus, alternationibus & partibus aliquotis, 3. de Sectionibus angularibus, 4. de angulo contactus & semicirculi, 5. defensionem ejusdem Tractatus, 6. disceptationem Geometricam de postulato quinto & quinta definitione lib. 6 EUCLIDIS, 7. Cono-Cuneum, seu Corpus partim Conum, partim Cuneum repræsentans, Geometrice consideratum, 8. de gravitate & gravitatione disquisitionem Geometricam, 9. de æstu maris hypothesin novam, 10. Commercium epistolicum de quæstionibus quibusdam Mathematicis 11. JOH. CASWELLI Trigonometriam planam & Sphæricam. In tertium denique volumen, quod *1699*, in fol. lucem adspexit (14. Alph.), congesta sunt 1. CLAUDII PTOLEMÆI, PORPHYRII & MANUELIS BRIENNII Harmonica; 2. ARCHIMEDIS Arenarius & dimensio circuli cum EUTOCII *Ascalonitæ* in hanc Commentario; 3. ARISTARCHI *Samii* liber de magnitudinibus & distantiis Solis & Lunæ; 4. Fragmentum libri secundi Collectionis Mathematicæ PAPPI *Alexandrini* desideratum; 5. Collectio epistolarum quarundam COLLINII, LEIBNITII, NEWTONI, WALLISII, FLAMSTEDII rem mathematicam spectantium; 6. opera quædam miscellanea, nimirum Tractatus de loquela, Grammatica linguæ Anglicanæ, Institutio Logica ad communes usus accommodata, Mens sobria serio commendata, in concione latine habita, Epistolæ ad Titum expositio aliaque nonnulla Theologica, quæ hujus non sunt loci.

§. 35. CHRISTIANUS HUGENIUS, Mathematicus summus, multa præclara conscripsit opera, de quibus suo loco dicemus. Post obitum ejus junctim prodierunt quatuor voluminibus in 4. sub Titulo, Operum variorum, & reliquorum. *Opera varia* lucem adspexerunt *Lugduni Batavorum*, An. 1724, duobus voluminibus: *Opera reliqua*, *Amstelodami* An. 1728, duobus itidem voluminibus. Volumen primum variorum continet 1. Horologium, 2. Horologium Oscillatorium, sive de motu pendulorum ad horologia aptato Demonstrationes Geometricas, 3. brevem Institutionem de usu horo-

horologiorum ad inveniendas longitudines, 4. de Hugeniana centri oscillationis determinatione Controversiam, 5. Machinas quasdam & varia circa Mechanicam. (Alph. 1, plag. 17, Tabb. æn. 33.); secundum vero 1. Theoremata de Quadratura Hyperboles, Ellipsis & Circuli ex dato portionum gravitatis centro, quibus subjuncta est Ἐξέτασις Cyclometriæ Cl. Viri GREGORII A S. VINCENTIO editæ An. 1647. 2. Epistolam ad Cl. Vir. FRANCISCUM XAVERIUM AINSCOM S. J. qua diluuntur ea, quibus Ἐξέτασις Cyclometriæ GREGORII A S. VINCENTIO impugnata fuit, 3. De Circuli magnitudine Inventa & problematum quorundam illustrium constructiones, 4. de Circuli & Hyperbolæ Quadratura Controversiam, 5. Geometrica varia, 6. de Saturni Luna Observationem novam, 7. Systema Saturnium, 8. EUSTACHII DE DIVINIS Septempedani brevem annotationem in systema Saturnium CHRISTIANI HUGENII, 8. brevem assertionem systematis Saturnii sui, 9. de Saturni Annulo observationes, 10. Cosmotheoron, sive de Terris cœlestibus earumque ornatu conjecturas, 11. Ratiocinia in Ludo aleæ, 12. Novum Cyclum harmonicum, 13. Varia de Optica, 14. Experimenta physica (Alph. 2, plag. 14, Tabb. æn. 23.) In Reliquorum volumine primo extant 1. Tractatus de Lumine & Dissertatio de causa gravitatis, 2. Geometrica demonstratio Theorematum Hugenianorum circa Logisticam, GUIDONIS GRANDI, 3. ejusdem GRANDI epistola Geometrica ad V. C. THOMAM CEVAM e Societate Jesu (Alph. 1, plag. 18, Tabb. æn. 15.) In altero autem comprehenduntur opera posthuma, nimirum 1. Dioptrica, 2. Commentarii de poliendis vitris, 3. Dissertatio de Coronis & Parheliis, 4. Tractatus de motu corporum ex percussione, 5. Tractatus de vi centrifuga, 6. Descriptio Automati Planetarii. (Alph. 2, plag. 6, Tab. æn. 43.) De præclaris hisce operibus specialia monebimus suo loco.

§. 36. Inprimis hic commemoranda sunt Acta Societatum Scientiarum, quæ nostro ævo ad promovendam Mathesin præsertim atque Physicam fuere institutæ. Pertinent huc Acta Philosophica Societatis Regiæ Anglicanæ, quæ a Secretariis eduntur sub Titulo: *Philosophical Transactions giving some account of the present undertakings, studies and labours of the ingenious, in many considerable parts of the World*, & quorum usque ad annum 1734, prostant volumina 38. De his singulis dicere ab instituto nostro alienum est. Sufficit itaque monuisse, quod in iis contineantur plurima ad mathesin spectantia lectu dignissima iis, quibus curæ cordique est Scientiam Mathematicam ultra limites præsentes promovere. Anno 1705, JOHANNES LOWTHORP Volumina 21, quæ usque ad Annum 1700 prodierunt, in epitomen redegit & in iis contea-

contenta per capita generalia dispofuit. Lucem adfpexit hoc opus fub Titulo: *The Philosophical Transactions and Collections to the end of the year* 1700, *abrid g'd and dispos'd under general heads*, tribus voluminibus, *Londini* in 4. Volumine primo continentur Mathematica, ad Geometriam, Arithmeticam, Algebram, Logarithmotechniam, Trigonometriam, Artem libellandi, Opticam, Aftronomiam, Mechanicam, Acufticam, Hydroftaticam, Hydraulicam, Artem navigandi, Architecturam civilem & navalem, Perfpectivam, Sculpturam, Artem pictoriam & Muficam fpectantia. Conftat Alph. 4, plag, 4. Tabb. æn. 7. Specialius ad fingulas Mathefeos partes pertinentia recenfentur in Actis Eruditorum, Supplementorum Tom. IV. fect. 7. p. 290. & feqq. Epitomen hanc Actorum Philofophicorum ab An. 1700 ufque ad An. 1720, continuavit BENJAMINUS MOTTE, & ab An. 1720 ufque ad An. 1732, REIDIUS & JOHANNES GRAY. Continuationis primæ Volumen I, quod *Londini* 1721, in 4. prodiit (Alph. 3. plag. 18. Tabb. æn. 18.) Mathematica, Anatomica, Medica; fecundæ vero Voluminis I pars prima, quæ *Londini* 1733, in 4. lucem adfpexit, (Alph. 2, plag. 7, Tab. æn. 12.) Mathematica fola continet. Illa fpecialius recenfentur in Actis Eruditorum An. 1723, p. 89. & feqq. hæc vero in Novis Actis Eruditorum An. 1735, p. 125. Cum lingua Anglica fit minus trita & libri in Anglia impreffi in aliis terris difficulter haberi poffint; optandum foret, ut in Linguam Latinam, aut minimum Gallicam verterentur. Equidem cum prima volumina in linguam Latinam translata fuperiori feculo Lipfiæ ederentur, nullos fere invenerunt emtores, ut verfio continuata non fuerit: non tamen dubitandum eft, fore ut noftro ævo, ubi Mathefis & Phyfica plures numerat cultores, majore applaufu excipiantur *.

§. 37. Ab Anno 1699, quo Academia Regia fcientiarum Parifiis florens, inftaurata, fingulorum annorum Hiftoriam Gallico idiomate confcripfit ejufdem Secretarius FONTENELLIUS, quibus accedunt Commentarii Mathematici & Phyfici. Titulus cujuflibet Voluminis eft: *Hiftoire de l'Académie Royale des Sciences avec les Mémoires de Mathématique & de Phyfique.* Imprimitur *Parifiis* in 4. forma majore & recuditur in *Batavia* charactere minore, ut leviori pretio comparari poffint hæc opera. In fingulis voluminibus continentur, quæ ad Phyficam generalem, ad Anatomiam, Chimiam, Botanicam, Geometriam,

* Autoris noftri voto fatisfecit Cl. BREMOND, non compendii *Lowthorpiani*, fed ipforum Actorum Societatis Londinenfis verfionem Gallicam fufcipiens. Ejus duo Volumina jam prodiere fub Titulo, *Tranfactions Philofophiques de la Societé Royale de Londres*, *années* 1735 & 1736, *Paris.* 4to. 1738. Item, *années* 1733 & 1734, *Paris.* 4to. 1740. Addatur Volumen fub hoc Titulo, *Table des matiéres imprimées dans les Tranfactions Philofophiques depuis* 1665, *jufques en* 1735, *&c. Paris.* 4. 1739.

metriam, Aſtronomiam, Geographiam, Chronologiam & Mechanicam ſpectant, ſiquidem ad ſingulas haſce claſſes referendum ſchediaſmata a Membris fuerint exhibita & ſub finem Hiſtoriæ ſubjiciuntur Elogia Membrorum, quæ iſto anno, cujus hiſtoria exhibetur, diem ſupremum obierunt. Opus præclarum & omnibus Matheſeos ac Phyſicæ cultoribus nunquam ſatis commendandum continuatur in hodiernum uſque diem. Prolixum nimis foret de tot voluminibus ſigillatim dicere & in iis contenta recenſere. Adeat Diaria Eruditorum, in quibus eadem recenſentur, qui hoc deſiderat. Enimvero ne deeſſent ea, quæ ante inſtaurationem acta fuere, recentius edere libuit Collectionem Commentariorum Academiæ Regiæ ſcientiarum ab An. *1666*, quo fundata fuit, uſque ad An. *1699*, eadem forma, qua nunc pro ſingulis annis Hiſtoria cum ſuis commentariis edi ſolet, Tomis undecim. Tomo primo continetur Hiſtoria a prima origine An. *1666*, uſque ad An. *1686*; ſecundo Hiſtoria ab An. *1686* uſque ad An. *1699*; tertio Commentarii in uſum Hiſtoriæ naturalis Animalium autore PERRALTIO; quarto Diſſertatio de principiis mixtorum naturalium DU CLOS, obſervationes ejuſdem de aquis mineralibus plurium Provinciarum Galliæ, Commentarii DODARTI in uſum Hiſtoriæ plantarum, ejuſdem deſcriptiones novarum quarundam plantarum, DE BEZE e S. J. Deſcriptiones quarundam arborum & plantarum exoticarum; quinto diverſa opera FRENICLII DE BESSY, ſcilicet Methodus inveniendi ſolutionem problematum per Excluſiones, Compendium Combinationum, Tractatus de Triangulis rectangulis in Numeris, Tractatus de Quadratis magicis, Tabula generalis Quadratorum magicorum, & BLONDELLI Reſolutio quatuor problematum principum Architecturæ; ſexto diverſa opera ROBERVALLII, ſcilicet obſervationes de compoſitione motuum, & de modo inveniendi tangentes curvarum, Idea libri Mechanicæ de motibus compoſitis, Tractatus de recognitione æquationum, de geometrica planarum & cubicarum æquationum reſolutione, de Indiviſibilibus, de Trochoide ejuſque ſpatio, epiſtola ÆGIDII PERSONERI de ROBERVAL ad Cl. P. MERSENNUM, epiſtola EVANGELISTÆ TORRICELLII ad ROBERVALLIUM, & Epiſtola ROBERVALLII ad TORRICELLIUM; præterea diverſa opera PICARDI, nimirum Praxis horologiorum ſolarium majorum per calculum, diſſertatio de Menſuris, una cum AUZOUTI comparatione menſurarum, de menſura liquidorum & aridorum, Experimenta circa aquas effluentes, fragmenta dioptrica, Tractatus de libellatione, ROEMERI de craſſitie & viribus tuborum in aquæductibus, ſecundum diverſas fontium altitudines diverſaſque tuborum diametros & ejuſdem Experimenta circa altitudines & amplitudines

dines projectionis corporum gravium, instituta cum argento vivo; septimo Tractatus & observationes astronomicæ atque physicæ factæ in pluribus itineribus a Membris Academiæ & pluribus, quibus commercium literarium cum Academia fuit: octavo diversa opera CASSINI, scilicet de Origine & progressu Astronomiæ & de ejus usu in Geographia & Navigatione, Elementa Astronomiæ rectificata ex observationibus RICHERII factis in Insula Cayennæ, Luminis cœlestis, quod in Zodiaco apparet, detectio, Regulæ Astronomiæ Indorum computandi motus Solis & Lunæ, Reflexiones de Chronologia Sinarum, de Insula *Taprobane*, Hypotheses & Tabulæ Satellitum Jovis ex observationibus recentioribus reformatæ, Tabularum Satellitum Jovis usus præcipui; nono diversa opera DE LA HIRE, scilicet Tractatus de Mechanica, Tractatus de Epicycloidibus & earum usu in Mechanica, Explicatio præcipuorum effectuum glaciei & frigoris, Dissertatio de differentia sonorum chordæ & Tubæ Marinæ, Tractatus de differentibus accidentibus visus, Tractatus de Praxi Picturæ; decimo commentarii Mathematici & Physici Academiæ scientiarum Annorum *1692*, *1693*, &c. & Commentarii Mathematici & Physici Membrorum Academiæ scientiarum ex diversis Diariis Eruditorum extracti; undecimo denique Analysis generalis seu Methodi novæ resolvendi problemata omnis generis & omnis gradus in infinitum, autore DE LAGNY. Volumen septimum in duas partes dividitur, quarum utraque justum volumen constituit & multa continet, quæ sigillatim recensere nimis prolixum foret.

§. 38. Anno 1710, *Berolini* in 4. prodierunt *Miscellanea Berolinensia ad incrementum scientiarum ex scriptis Societati Regiæ exhibitis edita* (Alph. 2, plag. *6*, Tabb. æn. 31.) Dividitur in tres partes, quarum prima literaria, secunda physica & medica, tertia Mathematica & Mechanica continet. Tertia mole sua longe superat duas priores. Hæc Miscellanea deinceps continuata fuere ac in posterum continuabuntur. Continuatio prima lucem adspexit *Berolini* An. 1723, in 4. (Alph. 1, plag. 2, Tabb. æn. 8); secunda ibidem An. 1727, in 4. (Alph. 1, plag. 21, Tab. æn. 10.), tertia sub Titulo Tomi quarti ibidem An. 1734, in 4. (Alph. 2, plag. Tabb. æn. 11.)

§. *39*. Academia Scientiarum Petropolitana quinque ab Anno 1728 usque ad An. 1738, *Petropoli* edidit Volumina in 4. charta augusta sub Titulo: *Commentarii Academiæ Scientiarum Imperialis Petropolitanæ* pro annis 1726, 1727, 1728, 1729, 1730, & 1731. Sunt vero horum Commentariorum tres classes, nimirum Mathematica, Physica & Historica. Quæ in classe mathematica continentur, hujus sunt loci & Mathesin inprimis sublimiorem multum promovent,

quemadmodum ſuo loco clarius ediſſeremus. Cum enim hoc opus continuandum ſit in poſterum, ut de ſingulis in claſſe mathematica cujuſvis voluminis contenta ſigillatim dicamus præſentis inſtituti ratio non fert.

§. 40. Denique hic quoque commemorandi ſunt, *De Bononienſi ſcientiarum & Artium Inſtituto atque Academia Commentarii*, qui *Bononiæ* An. 1731, in 4. charta itidem auguſta lucem publicam adſpexerunt (Alph. 3, plag. 13, Tab. æn. 9.). Præfationis loco præmittitur Hiſtoria Bononienſis ſcientiarum Inſtituti: in Commentariis vero præter ea, quæ ad Hiſtoriam naturæ ſpectant, atque Chymica, Anatomica, Medica, Phyſica, continentur etiam Mechanica, Analytica, Geographica, Aſtronomica & Meteorologica. Subjunguntur iiſdem opuſcula varia quorundam Academicorum, inter quæ ad Matheſin ſpectant DOMINICI GUILIELMINI epiſtola hydroſtatica, EUSTACHII MANFREDII de meridianæ lineæ, quæ in D. *Petronii* exſtat, dimenſione & de noviſſimis circa fixarum ſiderum errores obſervationibus, GABRIELIS MANFREDII de formulis quibuſdam integrandis, JACOBI RICCATI virium elaſticarum leges, JOANNIS RIZETTI de corporum colliſionibus & inde orta motuum communicatione, & FRANCISCI MARIÆ ZANOTTI de motu compoſito & de reflexionibus globi in plano rectangulo.

§. 41. Ad præſentem ſcriptorum claſſem etiam referimus CASPARIS SCHOTTI, ſupra laudati, *Organon Mathematicum & Magiam Univerſalem Naturæ & Artis*. Organon Mathematicum editum eſt *Herbipoli* An. 1688, in 4. (5 Alph. Fig. æn. 1, Alph. 7 plag.). Ope tabularum quarundam Mathematicarum problemata Arithmetica, Geometrica, Architecturæ militaris, Chronologiæ, Gnomonicæ, Aſtronomiæ, Aſtrologiæ judiciariæ, Steganographiæ & Muſicæ facilia redduntur tyronibus. Magia in quatuor partes diviſa *Bambergæ* 1677, in 4. lucem adſpexit (14 Alph. Tab. æn. 89.) In Tomo primo continentur Optica, Catoptrica & Dioptrica; in ſecundo Acuſtica & Muſica; in tertio Mechanica, Statica, Hydroſtatica, Hydrotechnica, Aërotechnica, nec non Arithmetica, Geometrica: in quarto denique Cryptographica, Pyrotechnica, Magnetica, Sympathica, Medica, divinatoria, Phyſiognomica & Chiromantica.

§. 42. In eundem cenſum veniunt DANIELIS SCHWENTERI Mathematum & Linguarum orientalium in Academia Altorffina Profeſſoris, *Deliciæ Phyſico-Mathematicæ*, *Norimbergæ* 1636, in 4. primum editæ (3 Alph. 4 plag.) & poſtea a PHILIPPO HARSDORFFERO duobus Tomis auctæ (10 Alph. 8 plag.) Continentur in iiſdem ludicra varia, nonnulla etiam utilia, ex Arithmetica, Geometria, Stereometria, Muſica, Optica, Catoptrica, Aſtronomia, Aſtrologia, Gnomonica & Thaumatopoë-

poëtica, Statica, Mechanica, Pyrobolia, Pneumatica, Hydraulica, Arte ſcriptoria, Architectura & Chymia.

§. 43. Majorem ſelectum in ſimili ſcripto fecit OZANAM, quod ſub titulo *Recréations de Mathématique & de Phyſique*, *Pariſiis* 1696, in 8. reg. edidit (3 Alph. 7 pl. Tabb. æn. 44.) Recuſæ ſunt hæ Recreationes multo auctiores, quatuor Tomis, ibidem An. 1725, in 8. forma majore, (Alph. 5, plag. 6, Tabb. æn. 132). Tomus primus continet problemata Arithmeticæ, Geometriæ & Opticæ; ſecundus problemata Gnomonicæ, Coſmographiæ, Mechanicæ; tertius problemata Pyrotechniæ & Phyſicæ, & Tractatum de Horologiis elementaribus DOMINICI MARTINELLI ex Italico in Gallicum idioma translatum. In quarto denique Tomo agitur de Phoſphoris naturalibus & artificialibus & lampadibus perpetuis, atque præſtigiatorum artificia, una cum aliis ludicris explicantur.

CAPUT II.

De Arithmetica.

§. 1. Arithmetica veterum ab Arithmetica hodierna prorſus erat diverſa. Veteres enim in eadem nonniſi varias numerorum diviſiones conſiderabant. Videre hoc eſt ex duobus *Arithmetices* libris, quos tertio Urbis conditæ ſeculo conſignavit NICOMACHUS, editis *Pariſiis* 1538. Eum ſequitur preſſo pede, ſexto a Chriſto nato ſeculo, ANITIUS MANLIUS SEVERINUS BOETHIUS in Arithmetica ſua.

§. 2. *Compendium Arithmeticæ* veterum compoſuit, nono poſt Chriſtum natum ſeculo, PSELLUS, a GUILIELMO XYLANDRO ex Græco idiomate in Latinum translatum, annotationibus auctum & *Baſileæ* 1556, in 8. in lucem publicam emiſſum. Recentius ſimile Compendium conſcripſit JODOCUS WILLICHIUS, ſub titulo: *Arithmeticæ libri tres* editum *Argentorati* 1540, in 8. (plag. 8.) Uſum habet in Idea exemplari definitionum animis tyronum ingeneranda, ut præcepta Logicæ facilius comprehendant & ad diviſionem rerum in ſua genera & ſpecies intimius perſpiciendam: de quo ſuo loco plura.

§. 3. Prolixius hoc Arithmeticæ genus illuſtrarunt, duodecimo poſt Chriſtum natum ſeculo, JORDANUS in duodecim *de Arithmetica* libris; & JACOBUS FABER *Stapulenſis* in Commentario in eoſdem An. 1480 edito.

§. 4. Arithmeticam theoreticam,

 quæ

quæ numerorum proprietates expendit, illustravit EUCLIDES Elementorum libro VII, VIII, & IX. Sed de his Elementis dicemus plura in sequente capite.

§. 5. Exactam theoriam ad demonstrandas operationes communes Arithmeticæ practicæ cum in numeris integris, tum fractis sive vulgaribus, sive sexagenariis, dedit BARLAAMUS MONACHUS in *Logistica*, quam Latine reddidit & scholiis illustratam *Parisiis* An. 1600, in 4. edidit JOANNES CHAMBERUS, Collegii Etonensis apud Anglos socius. (1 Alph. 3 plag.) Sed captum tyronum transcendit, quibus nimia accuratio inutilis, immo ridicula videtur.

§. 6. *Frater* LUCAS DE BURGO S. SEPULCHRI, Ordinis Minorum, Sacræ Theologiæ Magister, idiomate Italico An. 1523, edidit opus in fol. (6 Alph. 10 plag.) *de Arithmetica & Geometria.* Maxima operis pars Arithmeticæ impenditur, & in ea non modo divisiones numerorum ex NICOMACHO & proprietates ex EUCLIDE traduntur; verum etiam Algorithmus cum in integris, tum in fractis, una cum extractionibus radicum, regulis proportionum & progressionum, nec non regula falsi & Algebræ explicatur.

§. 7. MICHAEL STIFELIUS, Pastor Ecclesiæ Holtzdorffianæ, An. 1544, in 4. edidit *Arithmeticam integram* (1 Alph. 13 plag.), in qua multa tradit de numerorum cum rationalium, tum irrationalium, immo etiam Cossicorum praxi, quæ alibi frustra quæsiveris, sed sine demonstrationibus.

§. 8. *Arithmeticæ practicæ* opus absolutum An. 1556 dedit NICOLAUS TARTAGLIA, Venetus, in duas partes divisum, quarum prima arithmeticam practicam ad usum vitæ humanæ applicatam, altera vero Algebræ fundamenta explicat.

§. 9. FRANCISCUS MAUROLYCUS in suis *Arithmeticæ* libris supra laudatis (§. 32. C. 1.) doctrinam de numeris figuratis promovit, & algorithmum, cum extractionibus radicum, atque aliis Arithmeticæ practicæ regulis rigorose demonstravit: Sed ejus demonstrationes non sunt ad cujusvis captum accommodatæ.

§. 10. GEORGIUS HENISCHIUS in *Arithmetica perfecta & demonstrata* (*Augustæ Vindelicorum* 1609, in 4. 2 Alph. 6 plag.) omnem praxin de numero vulgari, Cossico & astronomico demonstrat, & id singulare habet, quod demonstrationes in syllogismos resolverit.

§. 11. ANDREAS TACQUET in *Theoria & praxi Arithmetices* sæpius recusa (e. gr. *Amstelodami* 1704, in 8. plag. 34. Tabb. 8.) Elementa EUCLIDIS Arithmetica facilius demonstrat & praxes arithmeticas suis quoque demonstrationibus munit. Unde non immerito commendatur hoc opus.

§. 12. Demonstrationes in Arithmetica practica etiam affert DECHALES

LES (§. 4. C. 1.) Sed negligunt CLAVIUS, HERIGONIUS, VINCENTIUS LEOTAUDUS e Societ. Jesu, qui *Institutionum arithmeticarum* libros quatuor composuit, SCHOTTUS & plerique alii (§. 5. *& seqq. Cap. cit.*). WALLISIUS calculum litteralem cum numerorum algorithmo conjunxit, & illius ope regulas fractorum, proportionum & extractionum radicum demonstravit: ex quo compendium dedit EDUARDUS WELLS sub titulo *Elementorum Arithmeticæ*, 1698, in 8. tyronibus calculi utriusque commendandum.

§. 13. In *Elementis Arithmeticæ* non modo praxin, verum etiam theoriam demonstravi, præsertim theoriam de ratione Quantitatum. Ast in Elementis Germanicis dedi demonstrationes ad captum tyronum magis compositas. Sunt vero eædem vere analyticæ, ex ipsa notione numeri deductæ: ex qua integram Arithmeticam practicam methodo analytica deduxi, ut ad meditandum formarentur ingenia studio Arithmeticæ.

§. 14. Omittimus Autores alios, qui solam praxin tradiderunt, quamvis ad usum communem commendari mereantur GEMMA FRISIUS in *Methodo facili Arithmeticæ practicæ* (*Viteberga* 1544, in 8. plag. 11), ex quo me puerum integram arithmeticam practicam, ipsam etiam extractionem radicum, proprio Marte didicisse memini, & ADRIANUS METIUS in *Arithmetica* duobus libris comprehensa (*Hafniæ* 1640, in 4.). Recentius regulam generalem Arithmeticæ resolvendi omnia problemata, quæ ratione nituntur, dedit K. F. DE REES, quæ ex idiomate Batavo in Germanicum translata publici juris facta *Gœttingæ* An. 1739, in 8. (plag. 12.). Usui est illis, qui nulla theoria animum imbutum possident.

§. 15. SAMUEL MORLANDUS *Londini* An. 1673, in 12. (plag. $6\frac{1}{2}$) idiomate Anglico emisit *descriptionem duorum instrumentorum, quorum ope additio, subtractio & multiplicatio motu quorundam orbium absolvitur.* Utrumque An. 1666, CAROLO II. Regi exhibuit. Sed multo ingeniosiorem machinam Arithmeticam in juventute sua dudum invenit illustris LEIBNITIUS, de qua in Miscellaneis Berolinensibus pag. 394. nonnulla leguntur. Aliam utut minus perfectam, ingeniosam tamen dedit Cl. JOANNES POLENUS in *Miscellaneis*, *Venetiis* 1709, in 4. (plag. 8. Tabb. 9.)

§. 16. Logisticam decimalem prolixe ac perspicue peculiari libro exposuit JOHANNES HARTMANNUS BAYERUS, D. Medicinæ, An. 1619, *Francof. ad Mœnum* vernaculo idiomate in 4. edito (1 Alph. 6. plag.). Arithmeticam Logarithmicam vero optime explicuit in peculiari itidem volumine, de quo inter scripta Trigonometrica plura dicemus, BRIGGIUS.

§. 17. De Arithmetica autem decimali inprimis commendari meretur libellus, quem sub Titulo: *A new and*

and compleat Treatiſe of the Doctrine of fractions, vulgar and Decimal, Londini An. 1714, in 8. edidit SAMUEL CUNN, ubi omnia explicantur & exemplis illuſtrantur, quæ de uſu fractionum decimalium tenenda ſunt. Non inutilem operam ſumeret, qui eundem in linguam Latinam, vel etiam Germanicam transferret. Nos theoriam harum fractionum, quantum ad praxin ſufficit, expoſuimus & demonſtravimus Cap. 9 Elementorum Arithmeticæ. Hodie enim uſus earum prorſus egregius eſt, ubi ex æquationibus algebraicis radices per approximationem eruendæ & ſeries infinitæ ad communem uſum aptandæ.

§. 18. Virgulas ſuas, quibus magnorum numerorum multiplicationem ac diviſionem facilitavit, JOANNES NEPERUS, Baro Merchiſtonius, Scotus, in *Rhabdologia* (*Edinburgi* 1617, in 12. plag. 6.) deſcripſit. JOHANNES vero GEORGIUS HERWART AB HOHENBURG, U. J. Doct. ex Aſſeſſore ſummi tribunalis imperatorii & Cancellario ſupremo Bavariæ Ducis ejuſdem conſiliarius intimus, Præſes provinciæ Schvabæ & inclytorum utriuſque Bavariæ Statuum Cancellarius, *Monachii* An. 1610, in fol. reg. evulgavit Tabulas *Arithmeticas* προσθαφαιρέσεως *univerſales*, quarum ſubſidio numerus quilibet ex multiplicatione producendus per ſolam additionem & quotiens quilibet e diviſione eliciendus per ſolam ſubtractionem etiam ab eo, qui Arithmetices non admodum ſit gnarus, exacte & celeriter invenitur (11 Alph. 9 plag.). NEPERUM imitatus SAMUEL REYHERUS, Mathem. Prof. Kilonienſis, Bacillos ſexagenales *Kilonii* 1688, in 4. publicavit, quorum ope Logiſtica ſexagenaria facile exercetur: de qua egimus Cap. 10. *Arithmetica*.

CAPUT III.

De Geometria.

§. 1. Geometria eſt vel theoretica, vel practica: theoretica vel elementaris, vel ſublimior.

§. 2. Geometriam elementarem conſcripſit EUCLIDES, cujus *Elementa* a variis in lucem edita fuere. Textum Græcum cum verſione Latina An. 1703. *Oxoniæ* in fol. (7 Alph. 17. plag.) ſub titulo ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ τὰ σωζόμενα. h. e. EUCLIDIS, *quæ ſuperſunt, omnia*, edidit DAVID GREGORIUS, Aſtronomiæ Profeſſor Savilianus. Anno 1530, in priora ſex Elementa Commentarium edidit ORONTIUS FINÆUS, in quo mentem EUCLIDIS tantummodo explicat, qualem etiam

etiam An. 1557, dedit JACOBUS PELETARIUS. In Elementa omnia XV commentati sunt circa idem tempus NICOLAUS TARTAGLEA, aliqua etiam de suo addens, & An. 1578, FRANCISCUS FLUSSATES CANDALLA, nobilis Gallus, qui ad Elementa decimum sextum, septimum, & octavum de solidorum corporum comparatione & inscriptionibus variis adjecit. Elementa EUCLIDIS pariter ac FLUSSATIS cum commentario prolixo edidit CLAVIUS. Sæpius recusa prodiere inter alia *Franc. ad Mœn.* 1654, in 8. duobus Tomis (Tom I. 2 Alph. 4 plag. & Tom. II. 1 Alph. 20 plag.) atque etiam inter Opera ejus extant (§. 24. C. 1.) Bene quoque EUCLIDEM integrum explicarunt DECHALES (§. 4. C. 1.), HERIGONIUS (§. 1. cap. cit.), & inprimis concinna brevitate ISAACUS BARROWIUS, Matheseos olim in Academia Cantabrigiensi Professor. Sed quoniam integer EUCLIDES tyronibus parum utilis; ideo complures sex tantum priora Elementa ediderunt, & ad summum undecimum & duodecimum adjecerunt. Prolixum nimis foret singulas recensere editiones: sufficit eas nominasse, quæ præ aliis commendari merentur. In hunc ergo censum referimus Elementa EUCLIDIS Gallica, quæ DECHALES sigillatim edidit, & Elementa Geometriæ planæ & solidæ ANDREÆ TACQUET. Præstantissima illorum editio est *Parisina* An. 1709, in 12. reg. (12 plag. Tab. æn. 16.); horum vero *Cantabrigiensis* An. 1703, in 8. (plag. 16. Tab. 7.), quorum illam debemus OZANAMO, hanc vero GUILIELMO WHISTONO, tunc temporis Mathematum Professori Cantabrigiensi. Continetur autem in Elemento VII, VIII, & IX, theoria numerorum seu Arithmetica elementaris: unde ANDREAS TACQUET tria hæc Elementa Arithmeticæ suæ inseruit (§. 11. c. 2.). Opus hoc illustre inter ea eminet, quæ ex Antiquitate ad nos pervenerunt, ita ut providentiæ divinæ tribuendum sit, quod injuria temporum non interciderit.

§. 3. JOANNES SCHEUBELIUS, in Academia Tubingensi EUCLIDIS Professor, ex stimans, præter institutum EUCLIDIS, in designandis demonstrationum momentis literarum figuras usurpari, atque hac ratione & docentibus laborem ac molestiam augeri, & discentium intelligentiam impediri, An. 1550, novo consilio Elementa sex priora ita demonstravit, ut literis remotis sua unumquodque propria appellatione designarit. Prodiit opus *Basileæ* in fol. præmissa brevi Algebræ descriptione. (3 Alph. 5 plag.)

§. 4. Alio consilio An. 1565, CHRISTIANUS HERLINUS & CONRADUS DASYPODIUS demonstrationes *Euclideas* in syllogismos resolverunt: qui labor hunc usum habere potest, ut appareat, quomodo ex plurium Syllogismorum concatenatione tan-

dem demonstratio completa enascatur. Idem opus utrique debetur ex parte. Prodiit *Argentinæ* An. 1506, in fol. (Alph. 2, plag. 4, cum figuris ligno incisis.). Titulus est: *Analyses Geometricæ sex librorum* EUCLIDIS, *primi & quinti a* CHRISTIANO HERLINO, *reliquæ, una cum Commentariis & scholiis perbrevibus in eosdem sex libros Geometricos, a* CONRADO DASYPODIO.

§. 5. Ordo EUCLIDIS displicuit PETRO RAMO, quemadmodum ex iis intelligitur, quæ in *Scholis Mathematicis* lib. 6, & seqq. contra EUCLIDEM passim disputat. Prodiere hæ Scholæ *Francofurti ad Mœnum* opera LAZARI SCHONERI An. 1599, in 4. (2 Alph. 17 plag.) continentes 1. exhortationem ad artes mathematicas, 2. disputationes de præcipuis quibusdam capitibus Arithmeticæ, & 3. discursus de quindecim libris EUCLIDIS. Confer etiam lib. 3, pag. 94, & seqq. RAMUS itaque alia Geometriæ elementa conscripsit libris 27 comprehensa secundum ordinem Scholæ, a SCHONERO An. 1599, in 4. *Francofurti*, una cum libris 2 Arithmeticæ edita & *Euclideis* prælata. Titulus libri est: PETRI RAMI *Arithmeticæ Libri duo, Geometriæ septem & viginti, a* LAZARO SCHONERO *recogniti & aucti* (2 Alph. 9 plag. cum figuris textui insertis). Arithmetica magis practica, quam theoretica est, etsi theoria de ratione & proportione exemplis illustretur & ad praxin transferatur. Deficiunt tamen demonstrationes accuratæ, quales dedit EUCLIDES. Adjecit SCHONERUS de numeris figuratis librum unum & RAMI Algebræ libros duos a se emendatos, atque de Logistica sexagenaria librum proprium. In Geometria agitur primum de magnitudine in genere, deinde de lineis, postea de superficiebus, tandem de solidis. Enimvero qui primus Geometriam ad ordinem Scholæ reformare ausus est, statim exemplo suo docuit (quod supra §. 57. *Meth. Math.* annotatum est) accuratam demonstrandi methodum cum ordine Scholæ subsistere non posse. Etsi enim SCHONERUS testetur, se in docenda Arithmetica & Geometria P. RAMI per multos annos versatum, & quantum ex iis proficere liceat tyronibus experientia multiplici edoctum fuisse; hoc tamen non obstat, quo minus EUCLIDEM ipsum RAMO præferamus. Neque enim SCHONERUS methodi ac rigoris in demonstrando; sed tantummodo doctrinæ rationem habet, quam ex RAMO facilius hauriri ac memoriæ inprimi posse facile conceditur. Nobis vero jam sermo est de methodo, quæ cum rigore demonstrandi consistit, ut plenaria adsit convictio eaque immota, quocunque tandem acumine demonstrationem perlustres. Hanc desiderari in RAMO, nec cum eo ordine, quo doctrinas congessit, consistere posse contendimus.

§. 6. Idem

§. 6. Idem apparet etiam ex cæterorum ſcriptis, qui poſt RAMUM idem conſilii ceperunt. Pertinent huc 1. *Elementa Geometriæ* IGNATII GASTONIS PARDIES e Societate Jeſu, quartum *Hagæ Comitum* An. 1680, in 12. (plag. 8) recuſa & a ſumme Reverendo Abbate SCHMIDIO, Helmſtadienſium Theologo celeberrimo, cum adhuc Jenæ Matheſin & Philoſophiam profiteretur, ex Gallico ſermone in Latinum tranſlata. Extant in Opuſculis ejus mathematicis, quæ ſub titulo: *Oeuvres de Mathématique*, *Hagæ Comitum* An. 1691, in 12. prodiere, in quibus præter hæc elementa libris IX comprehenſa continetur Diſcurſus de motu locali, Statica, & Deſcriptio duarum machinarum deſcribendis horologiis Solaribus convenientium. 2. *Nova Elementa Geometriæ* ARNALDI, ſuppreſſo nomine, Anno 1667, *Pariſiis* primum edita in 4. dein An. 1685, ibidem & An. 1690, *Hagæ Comitum* in 8. recuſa (plag. 21) idiomate Gallico. 3. *Elementa Geometriæ* Gallica R. P. BERNHARDI LAMY An. 1685, *Pariſiis* in 12. primum edita & An. 1710, ibidem multo auctiora recuſa, ita ut nunc ſingulæ EUCLIDIS propoſitiones, exceptis Elementis ſeptimo, octavo & nono de numeris agentibus, in iiſdem contineantur una cum introductione ad ſectiones conicas (plag. 21.) 4. *Elementa Geometriæ Sereniſſimi Burgundiæ Ducis* Gallice conſcripta (*Trevoltii* 1705, in 4. reg. 1 Alph. 7 plag.) concinna brevitate maxime neceſſaria methodo *Arnaldiana* evolventia *. Omittimus alia, quæ minoris ſunt momenti & ex hiſce compilata.

§. 7. Integrum quoque EUCLIDEM alio ordine digeſſit & novis paſſim demonſtrationibus munivit Cl. PETRUS POLINIER, Medicus Pariſienſis, in Elementis Geometriæ, quæ una cum Elementis Arithmeticæ ſub titulo: *Elémens des Mathématiques*, *Pariſiis* 1704, in 12. reg. (1 Alph. 4 plag.) edidit. Contra quæ ex EUCLIDE cognitu minus neceſſaria ſunt, omiſit, & neceſſaria alio ordine digeſſit, aliterque ſubinde demonſtravit Cl. ANGELUS DE MARCHETTIS in Piſana Univerſitate Mathematum Profeſſor in EUCLIDE, quem vocat, *Reformato* (*Liburni* 1709, in 4. 1 Alph. 10 plag.)

§. 8. Præter nos alii etiam Mathematici agnoverant, reformatores Elementorum EUCLIDIS non fuiſſe in auſu ſuo ſatis felices; ſed EUCLIDIS Elementis palmam adhuc merito tribuendam eſſe. Memini hanc fuiſſe LEIBNITIO ſententiam, cum mè inviſeret, dum Elementis Geometriæ concinnandis operam darem, ipſique referrem me multiplici modo tentaſſe, ut eo ordine Elementa Geometriæ digererem, quo uſus eſt BERNHARDUS LAMY, ſed nunquam hoc fieri potuiſſe, niſi quædam aſſumerem abſque

* Elementorum horum Autor Dn. DE MALESIEUX.

que demonstratione, quæ essent demonstranda, vel in demonstrando ac definiendo admitterem confuse tantummodò percepta. In Anglia JOANNES KEIL, ut Matheseos Studiosos ad Elementa EUCLIDIS reduceret, eo fine *Oxonii* An. 1715, in 8. (Alph. 1, plag. 6, cum figuris textui insertis), imprimi curavit Elementa sex priora EUCLIDIS una cum decimo & undecimo ex versione FREDERICI COMMANDINI. In præfatione, quam iisdem præmisit, graviter invehitur in eos, qui EUCLIDEM carpunt, & ab ejus lectione juvenes abducunt. Addidit Elementa Trigonometriæ planæ & Sphæricæ, atque Tractatum de natura & Arithmetica Logarithmorum.

§. 9. Præter ordinem, quem EUCLIDES in Elementis suis tenet, multi ex antiquis pariter ac recentioribus Geometræ, tres sibi visi sunt deprehendisse nævos in ejusdem Elementis, quorum primus respicit definitionem parallelarum & sub ea axioma, quod apud CLAVIUM est decimum tertium libri primi; secundus definitionem sextam libri quinti, quæ est æque proportionalium; & tertius definitionem quintam libri sexti de compositione rationum. Ab his nævis cum vindicare aggressus est HIERONYMUS SACCHERIUS, Societatis Jesu, in Ticinensi Universitate Matheseos Professor, in Opusculo, quod sub titulo: EUCLIDES *ab omni nævo vindicatus*, sive *Conatus Geometricus, quo stabiliuntur prima ipsa universæ Geometriæ principia*, *Mediolani* 1733, in 4. (plag. 20, Tab. æn. 6).

§. 10. Nos equidem in Elementis hisce Matheseos non exhibuimus Elementa EUCLIDIS ipsa; nihil tamen in iis occurrit, quod non reperiatur vel in Arithmetica, vel in Geometria, vel in Algebra, quemadmodum inferius fidem oculatam dabimus. Nihil vero nobis magis curæ cordique fuit, quam ut rigori demonstrandi consuleremus & demonstrationes ita componeremus, ut essent consummatæ eo sensu, quem in Logica Latina (§. 799, 854, 855) explicamus, ad usum tamen tyronum compositæ. Et plurimorum annorum experientia abunde docuit fructum, quem inde percipere licet.

§. 11. Quæ in EUCLIDE de Circuli, Sphæræ, & Cylindri dimensione defuere; ea supplevit ARCHIMEDES in duobus *de Sphæra & Cylindro Libris*, & *de Circuli dimensione* Libello unico: ex quibus selecta theoremata ad faciliorem tyronum intelligentiam proposuit TACQUETUS sub finem Geometriæ supra laudatæ (§. 2). Idem ARCHIMEDES Libros alios de *Spiralibus*, de *Conoidibus & Sphæroidibus*, & de *Quadratura Parabolæ* scripsit. Opera ejus una cum *Conicis* APOLLONII & *Sphæricis* THEODOSII edidit facilioribus cum demonstrationibus ISAACUS BARROWIUS *Londini* 1675, in 4. (Opera ARCHIMEDIS constant 24 plag. Tabb. æn. 13.

APOL-

APOLLONII 14 plag. Tab. 12, & THEODOSII plag. 6, Tab. 3). Præter vero Geometrica in operibus ARCHIMEDIS una continentur Libri *de æquiponderantibus & insidentibus humido: Arenarium* tamen ejus omisit BARROWIUS, qui in alia editione una comparet, quæ *Panormi* An. 1685, in fol. prodiit, & cujus singularia fata in Actis Eruditorum An. 1687, p. 543, & 544, recensentur. Germanicam operum ARCHIMEDIS versionem (Libris de insidentibus humido exceptis) dedit JOH. CHRISTOPH. STURMIUS (*Norimbergæ* 1670, in fol. 6 Alph. 2 plag.)

§. 12. Archimedea promovere studuit JOHANNES KEPLERUS in *Nova Stereometria doliorum vinariorum*, inprimis Austriaci (*Lincii* 1615, in fol. plag. 28), quæ una continet supplementum ad ARCHIMEDEM de Stereometria figurarum Conoidibus & Sphæroidibus proxime succedentium. Ex Latino in Germanicum versam eandem anno sequenti edidit, sed passim mutatam, alicubi etiam præcisis nonnullis auctam. Ejus exemplo excitatus BONAVENTURA CAVALERIUS, ordinis S. Hieronymi, olim Mathematum Professor Bononiensis (quemadmodum ipse in præfatione fatetur) adhuc ulterius progressus plurium, quam ARCHIMEDES & KEPLERUS, solidorum per revolutionem sectionum conicarum circa axem aut rectas alias dedit nova methodo indivisibilium, quam vocat, a KEPLERO part. 1. theor. 2. Stereom. indicata, in *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (*Bononiæ* 1653, in 4. 3 Alph. 1 plag.) Similiter *Archimedea* illustravit atque promovit EVANGELISTA TORRICELLIUS, magni Hetruriæ Ducis Mathematicus, in *Operibus Geometricis de Solidis sphæralibus, de motu, de dimensione parabolæ, de solido hyperbolico cum appendicibus, de cycloide & cochlea* (*Florentiæ* An. 1644, in 4. 2 Alph.)

§. 13. Præter ea, quæ ARCHIMEDES ad sublimiorem Geometriam spectantia tradidit, Veteres inprimis ad eandem *Sectionum Conicarum* doctrinam referebant, de quibus opus absolutum VIII Libris comprehensum composuit APOLLONIUS *Pergæus*, quorum quatuor priores sæpius editi. Inter optimas editiones refertur, quam cum Commentariis prolixis An. 1655, in fol. (5 Alph. 19 plag. Tabb. æn. 30.) *Antverpiæ* in lucem emisit CLAUDIUS RICHARDUS, e Societate Jesu, quales etiam in EUCLIDIS Elementa XV, An. 1645, in fol. dederat integro volumine comprehensos. Quintum, sextum & septimum, qui pro amissis habebantur, ex Arabico MSC. ABALPHATI *Aspahanensis* opera ABRAHAMI ECCHELLENSIS *Maronitæ*, Linguarum Orientalium Professoris Romani, in vertendis usus, *Florentiæ* 1641, in fol. (4 Alph. 21 plag.), cum *libro Assumtorum* ARCHIMEDIS in lucem protraxit JOH. ALPHONSUS BORELLUS, in Academia Pisana Matheseos

ſcos Profeſſor. Antequam vero iidem prodirent, VINCENTIUS VIVIANI, Magni Hetruriæ Ducis Mathematicus, ex deſcriptione PAPPI librum quintum feliciter reſtituit, & ſub titulo *Divinationis Geometricæ* in quintum Conicorum APOLLONII *Pergæi* adhuc deſideratum, *Florentiæ* 1659, in lucem emiſit: quo ſucceſſu felici permotus ex intervallo An. 1701, addidit *de locis ſolidis ſecundam divinationem Geometricam* in quinque libros injuria temporum amiſſos ARISTÆI ſenioris Geometræ (*Florentiæ* in fol. 3 Alph. 15 plag.). Scripta VIVIANI uſui eſſe poſſunt illis, qui methodo demonſtrandi veterum in Geometria ſublimiori delectantur. Præſtantiſſimam operum APOLLONII editionem dedit Celeberrimus HALLEJUS *Oxoniæ* An. 1710, in fol. (5 Alph. 16 plag.). Acceſſere eidem SERENI Libri duo de *Sectione Cylindri & Coni*, qui primum Græce editi, & APOLLONII liber octavus ab HALLEJO reſtitutus.

§. 14. Inter recentiores doctrinam conicam illuſtrarunt varii. Commendari meretur opus de *Sectionibus Conicis* CLAUDII MYDORGII An. 1632, *Pariſiis* in fol. publicatum, in quo & proprietates earundem demonſtrantur, & deſcriptiones variæ docentur. Huic præferendus GREGORIUS A S. VINCENTIO, e Societate Jeſu, qui in *Opere Geometrico Quadraturæ circuli & Sectionum Coni*, 10 Libris comprehenſo ad inventa recentiora viam ſtravit, ita ut LEIBNITIUS in Actis Eruditorum An. 1691, p. 438, fateatur, ſibi in interiori Geometria hoſpiti, cum opus hoc GREGORII A S. VINCENTIO, una cum HUGENII libro de Horologio oſcillatorio & DETTONVILLÆI (hoc eſt, PASCALII) Epiſtolis legeret, ſubito affulſiſſe lucem & ſibi & aliis inexpectatam. Prodiit opus inſigne *Antverpiæ* 1647, in fol. (14 Alph., & præter conica in eodem continentur variæ linearum inter ſe proportiones, triangulorum novæ proprietates, rectangulorum proportiones, progreſſionum Geometricarum etiam in infinitum progredientium miræ proprietates, multa de circulo alibi minus obvia, doctrina de ductu plani in planum, de proportionalitatibus Geometricis theoria nova, ungularum item, conoidum & ſphæroidum doctrina. Abſolutum quoque *Sectionum conicarum* opus debemus induſtriæ PHILIPPI DE LA HIRE (*Pariſ.* An. 1685, in fol. 2 Alph. 18 plag.), in quo præter APOLLONIANA plurima alia methodo veterum demonſtrantur: ex quo in gratiam tyronum compendium fecit JACOBUS MILNES impreſſum *Oxonii* An. 1702, in 8. (12 plag. & 19 Tab. Fig.) & recuſum emendatius atque auctius ibidem 1712, in 8. (15 plag. Tabb. 19) ſub titulo; *Elementa Sectionum Conicarum nova methodo demonſtrata.*

§. 15. Ipſe etiam celeberrimus DE LA HIRE in eorundem gratiam Ele-

Elementa Sectionum conicarum, *Parisiis* An. 1679, in 12. in lucem emisit una cum constructione locorum geometricorum & æquationum, de qua in capite subsequente. Titulus opusculi: ***Nouveaux Elémens des Sections Coniques, les lieux Géométriques, la construction des Equations.*** (plag. 21.) Similis iisdem est Tractatus OZANAMI Gallicus ***de lineis primi generis, locis Geometricis & constructione aquationum*** (*Parisiis* 1687, in 4. 1 Alph. 15 plag. Tab. æn. 35). Nominandus hic quoque est ***Tractatus de Sectionibus cylindri & coni in solido & plano consideratis, cum demonstrationibus simplicibus ac novis***, quem sermone Gallico *Parisiis* An. 1704, in 8. edidit POIVRE (5 plag. & 8 Tabb. æn.). De aliis Conicorum scriptoribus dicemus capite sequente.

§. 16. Commemoranda tamen de iisdem adhuc nonnulla sunt, quæ hic apprime locum merentur. Nimirum GUIDO GRANDUS, cum intelligeret, desiderari libellum Conicorum ad captum tyronum, cujus defectu doctrina conica in Scholis vulgo negligitur; eundem supplevit & methodo veterum conscripsit libellum mole parvum, sed rerum ubertate gravem, in quo præcipua de sectionibus conicis theoremata demonstrat. Prodiit *Florentiæ* An. 1722, in 12. (plag. $6\frac{1}{2}$, Tabb. æn. 7.), sub titulo: ***Compendio delle sezioni coniche d'Apollonio.*** Quoniam hoc compendium commendari meretur Matheseos Studiosis, CHRISTIANUS AUGUSTUS HAUSEN, Matheseos Professor Lipsiensis, versionem hujus opusculi Latinam in gratiam auditorum adornasse dicitur in Actis Eruditorum supplement. Tom. VIII, sect. X, hinc inde tamen quædam immutasse. Equidem VINCENTIUS SANTINI, Florentinus, simile Compendium dare conatus est *Lucæ* 1722, in 8, (plag. 6, Fig. 28) sub titulo: ***Delle sezzioni coniche dedotte nuovamente in Piano dal cerchio***, in quo nova ratione sectiones conicas in plano a circulo deducit; sed demonstrationes ejus laborare circulo vitioso jam annotarunt Collectores Actorum Eruditorum *loc. cit.* p. 432. NICOLAUS DE MARTINO, Regius Mathematum Professor Neapoli, duobus Tomis ***Elementa Sectionum conicarum*** edidit *Neapoli* An. 1734, in 8. charta augusta (Tom. I, plag. $21\frac{1}{2}$, Tabb. æn. 8, Tom. II, plag. 22, Tabb. æn. 8.). Conscripserat hæc Elementa ad usum FAUSTINÆ PIGNATELLI, Principis Culubranensis & Tolvensis Ducatus hæredis; postea in gratiam studiosæ juventutis publici juris fecit. Omissis propositionum, scholiorum & corollariorum titulis, continuo textu ad morem vulgarem extra Mathesin receptum cuncta demonstrat. Præter Sectionum conicarum proprietates, earum usum in construendis problematis solidis docet, præmissis iis, quæ cum in genere de constructionibus geometricis tum problematum planorum sciri debent.

§. 17. Præ-

§. 17. Præter Conica apud veteres in Geometria sublimiori celebre fuit Problema Deliacum de duplicando cubo, seu, quod eodem recidit (§. 626, *Anal. fin.*), de inveniendis duabus mediis continue proportionalibus inter duas datas: quem in finem excogitatæ sunt variæ lineæ curvæ a PAPPO *Alexandrino* in *Collectionibus Mathematicis* conservatæ. Earum duo Libri priores hactenus desiderantur. Sex posteriores *Bononiæ* 1660, in fol. editi (Alph. 5, plag. 9, cum figuris textui insertis,) continent, inter alia solutiones varias problematis Deliaci, trisectionem anguli, isoperimetrorum doctrinam, sphærica nonnulla, & quædam ad Mechanicam spectantia. Varia etiam scripta Geometrarum veterum in præfatione ad librum septimum recenset PAPPUS.

§. 18. Inter præcipua inventa Geometrica superioris seculi refertur methodus centrobaryca PAULI GULDINI, e Societate Jesu, de qua diximus in Mechanica & Statica (§. 164). Prodiit ejus liber primus *de centro gravitatis, una cum Tabulis numerorum quadratorum & cubicorum decies millium*, *Viennæ Austriæ* 1635, in fol. (4 Alph. 21 plag.). Accessere libri secundus, tertius & quartus An. 1640, (4 Alph. 14 plag.). Libro primo adjuncta est dissertario de motu terræ ex mutatione centri gravitatis ipsius proveniente.

§. 19. Curvarum doctrinam universalius pertractavit & multis novis inventis auxit ISAACUS BARROWIUS supra laudatus in egregio opere *Lectionum Geometricarum, Londini* 1674, in 4. (plag. 21, Tabb. 13). Elementa curvarum in usum tyronum hactenus desiderantur, qualia tamen prostare consultum foret.

§. 20. Alia scripta particularia ad Geometriam theoreticam spectantia nimis longum foret hic recensere. Quædam tamen recensere lubet. Pertinet huc CHRISTIANI HUGENII liber *de circuli magnitudine*, *Hagæ Comitum* An. 1644, in 4. (plag. 5, cum figuris textui insertis) & ejusdem *Theoremata de Quadratura Hyperboles, Ellipsis & Circuli ex dato portionum gravitatis centro, Lugduni Batavorum* An. 1651, in 4. (plag. $6\frac{1}{2}$ cum figuris textui insertis.). Uterque Tractatus legitur Operum variorum Tomo secundo (§. 35, c. 1).

§. 21. Affinia his sunt LUDOLPHI A CEULEN, Hildesheimensis, *de Circulo & Adscriptis* liber, ex vernacula in Latinam translatus & annotationibus illustratus a WILLEBRORDO SNELLIO (*Lugd. Batav.* 1619, in 4. plag. 8) & ejusdem *Fundamenta Arithmetica & Geometrica* cum eorundem usu in variis problematis Geometricis, partim solo linearum ductu, partim per numeros irrationales & tabulas sinuum & Algebram solutis, a SNELLIO itidem Latine versa, *Lugd. Bat.* 1615, in 4. (1 Alph. 16 plag.)

§. 22. LAURENTIUS LORENZINIUS, Disci-

Discipulus VINCENTII VIVIANI, edidit *Florentiæ* An. 1721, in 4. (plag. 20, Tabb. æn. 14.) *Exercitationem Geometricam*, in qua agitur de dimensione omnium conicarum sectionum, curvæ parabolicæ, curvæque superficiei Conoidis parabolici. Solvit more veterum per demonstrationes problemata, quæ hodie per Algebram solvi solent. Unde ejus lectio commendanda iis, qui methodum veterum sibi familiarem reddere gestiunt. Cum viginti annos in vinculis duro fato detineretur, ab omni commercio cum hominibus literatis remotus, nullius libri usu concesso, methodum istam excoluit & duodecim libros de sectionibus conicis & cylindricis eorumque solidis conscripsit, ultra APOLLONII & VIVIANI inventa progressus. Ex carcere igitur tandem dimissus, ubi cognovisset, quæ nunc agerentur a Geometris, sublimiora quoque meditari cœpit, sed consueta sibi utens methodo. Sex itaque composuit Exercitationes, quarum prima est, quæ hic commemoratur: ceteræ enim, quantum constat, lucem publicam non adspexerunt.

§. 23. *Comes de* PAGAN, cujus non minus in Astronomia, quam Architectura militari celebre est nomen, decem edidit libros Theorematum Geometricorum sub titulo: *Les dix Livres des Theorémes Géometriques du Comte de* PAGAN, *Parisiis* 1654, in 8. (1 Alph. 5 plag.), in quibus de lineis 4 proportionalibus, de sectionibus conicis, de theoria planetarum elliptica, de munitionibus regularibus & de navigatione agit. Prostant etiam ISMAELIS BULLIALDI *de Lineis spiralibus demonstrationes novæ (Paris.* 1657, in 4. plag. 18.) & ejusdem *Exercitationes Geometricæ circa demonstrationes per inscriptas & circumscriptas figuras, circa conicarum sectionum quasdam propositiones, & de porismatibus* (*Paris.* 1657. in 4. plag. 6).

§. 24. STEPHANUS DE ANGELIS, Nobilis Venetus, Ordinis Jesuatorum S. Hieronymi, methodum CAVALERII excoluit, ejus usum insignem demonstraturus, cum non deessent, qui eandem impugnarent & contemnerent. Edidit *Venetiis* An. 1658, in 4. (Alph. 1, plag. 14, cum figuris textui insertis) *Problemata Geometrica Sexaginta circa Conos, sphæras, superficies conicas sphæricasque præcipue versantia*; ibidem An. 1656, in 4. *Libros quatuor de infinitis parabolis infinitisque solidis ex variis rotationibus ipsarum partiumque earundem genitis, una cum nonnullis ad prædictarum magnitudinum aliarumque centra gravitatis attinentibus* (Alph. 2, plag. 7,). Addidit An. 1663, librum quintum (plag. 14). Ibidem 1659, in 4. in lucem publicam emisit *Miscellaneum hyperbolicum & parabolicum*, in quo præcipue agitur de centris gravitatis hyperbolæ, partium ejusdem, atque nonnullorum solidorum, de quibus nunquam Geometria locuta est. Parabola noviter quadratur dupliciter, ducun-

ducuntur infinitarum parabolarum tangentes, assignantur maxima inscriptibilia, minimaque circumscriptibilia infinitis parabolis, conoidibus ac semifusis parabolicis, aliaque geometrica nova exponuntur scitu digna (Alph. 1, plag. 11). An. 1660, ibidem prodiit ejus *Opusculum Geometricum de infinitorum spiralium spatiorum mensura* (plag. 16) & tandem An. 1661, publici juris facti Tractatus de *infinitarum cochlearum mensuris ac centris gravitatis* (plag. 16), & Tractatus duo *de superficie Ungula & de Quartis Liliorum parabolicorum & cycloidalium.* (Alph. 1, plag. 19). Atque adeo patet, quod suo tempore Geometriam sublimiorem multum promoverit, aliisque viam ad ulteriora monstraverit.

§. 25. FRANCISCUS A SCHOOTEN, Leydensis, in Academia Lugduno-Batava Matheseos Professor, *Exercitationum mathematicarum* libros quinque *Lugduni Batavorum* in 4. An. 1657, (Alph. 3) edidit, in quibus habentur varia tum ad Geometriam elementarem, tum sublimiorem spectantia, una cum tractatu de sectionum conicarum in plano descriptione, qui sigillatim prodiit (*Lugd. Batav.* 1646, in 4. plag. 17). Nimirum libro primo continetur propositionum arithmeticarum & geometricarum centuria, secundo constructio problematum simplicium geometricorum, tertio APOLLONII *Pergæi* loca plana restituta, quarto organica conicarum sectionum in plano descriptio, & quinto sectiones miscellaneæ triginta. Colophonis loco adjicitur HUGENII Tractatus de *Ratiociniis in ludo alea*, qui inter opera varia Vol. 2, legitur (§. 35, C. 1).

§. 26. JACOBI DE BILLY, e Societate Jesu, tractatus *de proportione harmonica*, An. 1658, editus, in quo varia problemata ejus ope solvuntur. ANTONII LALOVERÆ, e Societate Jesu, *Geometria veterum promota*, seu libri septem de Cycloide *Tolosæ* 1660, prodiere, quibus multa continentur ad Geometriam sublimiorem spectantia. Extat etiam FERDINANDI ERNESTI *Comitis ab* HERBERSTEIN *Diatome Circulorum seu specimen Geometricum*, quo Lunularum, Curvilineorum aliorumque spatiorum propositiones demonstrat (*Pragæ* 1710, in 8. 1 Alph. Tab. 1): VINCENTII VIVIANI *Exercitatio mathematica de formatione & mensura fornicum* (*Florentiæ* 1692, in 4. plag. 6): JOH. BAPTISTÆ PALMÆ in *Geometriam Exercitationes* (*Neapoli* 1689, in 4. plag. 16) 100 propositiones, quæ ad Geometriam elementarem pertinent, cotinentes.

§. 27. ANGELUS DE MARCHETTIS, in Pisana Universitate scientiarum mechanicarum Professor, *Pistoriæ* An. 1695, in 4. (plag. 14) sermone patrio edidit Tractatum de natura rationis & proportionis nova, facili & secura methodo explicata. Titulus libelli est: *La Natura della proporzione & della proporzionalità.* In

eo

eo aliam viam ingressus est, quam EUCLIDES, aliam quoque, quam alii recentiores ab EUCLIDE recedentes calcarunt. Cum intellexisset, eundem probari STEPHANO DE ANGELIS, DOMINICO GULIELMINO, FRANCISCO SPOLETI, *Collectoribus Actorum Eruditorum* in Actis An. 1696, p. 244, 245, in Latinam linguam ipsum transtulit: Qua data occasione cetera quoque EUCLIDIS Elementa tam plana quam solida in breviorem & meliorem formam redigere voluit. Unde enatum est opus Elementorum planorum & solidorum Geometriæ, quod sub titulo: EUCLIDES *Reformatus* prodiit & quod supra laudavimus (§. 7).

§. 28. Ad libros analyticos veterum, quorum memoriam conservavit PAPPUS in præfatione ad librum septimum Collectionum mathematicarum referendi sunt APOLLONII *Pergæi de sectione rationis* Libri duo ex arabico latine versi, & de *sectione spatii* Libri duo restituti ab EDMUNDO HALLEY ac editi *Oxonii* 1706, in 8. (1 Alph. 3 plag.).

§. 29. Ad Geometriam quoque spectat *Sphæricorum* doctrina, quæ circulorum in superficie Sphæræ descriptorum & sese mutuo intersecantium proprietates explicat. Eam olim tribus libris comprehendit THEODOSIUS, quos Tomo primo Cursus Mathematici exhibet DECHALES, ut supra monuimus (§. 4). Eosdem nova methodo illustravit & succincte demonstravit ISAACUS BARROWIUS atque *Londini* 1675, in 4. (plag. 6, Tab. æn. 3) edidit, subjunctos operibus ARCHIMEDIS & APOLLONII. Aliqua hujus doctrinæ etiam attingit PAPPUS libro septimo collectionum mathematicarum, ubi addit, quæ in THEODOSIO desiderantur scitu necessaria.

§. 30. *Geometriam practicam* omnium absolutissimam, sed sine demonstrationibus dedit MALLETUS, quatuor Tomis idiomate Gallico conscriptis comprehensam (*Paris.* 1702, in 8. reg. Tom. I, plag. 23, Tom. II, plag. 26, Tom. III, plag. 24, Tom. IV, plag. 18). In Geodæsia declaratur usus semicirculi, quadrati Geometrici, circini proportionum, Astrolabii, pixidis magneticæ, baculi Jacobi & mensulæ geometricæ. Singula folia Figuris elegantibus, sed ad rem parum facientibus exornantur.

§. 31. Germanico idiomate Geometriam practicam conscripsit DANIEL SCHWENTERUS, Professor olim Mathematum Altorfinus, cum notis JOHANNIS BOECKLERI, *Norimbergæ* 1667, in 4. (4 Alph. 18 plag.) recusam. Praxis in charta cum demonstrationibus docetur: in campo solus baculorum & mensulæ geometricæ usus ostenditur, sterometria desideratur. Unde instar supplementi esse potest JOHANNIS HARTMANNI BEYERI, Med. D. Stereometria, quam sub titulo: *Eine neue und schöne Art der vollkommenen Visir-Kunst*, *Franc. ad Mæn.* 1603, in 4. (1 Alph. 7 plag.) edidit. Autor inprimis Stereometriam

metriam doliorum plenius explicat, quam ab aliis factum. Cum tamen doliorum non plenorum ſtereometriam non attigiſſet; An. 1619, addidit Conometriam Mauritianam vernaculo itidem ſermone conſcriptam. (*Franc.* in 4. plag. 11), in qua ſtereometria doliorum tam plenorum, quam non plenorum traditur. Ceterum idem Autor de virgula pithometrica conficienda ibidem 1620, plagulam unam adjecit.

§. 32. Ante SCHWENTERUM in uſum agrimenſorum BERNHARDUS CANTZLERUS edidit tractatum geodæticum ſub titulo: *Kurtzer und leichter Bericht vom Feldmeſſen*, quem ABDIAS TREW Matheſ. Prof. Altorfinus multis annotationibus auxit, ita ut ſub titulo: *Summa Geometriæ practicæ* An. 1673, *Norimbergæ* in 8. (plag. 33, Tab. æn. 55) edi meruerit.

§. 33. Nomen Autoris commendat ſcholam agrimenſorum, quam PHIL. DE LA HIRE ſub titulo: *l'Ecole des Arpenteurs*, *Pariſ.* Anno 1689, in 8. edidit. Prodiit tertia vice *Pariſ.* An. 1728, in 12. reg. (plag. 16). Explicantur in hoc libello operationes arithmeticæ & trigonometricæ cum principiis Geometriæ, quibus agrimenſores habent opus. Deinde exponuntur praxes Geodætarum & ſubjicitur deſcriptio artis libellandi. Nec minus laudem merentur CLAVII (§. 24), TACQUETI (§. 28), OZANAMI Geometriæ practicæ (§. 7), hujuſque *Méthode facile pour arpenter, ou meſurer toutes ſortes de ſuperficies & pour toiſer exactement la Maçonnerie, les vuidanges des Terres & tous les autres corps, dont on peut avoir beſoin dans la pratique.* Prodiit denuo *Pariſiis* An. 1725., in 12. reg. (plag. 12). Explicantur etiam in hoc libello operationes Arithmeticæ & Trigonometricæ ac principia Geometriæ agrimenſoribus ſcitu neceſſaria. Eundem cum PHILIPPO DE LA HIRE ſcopum ſibi præfixit HENRICUS WILSON in libro Anglico, quem ſub Titulo: *Surveying improved*, *Londini* 1726, in 8. reg. (Alph. 1, Tabb. æn. 11) edidit, in ſuo genere ſatis conſummatum. Solet vulgo inſtitutionibus Architecturæ militaris præmitti Geometria practica.

§. 34. ADRIANUS METIUS 1725, in 4. edidit *Arithmeticæ* libros duos & *Geometriæ* libros ſex. Qui multo auctiores 1650, *Lugduni Batavorum* in 4. recuſi (Alph. 3). Geometria nonniſi practica eſt, perinde ac Arithmetica, ut adeo hic recenſeri mereatur. Tractatur in hiſce libris etiam Trigonometria plana, uſus circini & regulæ proportionalis, Architectura militaris, problemata Aſtronomica, & ſciaterica Horologia, ita ut in hoc opere reperias, quæ titulus non promittere videtur, nec in libris, quæ eundem habent, vulgo quæri ſolent. Nullas tamen addit demonſtrationes. Aliter JOANNES DUSER, Tigurinus, in *Geometria Theorica & practica* patrio idiomate *Tiguri* 1627, in 4. publi-

publicata theoriam cum praxi conjungit, & hanc ex illa deducit. Multa docet, quæ istiusmodi autores non tangunt: de stereometria tamen nihil habet.

§. 35. A. SHARPE, Anglus, idiomate patrio edidit *Geometriam promotam* 1°. per tabulam amplam & accuratam segmentorum circulorum, & 2°. per Tractatum concisum de Polyhedris *Londini* An. 1718, in 4. (plag. 17, Tabb. æn. 4). Tractatus primus sine controversia ad Geometriam practicam spectat, cum computandis segmentis circulorum destinetur, qui calculus ad Geometriam practicam pertinet ac multiplicem in variis problematis huc spectantibus habet usum. Tractatus alter ad stereometriam refertur, cumque Autor in eodem constructionem & dimensionem quinque corporum regularium ac præterea duodecim novorum a Geometris hactenus non expensorum polyhedrorum tradat; hic quoque Tractatus Geometriæ practicæ quædam pars est.

§. 36. BATTY LANGLEY *Londini* 1726, in fol. (Alph. 1, plag. 11, Tabb. æn. 40), Geometriam practicam ad Architecturam civilem, & hortensem, Geodæsiam, & Stereometriam applicatam edidit sermone patrio. Titulus libri est: *Practical Geometry applied to the useful Arts of Building, Surveying, Gardening and Mensuration.* Sed hic liber potiore jure inter Architectonicos locum meretur, quam inter eos, qui de Geometria conscripti sunt, quemadmodum suo loco monebimus.

§. 37. Pithometriam promovere aggressus est JOANNES MATTHIAS HASIUS, Mathematum Professor in Academia Wittebergensi, in *Pithometriæ Theoria & Praxi nova*, *Wittebergæ* 1728, in 4. (plag. 10, Tabb. æn. 2): ubi etiam Algebræ in hoc argumento usum declarat.

§. 38. ERASMUS REINHOLDUS in Geodæsia sua, quæ sub Titulo: *Gründlicher Bericht vom Feldmessen*, *Franc.* 1615, in 4. (1 Alph. 17 plag.) recusa, Geometriam quoque subterraneam explicat: de qua opus peculiare conscripsit NICOLAUS VOIGTEL, decimarum e Mansfeldensibus metallifodinis Receptor, *Islebiæ* An. 1688, in fol. (plag. 32, Tab. 9) excusum & itidem An. 1713, auctius (2 Alph. 10 plag. Tab. æn. 10) recusum, unicum sane in hoc genere, donec An. 1710, LEONHARDUS CHRISTOPHORUS STURMIUS *Francofurti* An. 1710, in 8. Tractatus quatuor idiomate Germanico ederet, inter quos quartus est *Geometriæ subterraneæ Compendium*, primus vero de *descriptione corporum regularium*, secundus de *Circino proportionum*, tertius de *Trigonometria plana* (plag. 6, Tab. æn.), & An. 1727. JOANNES FRIDERICUS WEIDLERUS, Professor Mathematum Wittebergensis, *Institutiones Geometriæ subterraneæ* latinas daret *Wittebergæ* in 4. (plag. 10, Tab. 1).

§. 39. Circinum proportionis a

JUSTO BYRGIO multo ante inventum descripsit LEVINUS HULSIUS Tractatu tertio instrumentorum mechanicorum vernaculo idiomate *Francof. ad Mœnum* An. 1603, edito (plag. 4). Postea An. 1607, GALILÆUS, alienum inventum sibi attribuens, de eodem librum Italicum sub titulo: *Le Operationi del compasso Geometrico e militari* publicavit. Omnium maxime commendari in hoc genere meretur NICOLAI GOLDMANNI de *Circino proportionis Tractatus* (*Lugd. Batav.* 1679, Latine & Germanice in fol. (1 Alph. Tabb. 16) editus, ex quo sua descripsit MICHAEL SCHEFFELT in tractatu Germanico *Unterricht von dem Proportional-Circul*, *Ulmæ* 1697, in 4. (plag. 18, Tab. 12). Prostat quoque Tractatus Gallicus Cl. OZANAMI de *usu circini proportionum* (*Parisiis* 1688, in 8). Recentius ejus constructionem & usum in peculiari Tractatu, qui multa singularia continet, exposuit SAMUEL CUNE. Eum post mortem Autoris EDMUNDUS STONE sub Titulo: *A new Treatise of construction and use of the Sector*, *Londini* An. 1729, in 8. (plag. 15, Tab. æn. 2, & Fig. multis ligno incisis) publici juris fecit.

§. 40. Ad scripta de Geometria practica referendum quoque est CASPARIS SCHOTTI *Pantometrum Kircherianum*, hoc est, instrumentum Geometricum novum ab ATHANASIO KIRCHERO inventum, decem libris universam pæne practicam Geometriam complectentibus explicatum perspicuisque demonstrationibus illustratum. Prodiit *Herbipoli* 1660, in 4. (Alph. 2, plag. 11, Tabb. æn. 32). Liber primus technicus fabricam instrumenti, secundus euthymetricus linearum rectarum dimensiones, tertius enbadometricus dimensionem superficierum, quartus stereometricus dimensiones solidorum, sextus cœlometricus dimensiones concavorum, septimus geodæticus divisiones superficierum, octavus metamorphoticus planorum corporumque transformationem, nonus hydragogicus libellationem aquarum totamque libellationis naturam, decimus tandem varius problematum variorum solutionem docet, quæ ope circini proportionum alias solvi solent.

CAPUT IV.

De Scriptis Analyticis.

§. 1. Scripta veterum analytica recenset PAPPUS in præfatione ad librum septimum *Collectionis mathematicæ*. Sunt nempe *Datorum* EU-

CLIDIS liber unus (§. 1. C. 1.) APOLLONII de *Sectione Rationis* libri duo ab HALLEIO editi, & de *Sectione spatii* libri duo ab eodem restituti (§. 28. c. 3), APOLLONII de *Tactionibus* libri duo, de *Inclinationibus* duo, de *locis planis* duo, *Conicorum* octo, EUCLIDIS *Porismatum* tres, & de *locis ad superficiem* duo, ARISTÆI de *locis solidis* quinque; ERATOSTHENIS de *mediis proportionalibus* duo: quorum aliqui extant (§. 13, Cap. 3), aliqui desiderantur, sed a recentioribus Geometris restituti, (§. 1, Cap. 1, & §. 13, Cap. 3). Sed Analysis veterum ab Analysi recentiorum longe fuit diversa.

§. 2. Ad analysin recentiorum potissimum spectat Algebra, de qua olim exempla tredecim libris comprehensa dedit DIOPHANTUS. Hodie nonnisi 6 prostant, a XYLANDRO latine versi, & An. 1575, in fol. primum editi, postea cum Commentariis CASPARIS BACHETI, An. 1621, recusi. Illustrat autem DIOPHANTUS artem solvendi problemata arithmetica indeterminata. Gallica eorum versio extat inter Opera STEVINI (§. 23, c. 1).

§. 3. Antequam DIOPHANTUS in publicum prostaret, LUCAS PACIOLUS seu (ut vulgo vocatur) LUCAS DE BURGO S. SEPULCHRI in Summa Arithmeticæ & Geometriæ supra laudata (§. 6, cap. 2,) Libris 8 Algebram explicat, prout eam acceperat ab Arabibus. Nimirum ultra æquationes simplices & quadraticas non progreditur. Nec longius progressi CHRISTOPHORUS RUDOLPHUS Jaroviensis Silesius, qui primus de Algebra seu Cossa, prout tunc dicebatur, in lingua Germanica scripsit & cujus librum additis regularum demonstrationibus & exemplis pluribus recudi fecit MICHAEL STIFELIUS *Regiomonti* An. 1553, in 4. (Alph. 5, plag. 11). Titulus libri: *Die Coss CHRISTOFFS RUDOLFFS, mit schönen Exempeln der Coss durch MICHAEL STIFEL gebessert und sehr gemehrt.* STIFELIUS, qui hoc Magistro profecit, in *Arithmetica integra* (§. 7, cap. 2), HENISCHIUS in *Arithmetica perfecta* (§. 10, cap. cit.) aliique. Non ineleganter RUDOLPHUS, eumque secutus STIFELIUS, æquationes algebraicas ex progressionibus geometricis derivant. Sed SCIPIO FERREUS addidit regulas resolvendi æquationes cubicas, a CARDANO in *Arte Magna*, quam vulgo Cossam seu Regulam Algebræ vocant, An. 1545, primum publicatas: Cl. LUDOVICUS FERRARIENSIS ostendit methodum reducendi æquationes biquadraticas, quam An. 1579 Algebræ suæ inseruit RAPHAEL BOMBELLI. Ulteriores progressus Algebra stricte sic dicta nondum vidit.

§. 4. Circa annum Christi 1590, FRANCISCUS VIETA Gallus Arithmeticam litteralem invenit, & ad Algebram applicavit, quam & methodo ingeniosa extrahendi radices ex æquationi-

tionibus quibuscunque per approximationem locupletavit. (§. 25, cap. 1). Ejus inventa explicat, iisdemque utitur GUILIELMUS OUGHTRED, Anglus, in *Clave Mathematica*, An. 1631, primum, sed An, 1693, *Oxonii* quinta vice edita (plag. 12). Regulas ad exempla applicat & usum Arithmeticæ litteralis in Geometria elementari ostendit, quem in inveniendis theorematis & resolvendis problematis habet. Extractionem quoque radicum per approximationem ex æquationibus exemplo VIETÆ docet.

§. 5. THOMAS HARRIOT, itidem Anglus, qui *Londini* An. 1621 obiit, in *Artis Analyticæ Praxi* ad æquationes algebraicas nova, expedita & generali methodo resolvendas, a WALTHERO WARNERO An. 1631, in fol. *Londini* (2 Alph. 2 plag.) edita, Arithmeticam *Vietæam* ad commodiorem formam reduxit, eam nempe, qua nunc utimur, & æquationum indolem ac reductionem plenius explicavit.

§. 6. Anno 1637, CARTESIUS *Geometriam*, quam vocat, idiomate gallico publicavit, quam postea Latine vertit & prolixis Commentariis auxit FRANCIS. A SCHOOTEN. Utor ego editione *Amstelodamensi* An. 1659, in 4. (5 Alph. 8 plag.). Continentur in eadem præter CARTESII Geometriam (plag. 12), FLORIMUNDI DE BEAUNE Notæ breves & FRANCISCI A SCHOOTEN Commentarii in eandem; JOH. HUDDENII *epistola de reductione æquationum*, ejusdem *epistola de maximis & minimis*: ERASMI BARTHOLINI *Principia Matheseos universalis* seu *introductio ad Geometriæ methodum* CARTESII; FLORIMUNDI DE BEAUNE tractatus posthumi *de natura & constitutione atque de limitibus æquationum*; JOH. DE WITT libri duo *de Elementis Curvarum*, & FRANC. A SCHOOTEN tractatus *de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebraico*. CARTESIUS Arithmeticam litteralem & regulas Algebræ descripsit ex HARRIOTO, & quemadmodum OUGHTREDUS in Clave, atque MARINUS GHETALDUS in Libris 5, *de Resolutione & Compositione mathematica* (*Romæ* 1630, in fol. 2 Alph. 15 plag.) Arithmeticam *Vietæam* ad Geometriam elementarem applicarunt & constructiones æquationum simplicium ac quadraticarum dederunt, ita ipse, *Harriotæam* ad Geometriam sublimiorem transferens, curvarum naturam per æquationes algebraicas explicare cœpit & constructionem cubicarum atque biquadraticarum æquationum, immo etiam superiorum, docuit. Opus hoc inprimis utile ad Algebram speciosam addiscendam.

§. 7. CARTESIUS non tyronibus, sed Geometris peritis scripsit, nimis concisa brevitate, ut adeo Commentario maxime opus sit. Quamvis vero de ejus Geometria egregie meritus sit FRANCISCUS A SCHOOTEN, quemadmodum ex iis intelligitur, quæ

quæ modo diximus (§. *6*); nondum tamen ea dedit, quæ in Commentario consummato quæruntur, sed ipse potius Commentatore haud raro opus habet. Dedit tandem istiusmodi Commentarium, qualis desiderari poterat CLAUDIUS RABUEL, e Societate Jesu, qui post fata ejus *Lugduni Gallorum* sub titulo: *Commentaires sur la Geometrie de Mr. Descartes* An. 1730, in 4. reg. prodiit (Alph. 3, plag. *6*, Tabb. æn. 23.) Textum CARTESII, quem presso pede sequitur, ita explanat, atque ita regulis, exemplis, & problematis illustrat, ut nihil occurrat, quod ex Commentario non plene intelligatur. Commentarius hic in linguam Latinam transferri & in nova editione Geometriæ CARTESII Commentatoribus aliis adjungi meretur: sit ita quod solus sufficiat menti tanti Geometræ penitus intelligendæ.

§. 8. Regulam CARTESII construendi æquationes cubicas & biquadraticas uberius exposuit THOMAS BAKER in *Clave geometrica catholica* (*Londini* 1684, in 4. (1 Alph. 10 plag. 10 Tab. æn.): ast verum harum Constructionum fundamentum, quod a MENECHMO didicit CARTESIUS, minime assecutus. Hoc monstravit RENATUS SLUSIUS Tomo secundo *Mesolabi* An. 1668, in 4. (plag. 24) *Leodii* excusi cum variis Miscellaneis, in quibus Algebra ad quadraturas Curvarum, ad quæstiones de maximis & minimis, ad methodum inveniendi punctum flexus contrarii, ad methodum centrobarycam GULDINI &c. applicatur. Cartesiana inventa etiam promoverunt, quemadmodum SLUSIUS in *Miscellaneis*, FERMATIUS in *Operibus mathematicis* (*Tolosæ* 1679, in fol.), ROBERVALLIUS (§. 31, 37, Cap. 1), & BARROWIUS (§. 19, Cap. 3).

§. 9. JOHANNES KERSEY, An. 1671, *Londini* in fol. edidit *Elementa Algebræ*, idiomate Anglico (Alph. 10, plag. 10). In iis explicatur arithmetica litteralis & æquationum natura, præceptaque exemplis plurimis illustrantur, totus DIOPHANTUS enucleatur, & resolutione & compositione mathematica ex GETHALDO multa exhibentur. Idem fere institutum apud Gallos fuit JOH. PRESTET, cujus *Nova Matheseos elementa* Tomo integro secundo auctiora, *Parisiis* An. 1694, in 4. (6 Alph. 3 plag.) gallice prodierunt. In iis omnia dogmata arithmetica una cum problematibus DIOPHANTI atque VIETÆ per analysin recentiorem resolvuntur.

§. 10. Similiter OZANAM in *Elementis* Gallicis *Algebræ* (*Amstelodami* An. 1703, in 8. reg. 1 Alph. 21 plag.) præter calculum litteralem & æquationum doctrinam, artem quoque Diophanteam resolvendi problemata numerica egregie illustrat, in qua inprimis excellit hic Autor. Quanti autem fieri debeat analysis *Diophantea*, vulgo a *Cartesianis* neglecta, docuit illustris LEIBNITIUS in Actis Erudito-

ditorum, An. 1702, pag. 219. Etsi autem Algebra OZANAMI legi mereatur ab iis, qui in Analysi *Diophantea* sese exercere voluerint; tyronibus tamen Algebræ ejus lectio commendanda non est, propterea quod nimis diffusa regularum explicatione nulla regularum applicatione, ad exempla facta, nimis diu detinet lectorem in parte prima, facitque studii hujus in ipso limine desertores, ut taceam ipsum inventorum recentiorum minime gnarum multa brevius tradere potuisse, ita ut & facilius intelligerentur, & sine tædio. Peccat etiam prolixa præceptorum explicatione PRESTETUS: Unde Compendium ejus dedit BERNHARDUS LAMY, quod sub titulo: *Elémens de Mathématique*, (*Paris.* An. 1704, in 12. reg. (1 Alph. 7 plag.) auctius recusum tyronibus ob perspicuitatem commendari meretur. Artificia tamen analyseos *Diophantea* non attingit.

§. 11. Hi tamen autores applicationem Algebræ ad Geometriam insuper habent: quem defectum supplent OZANAM in Tractatu Gallico *de locis Geometricis* (plag. 8, Tab. 12.) & altero *de constructione aquationum* (plag. 12, Tab. 9) Tractatui de lineis primi generis (§. 15, cap. 3) subjuncto; DE LA HIRE in gemino Tractatu ejusdem nominis & argumenti (§. cit. cap. 3) & inprimis GUISNE'E in *Applicatione Algebræ ad Geometriam* gallice *Parisiis* An. 1704, in 4. (1 Alph. 19 plag. Tab. æn. 6) edita & ad captum tyronum composita exemplisque selectis instructa, atque Illustris Marchio DE L'HOSPITAL in egregio Tractatu Analytico *de Sectionibus Conicis & earum usu, Paris.* 1707, in 4. reg. 2 Alph. 12½ plag. Tab. 32, Gall.) Applicatio Algebræ ad Geometriam sublimiorem ex HOSPITALIANO opere omnium optime addiscere licet iis, qui jam in Geometria & Algebra cum fructu versati & acumine pollent. Ceteris magis satisfaciet GUISNE'E, quo lecto faciliores facient in illo progressus.

§. 12. Algebræ quoque præcepta, sed sine exemplis, perspicue explicat GERARD KINCKHUYSEN in *Algebra*, sermone Batavo, *Harlemi* An. 1661, in 4. edita, (plag. 14) & idem in Fundamento Geometriæ (*Grondt der Meetkonst*). *Harlemi* An. 1684, in 4. plag. 12) Sectionum conicarum palmarias proprietates per analysin eruit; in *Geometria* vero (*Harlemi* An. 1663, in 4. plag. 22) constructiones Geometricas problematum per Algebram solutorum elegantes affert. Singula quoque ABRAHAMUS DE GRAAF in *Algebra* sua (§. 7, cap. 1) cum laude exequitur. Unde Dn. DE TSCHIRNHAUSEN ad studium Algebræ plurimum commendavit hosce autores. Celeberrimus NEWTONUS in *Arithmetica universali*, quam GUIL. WHISTON *Cantabrigia* An. 1707, in 8. (1 Alph.) edidit, exempla habet singularia & regulas varias a se inventas.

tas. Recusa sunt hæc Elementa *Londini* An. 1722, in 8. (plag. 22). In nova editione ordo problematum paulisper immutatus, WHISTONI præfatio & methodus *Hallejana* extrahendi radices ex æquationibus per approximationem omissæ. Prodiere etiam in *Batavia*, ut nunc facilius haberi possint. Utilem tyronibus operam sumeret, qui eadem Commentario illustraret. Multa enim occurrunt difficilia, quorum rationes non facile assequi licet etiam exercitatioribus. Desunt etiam constructiones geometricæ problematum, quorum tantummodo dantur solutiones per calculum. Monuit jam GRAVESANDIUS istiusmodi Commentario esse opus & ejus aliquod specimen de inventione divisorum dedit in *Elementis Matheseos universalis*, *Lugduni Batavorum* An. 1727, in 8. editis (plag. 16, Tabb. æn. 4), quæ Algebræ principia continent.

§. 13. JOSEPHUS RAPHSON in *Analysi æquationum universali*, quæ (si titulo credimus) secunda vice *Londini* An. 1702, in 4. prodiit una cum Conamine metaphysico de Spatio reali seu ente infinito (plag. 20.) extractiones radicum ex æquationibus per approximationem facilitavit: ROLLIUS in Tractatu gallico *de Algebra* (*Paris.* 1690, in 4. plag. 12) subsidia non contemnenda ad radicum extractionem suppeditat, sed more suo terminis insuetis utitur, & haud raro nodum in scirpo quærit. Tractatum quoque Gallicum *de Algebra* conscripsit DE CROUZAS, quem *Parisiis* An. 1726, in 8. reg. sub titulo: *Traité de l'Algebre*, edidit (1 Alph. 8 plag.). In eo nonnisi Arithmeticam literalem & regulam Algebram propriissime sic dictam explicat, quemadmodum faciunt PRESTETUS & OZANAMUS, nimium prolixus in vulgaribus, ita ut longo tempore multa patientia addiscenda sint, quorum usum prospicere non licet. Desunt artificia recentiora, quibus calculus præsertim surdorum & extractio radicum mirifice fuit promota. Nec ars exercetur problematis, contra illud SENECÆ: Iter longum per præcepta, breve per exempla.

§. 14. Exemplo PASCALII in *Triangulo Arithmetico*, *Parisiis* Anno 1654, Gallice edito, HUGENII in *Tractatu de Ludo alea*, qui sub finem Exercitationum Geometricarum SCHOOTENII (§. 25) & Operum variorum Vol. 2 (§. 35) legitur, aliorumque, REMUNDUS DE MONMORT in *Tentamine* Gallico *Analyseos de ludis eventus fortuiti*, *Parisiis* An. 1708, in 4. reg. (1 Alph. 14 plag.) excuso & ibidem 1714, auctius (2 Alph. 11 plag.) recuso ad Sortem in ludis diversis determinandam analysin applicavit: qui combinationum doctrinam egregie illustrat & insignia artificia analytica edocet. In altera editione leguntur literæ JOANNIS & NICOLAI BERNOULLIORUM de

 hoc

hoc argumento ad Autorem datæ. Idem præstitit JACOBUS BERNOULLI in Opere posthumo *Artis Conjectandi* (*Basil.* 1713, in 4. Alph. 1, plag. 20, Tab. 1). Accessit huic operi Tractatus de seriebus infinitis, mox commendandus. Inprimis autem hoc in argumento commendari meretur ABRAHAMI DE MOIVRE opus pereruditum & multa nova continens, quod sub titulo: *The doctrine of chances, or a Method of calculating probability of Events in play, Londini* 1718, in 4. reg. (Alph. 1) *.

§. 15. ÆGIDIUS FRANCISCUS DE GOTTIGNES, e Societate Jesu, in *Logistica universali* (*Neap.* An. 1687, in fol. 5 Alph. 14 plag. Tab. 5) principia Algebræ labefactare aggressus est; sed nodum in scirpo quærit & per ambages eo tendit, quo recta pertingere datur. Condonandum hoc videbatur ea ætate, qua Algebræ speciosæ infantia erat: sed si nostra reperiantur, qui in dubitationem adducere volunt, quæ dudum stabilita ipsoque diuturno usu probata fuerunt, vix ferendum. Nostrum igitur non esse existimamus de iis scriptis loqui, quæ hic recenseri poterant.

§. 16. HUGO DE OMERIQUE in *Analysi Geometrica* (*Gadibus* Anno 1698, in 4.) methodo communi algebraica, quæ per æquationes procedit, aliud substituit per rationes argumentandi genus: quod tamen non adeo late patet, quam illa. Applicat illud ad problemata, per Algebram ab aliis jam soluta & parum difficultatis habentia. Non tamen usu suo caret, cum ad demonstrationes syntheticas manu ducat. Monet PEMBERTON in præfatione ad *Conspectum Philosophiæ Newtonianæ*, NEWTONUM laudasse in hoc autore, quod Analysin veterum restituere conatus fuerit.

§. 17. Methodum CAVALLERII ad calculum aptare studuit JOHANNES WALLISIUS in *Arithmetica infinitorum* An. 1655, primum edita (§. 34, cap. 1) in qua, per summationes serierum infinitarum, quadraturas curvarum & cubationes solidorum determinare agressus est: Sed cum inductione uteretur, quæ minus demonstrativa videri poterat, ISM. BULLIALDUS per maximas ambages more veterum Geometrarum hoc Arithmeticæ genus demonstravit in Opere novo *Arithmeticam infinitorum* Libris 6, comprehendente. (*Paris.* An. 1682, in fol. 4 Alph. 16 plag.). Hodie tamen paucis lineis plura præstare licet, quam quæ integro opere BULLIALDI comprehenduntur.

§. 18. Veram viam ingressus non est WALLISIUS, felicius id præstitit Illustris LEIBNITIUS invento calculo differentiali & integrali, quem primum in Actis Eruditorum Anno 1684, pag. 467, publicavit, cum dudum ante An. 1677, eundem in litteris cum celeberrimo NEWTONO com-

* Atque iterum auctius, ibidem An. 1738, in 4. reg. (Alph. 1, plag. 11).

communicasset, qui in egregias methodos circa idem tempus inciderat: quemadmodum apparet ex litteris LEIBNITII atque NEWTONI, quæ leguntur apud WALLISIUM Operum Tomo tertio, fol. 634, 648. Cum enim NEWTONUS in literis d. 24 Octobr. 1676, scriberet: *Inversa de Tangentibus problemata sunt in potestate atque illis difficiliora: ad quæ solvenda usus sum duplici methodo, una concinniori, altera generaliori. Utramque visum est in præsentia litteris transpositis consignare*: 5accdæ10effh &c. Literæ in ordinem suum dispositæ hunc habent sensum: *Una methodus consistit in extractione fluentis quantitatis ex æquatione simul involvente fluxionem ejus: altera tantum in assumtione seriei pro quantitate qualibet incognita, ex qua cetera commode derivari possunt, & in collatione terminorum homologorum æquationis resultantis ad inveniendos terminos assumta Seriei:* mox LEIBNITIUS ipsum Calculum suum differentialem in literis d. 21 Jun. 1677, apertis verbis perscripsit. Ingenue hoc ipsum fatetur NEWTONUS in prima & secunda editione Principiorum Philosophiæ naturalis Mathematicorum Schol. Lemmat. 2, Lib. 2, pag. 253, 254. In ultima vero ingenuam confessionem, quæ viros summos maxime decet, omisit. Ratio patebit inferius. LEIBNITIUS calculum suum publici juris fecit in Actis Eruditorum An. 1684, pag. 467, & NEWTONUS methodum suam in prima editione Principiorum modo laudatorum, quæ An. 1687, prodiit. Postea JACOBI ac inprimis JOANNIS BERNOULLI opera, calculus LEIBNITII ad majorem perfectionem perductus.

§. 19. Calculi differentialis leges exposuit & problematibus exquisitis illustravit illustris Marchio DE L'HOSPITAL, Præceptore usus JOANNE BERNOULLI, in egregio Opere Gallico *Analyseos infinite parvorum* (*Paris.* 1696, in 4. reg. 1, Alph. 2, plag. Tab. 11), omnibus Geometriæ sublimioris Studiosis maximopere commendando. Subinde tamen Commentatore opus habet, ut a tyronibus Geometriæ sublimioris intelligatur. Equidem DE CROUZAS *Commentarium* edidit, qui idiomate Gallico *Parisiis* An. 1721, in 4. (2 Alph. $1\frac{1}{2}$ plag. 4 Tab.); sed plerumque nonnisi calculos, quos Autor contraxit, extendit, in difficilioribus vero lectorem destituit. Unde magis satisfaciet VARIGNONIUS in suis dilucidationibus, quæ sub titulo: *Eclaircissemens sur l'Analyse des infiniment petits*, post fata ipsius *Parisiis* An. 1725, in 4, (plag. 16, Tabb. 6) prodierunt. Opus egregium HOSPITALII Anglice vertit & altera parte de calculo integrali auxit E. STONE, ac sub titulo: *A Method of fluxions both direct and inverse*, *Londini* 1730, in 8. reg. (1 Alph. 6 plag. Tabb. 15) edidit.

§. 20. Equidem HOSPITALIUS addere constituerat partem alteram de calculo integrali; sed cum LEIB-

NITIUS Scientiam infiniti dare sibi proposuisset, a proposito suo destitit. Enimvero præter specimina in Actis Eruditorum An. 1702, & An. 1703, nihil ejus publice comparuit. Interea calculi integralis faciliores regulas dare & exemplis illustrare consultum existimabat CARRE', cujus scriptum gallicum: *Méthode pour la mesure des surfaces, la dimension des solides, leurs centres de pesanteur, de percussion & d'oscillation par l'application du calcul integral* prodiit *Paris.* An. 1700, in 4. reg. (plag. 15, Tabb. 4). Sed longius progressus GABRIEL MANFREDIUS in Opere eximio *de constructione aquationum differentialium primi gradus* (*Bononiæ* An. 1707, in 4. 1 Alph. 2 plag. Tabb. 7) & vir summus NEWTONUS in Tractatu *de quadraturis Curvarum*, qui Opticæ subjungitur, præclara dedit. Plura quoque in parte altera dedit STONE de hoc calculo, quam quæ in Methodo Dn. CARRÉ' leguntur.

§. 21. Postquam NICOLAUS MERCATOR, Holsatus, in *Logarithmotechnia* (*Lond.* 1668, in 4. cum MICHAELIS ANGELI RICCII *Exercitatione Geometrica* edita) prop. 17, pag. 31, seqq. quadraturam hyperbolæ per seriem infinitam dedisset; serierum doctrinam per extractionem radicum insigniter promovit & ad curvarum quadraturas & rectificationes applicavit vir summus ISAACUS NEWTONUS: cujus *Analysin per quantitatum series, fluxiones ac differentias*, cum *Enumeratione linearum tertii ordinis*, varios tractatus analyticos a Viro celeberrimo diu ante compositos continentem, *Londini* 1711, in 4. (plag. 16, Tabb. 2) edidit GUIL. JONES. Quemadmodum vero hoc opus ad serierum doctrinam perdiscendam multum commendari meretur; ita recondita de hoc argumento superaddi debent ex celeberrimi JAC. BERNOULLI dissertationibus *de seriebus infinitis* (§. 14).

§. 22. Serierum doctrinam ex inventis MERCATORIS, NEWTONI, LEIBNITII atque JOHANNIS BERNOULLI exhibuit quoque GEORGIUS CHEYNÆUS in *Methodo Fluxionum inversa* (*Londini* 1703, in 4. reg. plag. 6). Multo vero ante methodum serierum MERCATORIS & NEWTONI multis exemplis illustravit DAVID GREGORIUS in *Exercitatione Geometrica de dimensione figurarum*, *Edinburgi* An. 1684, in 4. edita (plag. 7, Tabb. 1). Horum exempla complura computata sunt a patruo ipsius JACOBO GREGORIO, quemadmodum ipse fatetur pag. 2, 3, & 4. De Geometria enim sub'miore optime meritus JACOBUS GREGORIUS, quemadmodum ex ejus Libro *de vera Circuli & Hyperbolæ Quadratura*, cum *Geometriæ parte universali*, quantitatum curvarum transmutationi inserviente colligitur. Prodiit *Patavia* 1668, in 4. Tractatus de Quadratura constans plag. 8, Appendix de Geometriæ parte universali plag. 19. Ceterum

terum hinc perſpicere licet, quid ab eo expectandum fuiſſet, niſi fata propoſitum ejus intervertiſſent.

§. 23. JOAN. CRAIGE, Scotus, 1685, *Londini* in 4. (plag. 6, Tab. I) edidit Tractatum *de Methodo figurarum lineis rectis & curvis comprehenſarum Quadraturas determinandi*, & An. 1693. addidit Tractatum *de figurarum curvilinearum Quadraturis & Locis Geometricis*, *Londini* in 4. (plag. 11, Tab. I) excuſum. Utitur equidem calculo differentiali LEIBNITII, cum in Anglia calculus fluxionum adhuc ignoraretur, nec editis An. 1687, Principiis Philoſophiæ naruralis mathematicis NEWTONI, ullus Geometra de eodem cogitaret; per ambages tamen adhuc incedit, quod calculus integralis ſeu ſummatorius nondum ipſi eſſet perſpectus. In quadrandis igitur curvis utitur Theorematis BARROWIANIS, quibus opus non habemus, ſi calculi differentialis vis fuerit perſpecta, cujus pars quædam eſt ſummatorius ſeu integralis, qui dicitur. Inde eſt, quod etiam GREGORIUS alia via incedat, etſi ſeriebus infinitis utatur. De Locis Geometricis formulas generales tradit CRAIGIUS, quas HOSPITALIUS in opere analytico de ſectionibus conicis (§. 10) uberius explicavit & illuſtravit, & nos in Elementis Algebræ dilucidatas ad facillimam intelligentiam reduximus, via ad ulteriora planiſſima ſtrata. Enimvero ubi calculus integralis, quem Angli methodum fluxionum inverſam vocant, in Anglia quoque invaluiſſet; idem CRAIGIUS *Londini* An. 1718, in 4. (plag. $12\frac{1}{2}$). Libros duos *de Calculo fluentium* & totidem *de Optica analytica* edidit, quorum iſtis doctrinam de Quadraturis Curvarum promovet.

§. 24. Quæ apud HOSPITALIUM in Analyſi infinite parvorum, CARRESIUM, ſive Quadratum, CHEYNÆUM, GREGORIUM & CRAIGIUM in Methodo figurarum lineis rectis & curvis comprehenſarum Quadraturas determinandi & in Tractatu de Quadraturis figurarum Curvilinearum occurrunt; ea in unum volumen congeſſit & perſpicue explicavit, varia etiam problemata, quorum ſolutiones in Actis Eruditorum Lipſienſibus extant, inprimis quæ in iiſdem LEIBNITIUS de motuum cœleſtium cauſis phyſicis dedit, illuſtravit CAROLUS HAYES in opere Anglico, quod ſub titulo: *Traitiſe of Fluxions, or introduction to mathematical and mechanical Philoſophy*, *Londini* An. 1704. in fol. (3. Alph. 3 plag.) prodiit.

§. 25. Regulas Algebræ communis atque Analyſeos LEIBNITIANÆ, hoc eſt, calculi differentialis & ſummatorii, uno opere complexus eſt CAROLUS REYNAU, quod ſub titulo: *Analyſe demontrée*, *Pariſ.* 1708, in 4. reg. (Alph. 5, plag. 7, Tabb. æn. 5): ſed in exemplis parcior videri poterat, quam ut tyronibus inſervire poſſit, provectioribus tamen commendandus. Neque etiam ea præſtitiſſe vide-

videtur, quæ titulus promittit, cum eas demonstrationes in hoc Opere non reperias, quæ forsan in eodem quæsiveris, demonstrationis notionem distinctam animo complexus.

§. 26. Calculus fluxionum, qui cum differentiali & summatorio idem est, in Anglia primum comparuit, cum ISAACUS NEWTONUS Opticam suam ederet An. 1704, de qua suo loco dicemus. Addidit enim præter *Enumerationem Linearum tertii Ordinis seu curvarum secundi generis* Tractatum *de Quadratura curvarum*, in quo hanc doctrinam plurimum promovit, & calculum hunc explicat eademque utitur. Ex intervallo GUILIELMUS JONES *Londini* An. 1711, in 4. plag. 16, Tab. 2, edidit NEWTONI *Analysin per quantitatum series, fluxiones ac differentias* cum *Enumeratione linearum tertii ordinis*, ex quo apparet, quid NEWTONUS in Geometria sublimiori per analysin promota præstiterit, & quantum serierum doctrinam promoverit. Cum vero in tractatu de Enumeratione linearum tertii ordinis demonstrationes desiderarentur; hunc defectum supplevit JACOBUS STIRLING in Illustratione Tractatus D. NEWTONI *de Enumeratione linearum tertii Ordinis*, quæ *Oxoniæ* An. 1717, in 8. (plag. $9\frac{1}{2}$) lucem adspexit & multa præclara continet.

§. 27. Haud ita pridem, nimirum An. 1736, JOHANNES COLSON Methodum fluxionum & infinitarum serierum NEWTONI in sermonem Anglicum translatam edidit *Londini* in 4. sub titulo: *The Method of fluxions and infinite series, With its application to the Geometry of curve-lines.* (Alph. 2) *. Tractatus hic idem est, quem publico An. 1728, in præfatione ad Conspectum Philosophiæ *Newtonianæ* promiserat PEMBERTON. Egregio Commentario librum hunc illustravit Editor, qui maximam operis partem complet & multa offert, quæ Analyseos cultores alibi frustra quærunt. Ipse NEWTONUS docet, quomodo æquationes in series infinitas resolvantur, quomodo fluentium fluxiones seu quantitatum variabilium differentialia & ex fluxionibus fluentes seu differentialium summæ inveniantur, & per methodum fluxionum maxima & minima, tangentes, quadraturæ & rectificationes curvarum determinentur. Ubi simul ostenditur, quomodo curvæ quadrabiles detegantur, curvæ cum sectionibus conicis comparabiles investigentur, curvæ rectificabiles inveniantur & quæ sunt alia hujus generis.

§. 28. Anno 1730, JACOBUS STIRLING *Londini* in 4. charta augusta (Alph. 1, plag. 15) edidit *Methodum differentialem* sive Tractatum *de Summatione & interpolatione serierum infinitarum*. In eo potissimum docet,

* Eundem NEWTONI Tractatum Gallice versum dedit nuperrime Celeb. DE BUFFON. *Paris* in 4. (Alph. 1) cum eleganti Præfatione.

docet, quibus artificiis assequamur valores illarum serierum, quæ summari nequeunt, ut habeatur solutio illorum problematum, quæ ex quadraturis pendent. Non modo inventa aliorum exponit, verum etiam propriis hanc doctrinam plurimum promovit, ut adeo opus insigne sublimioris Matheseos studiosis summopere sit commendandum.

§. 29. Commendanda hic quoque sunt ABRAHAMI DE MOIVRE *Miscellanea analytica de seriebus & quadraturis*, quæ eodem Anno *Londini* in 4. reg. (Alph. 1., plag. 9) prodiere. Accessere variæ considerationes de Methodis comparationum, combinationum & differentiarum, solutiones difficiliorum aliquot problematum ad sortem spectantium, itemque constructiones faciles orbium Planetarum, una cum determinatione maximarum & minimarum mutationum, quæ in motibus corporum cœlestium occurrunt. Multa in hisce Miscellaneis occurrunt, quibus non modo serierum doctrina, verum etiam mensura sortis & alia ad Mathesin sublimiorem spectantia capita promoventur.

§. 30. Quæ NEWTONUS in Tractatu de Quadraturis curvarum desiderat, alia methodo investigare docuit ROGERUS COTESIUS, Professor Astronomiæ & Experimentalis Philosophiæ apud Cantabrigienses, in *Harmonia Mensurarum, sive Analysi & Synthesi per rationum & angulorum mensuras promota*, quam cum aliis ejusdem opusculis mathematicis ejus successor ROBERTUS SMITH *Cantabrigiæ* An. 1722, in 4. (plag. 50, Tab. I) post mortem ejus præmaturam edidit. Potissimum ipsi propositam est dare *Logometriam*, quam vocat, qua scilicet per Logarithmos, sinus, atque tangentes investigantur, quæ hactenus ad Quadraturam circuli & hyperbolæ fuerunt reducta, differentialium summatione ad mensuras rationum & angulorum reducta. In operibus miscellaneis *Æstimatio errorum in mixta Mathesi* per variationes partium Trianguli plani & sphærici, qualia theoremata dedimus in Trigonometria plana, Tractatus *de Methodo differentiali Newtoniana*, quem multo ante ab eo conscriptum dicit Autor, quam a JONESIO, NEWTONI de eodem argumento Tractatus in Analysi superius commendata (§. 2) ederetur, *Canonotechnia* sive constructio Tabularum per differentias, & Tractatus *de Descensu gravium, de motu pendulorum in Cycloide & de Motu projectorum.* Quomodo inventa *Cotesiana* ex *Newtonianis* deducantur, docet Anonymus * in *Epistola ad Amicum de* COTESII *inventis, Londini*, eodem adhuc Anno in 4. edita (plag. 13).

§. 31. LEIBNITIUS calculum differentialem & summatorium primum exercuerat in quantitatibus finitis, veluti in summandis potentiis numerorum, & deinde lecto opere *Hugeniano* de horologia oscillatorio & ope-

* Dr. HENRICUS PEMBERTON.

re Conico GREGORII A S. VINCENTIO ad quantitates infinite parvas applicavit, atque sic via vere analytica in calculum differentialem & summatorium seu integralem incidit, quali hodie in Geometria sublimiori utimur. In Anglia eundem calculum, seu methodum fluxionum stylo Anglicano, ad quantitates finitas applicavit BROOK TAYLOR in *Methodo incrementorum directa & inversa*, quæ *Londini* 1715, in 4. (plag. $15\frac{1}{2}$) prodiit. De obscuritate, qua in scribendo usus Autor, publice conquestus est JOANNES BERNOULLI, ut adeo mirari desinant lectores in sublimioribus nondum satis versati, siquidem hinc inde hæsitent. Continentur tamen in hoc opere lectu digna.

§. 32. Integram Mathesin puram, una cum Algebra & calculo differentiali, succincte explicavit WILHELMUS JONES in *Synopsi palmariorum Matheseos*, Anglice An. 1706, *Londini* in 8. (plag. 20) edita; sed sine interprete a tyronibus vix intelligetur, qui tamen hoc duce commode utuntur in repetendis iis, quæ ex aliis Autoribus didicere. In iis, quæ ad Algebram communem spectant, cum hac Synopsi convenit Tractatus *de Algebra* itidem Anglice scriptus & *Londini* 1717, in 8. reg. editus (plag. 15) a RONAYNIO: recentior enim analysis in eo desideratur, & methodus Tangentium atque de maximis & minimis per methodum exhaustionum illustratur.

§. 33. Equidem BERNHARDUS NIEUWENTYT in *Considerationibus circa Analyseos ad quantitates infinite parvas applicatæ principia & calculi differentialis usum in resolvendis problematibus Geometricis* (*Amstel.* 1694, in 8. plag. 3) & in *Considerationibus secundis circa calculi differentialis principia* (*Amstel.* An. 1696, in 8. plag. 3) contra calculum differentialem nonnulla dubia movit, & hinc in *Analysi Infinitorum* (*Amstelod.* A. 1695, in 8. plag. 20, Tab. 21) methodum aliam substituit; sed non modo LEIBNITIUS atque BERNOULLIUS in Actis Eruditorum An. 1695, p. 310, & seqq. it. p. 369, & seqq. & An. 1697, p. 125 & seqq., verum etiam etiam Cl. JACOBUS HERMANNUS, nunc * Mathematum Professor Francofurtanus, in *Responsione ad illas considerationes secundas*, *Basileæ*, Anno 1700, in 8. (plag. 4) iisdem abunde satisfecerunt; quamvis memini, quod hic LEIBNITIO non ex asse satisfecerit, quod quantitates infinite parvas tanquam entia realia consideret, cum tamen non sint nisi modus loquendi, qui exhibet, stylo *Jungiano*, toleranter vera, quemadmodum clarissime docui in Ontologia, in qua realia ab imaginariis ubivis discrevi. Analysi tamen infinitorum *Nieuwentytiana* in rem suam uti norunt intelligentes. BERNHARDUS DE FONTENELLE,

* Anno scil. 1725, quo primum hæc Commentatio edita est. Vide infra, Cap. VI. §. 17.

TENELLE, Academiæ Regiæ Scientiarum, quæ Parisiis floret, Secretarius, idiomate patrio An. 1727, *Parisiis* in 4. reg. (Alph. 3, plag. 3, Tab. I) edidit Elementa Geometriæ infinitorum (*Elémens de la Géométrie des infinis*), in quo potissimum sibi propositum habet, ut calculos hodie receptos ex ipsa notione infiniti deducat. Considerat vero, quemadmodum omnibus fere Mathematicis solenne est, infinite magnum & infinite parvum Mathematicorum per modum entis realis. Satisfacere intendit theoria sua iis, quibus Analysis infinitorum moderna suspecta videtur, ut adeo hic loci commemorari debuerit hoc opus.

§. 34. In Actis Philosophicis Anglicanis pro mensibus Septembri & Octobri Anno 1708, editis scripserat JOHANNES KEILL, inventorem Arithmeticæ fluxionum, sine omni dubio primum esse NEWTONUM, eandem tamen postea, mutatis nomine & notationis modo, editam esse a LEIBNITIO in Actis Eruditorum. LEIBNITIUS, cui hæc Acta miserat Cl. SLOANE, tum Societatis Regalis Secretarius, in literis d. 4 Martii An. 1711 datis, de injuria sibi illata conquestus desiderabat, ut KEILLIUS publice testaretur, non fuisse sibi animum LEIBNITIO imputandi, quasi alienum inventum sibi attribuerit. Enimvero KEILLIUS in epistola ad eundem SLOANIUM data, quæ primum scripserat defendit & ostendere conatur, quomodo ex *Newtonianis* sua deduxerit. Cum candorem suum jam apertius, quam ante oppugnari existimaret LEIBNITIUS, sibique parum convenire arbitraretur, ut provectiori ætate post tot documenta vitæ cum apologia defenderet; in literis ad SLOANIUM d. 29 Decembris An. 1711 datis, æquitati Societatis committebat, annon coërcendæ sint vanæ & injustæ vociferationes, quas ipsi NEWTONO improbari putabat confisus eundem sententiæ suæ libenter daturum indicia. Jussit Societas monumenta antiquiora consuli & Sociis aliquot in mandatis dedit, ut in eam rem inquirerent & quæ in scriptis antiquis invenirent ad eam, una cum sententia sua, referrent. Hi pronunciarunt, NEWTONUM esse primum inventorem, nec KEILLIUM inventum eidem vindicantem injuriam fecisse LEIBNITIO. Jussu adeo Societatis Regiæ in lucem editum est *Londini* 1712, in 4. (plag. $15\frac{1}{2}$) *Commercium Epistolicum* D. JOHANNIS COLLINS *&* *aliorum de Analysi promota*, & per Europam inter Mathematicos distributum. Continentur in eo excerpta ex literis, quorum autographa conservat illustris Societas Regalis, una cum Epistolis NEWTONI atque LEIBNITII, quæ jam apud WALLISIUM Tomo tertio Operum leguntur, Tractatus de Analysi per æquationes numero terminorum infinitas a JONESIO editus (§. 26), episto-

læ LEIBNITII ad HANS SLOANE & KEILLII responsiones ad easdem, de quibus modo diximus, & Relatio ac sententia Commissariorum, quam modo retulimus.

§. 35. LEIBNITIUS tunc temporis Viennæ in Austria degebat, nec Commercium epistolicum ibidem videre ipsi contingebat. Cum igitur ex ipso per litteras quærerem, num idem in Actis Eruditorum recensferi & quædam ad ipsum reponi consultum judicaret; consultius ipsi videbatur, ut charta quadam volante, suppresso loci ac Autoris nomine, publico significaretur, ipsum esse Viennæ nec Commercium epistolicum vidisse, atque ex litteris JOANNIS BERNOULLI excerptum publicaretur, quo rationes continebantur, cur inventum calculi differentialis ipsi dubium reddi minime possit. Inde ansam arripiebat KEILLIUS, cum in Transactionibus Anglicanis, tum in Diario literario quod Hagæ Comitum prodibat, paulo durius de LEIBNITIO atque BERNOULLIO scribendi. Quamobrem cum LEIBNITIO limites modestiæ transgredi videretur, a se impetrare non potuit, ut ipse responderet. Scripsit tamen sententiam suam ad amicos, ad quas ejus literas NEWTONUS quoque respondit, tumque apparuit, quæ a KEILLIO dicta fuerant, consentiente & approbante NEWTONO prolata fuisse. Epistolas hasce LEIBNITII atque NEWTONI idiomate Anglico cum excerptis nonnullis aliis *Historiæ fluxionum* suæ latine conscriptæ adjecit JOSEPHUS RAPHSON, in qua originem & progressum hujus methodi brevissimo compendio exhibere intendit. Prodiit *Londini* 1715, in 4. (plag. 16). Quid sibi proposuerit Autor, ipse in præfatione monet, scilicet inventiones præcipuas in hoc genere primis suis autoribus speciatim asserere & vindicare, & inprimis D. NEWTONO inventori longe & tempore primo, & præstantia inventionum præcellentissimo, & aditum patefacere tyronibus ad hæcce facilius & explicatius, adeoque ut cuivis introductionis loco ad *Newtoniana*, *Cheynaana* aliorumque inventa & congesta in hoc genere inserviret. Si quis historiam Analyseos infinitesimalis conscribere vellet, ut origo & progressus pateret, ac unicuique quod suum est tribueretur; illi multo majore studio ac solertia inquirendum esset in ea, quæ a tempore CAVALLERII usque ad præsens a Geometris fuere edita, & accurate determinandum, quantum unusquisque ex inventis alterius sibi notis vel proficere potuerit, vel actu profecerit: ubi certa a probabilibus exacte distinguenda. Sed alibi in Logica de historia scientiarum & artium mentem nostram aperuimus & uberius explicavimus.

§. 36. Controversia hæc de inventore calculi differentialis postea magna animorum contentione agitata,

ta, præsertim inter KEILLIUM & JOANNEM BERNOULLIUM, de qua inprimis legi possunt Acta Eruditorum Lipsiensia. Nostrum jam non est eam definire, cum discussioni hic non sit locus, sine qua definiri nequit, nec hoc nobis sumimus. Neque opus est ex Actis laudatis huc transcribere, quæ ibidem legi possunt. Nos veneramur merita NEWTONI, veneramur merita LEIBNITII, BERNOULLII, aliorumque; æquum existimamus, ut suum cuique tribuatur, & gloria, quæ dat vires præclara agendi, excitentur magna ingenia; in aliorum merita extollenda proni sumus: principiis tamen Philosophiæ moralis adversum judicamus de laude altercari, nec ulla nos autoritas movebit, ut altercationibus istiusmodi calculum adjiciamus.

§. 37. Antequam igitur recensioni præsenti Autorum colophonem imponamus, monemus curvarum descriptionem plurimum promovisse COLINUM MAC LAURIN, Matheseos in collegio novo Abredonensi Professorem, & GULIELMUM BRAIKENRIDGE, Ecclesiæ Anglicanæ Presbyterum. Edidit ille *Londini* An. 1720, in 4. (plag. 19, Tabb. 12) *Geometriam organicam*, sive *Descriptionem Linearum curvarum universalem*. Docet in eadem, quomodo lineæ secundi, tertii, quarti tandemque ordinis cujuscunque describantur, & ubi ostendit, quomodo lineæ omnium ordinum altiorum ope linearum ordinis cujuscunque inferioris describantur, simul descriptionem Curvarum organicam *Newtonianam* demonstrat. Plurima hic reperies ad Geometriam sublimiorem spectantia. Alter horum autorum, *Londini* 1733, in 4. in publicam lucem emisit *Exercitationem Geometricam de Descriptione Linearum Curvarum* (plag. 10). Tradit primum descriptionem curvarum primi generis, seu linearum secundi ordinis, deinde vero descriptionem Linearum cujuscunque ordinis ope Linearum ordinis inferioris & denique descriptionem sectionum conicarum ope plurium rectarum circa polos moventium. Diversa tamen sunt ejus theoremata ab illis, quæ tradit prior, & plura hisce etiam majora promittit in una aut altera exercitatione post paucos menses edenda: Nobis tamen huc usque, præter eam quam hic commemoramus, nullam videre licuit. Utiles sunt descriptiones curvarum generales ad Theoriam Curvarum condendam, qualem adhuc desiderari supra (§. 19, c. 3) monuimus. Quid enim tribuendum sit definitionibus geneticis, vel ex *Synopsi Geometrica* HONORATI FABRY, e Societate Jesu, intelligitur, quæ *Lugduni Gallorum* in gratiam tyronum edita An. 1669, in 12. (Alph. 1. cum figuris multis in folio excusis), & cui accessere tria opuscula, nimirum de *Linea Sinuum & Cycloide*, *de maximis & minimis centuria & Synopsis Trigonometriæ*

plana. Absit tamen, ut cum Autoribus Anglis, quorum Tractatus hic commendavimus, æquipares BARTHOLOMÆI INTIERI, Florentini, *ad nova arcana Geometrica detegenda aditum*, qui *Beneventi* 1703, in 4. (plag. 13, Tabb. 2) & APOLLONIUM ac SERENUM *Promotum*, qui *Neapoli* 1704, in 4. (plag. 9, Tab. 1) lucem adspexit, ubi sectionum conicarum graduum superiorum genesin tradit. A tyronibus tamen ea legi non inconsultum est, antequam ad subliminiora Anglorum inventa pedem promoveant.

§. 38. Cœterum multa ad calculum differentialem & integralem spectantia peti debent ex Actis Eruditorum, ex Historia & Commentariis Academiæ Regiæ Scientiarum, qui quotannis *Parisiis* prodeunt & *Amstelodami* recuduntur, ex Transactionibus Anglicanis, ex Miscellaneis Berolinensibus, & Commentariis Petropolitanis, de quibus singulis supra diximus (§. 36, & seqq. cap. 1). Inter Algebraistas inprimis quoque nominari debebant JOHAN. FAULHABERUS ex textore Mathematicus insignis, cum quo per aliquod tempus egit CARTESIUS, cum Algebræ vacaret, & JUSTUS BYRGIUS WILHELMI Hassiæ Landgravii Mechanicus, sed illius scripta perpauca, hujus nulla videre hactenus licuit.

§. 39. Coronidis loco adhuc observamus, in gratiam tyronum idiomate Anglico Institutiones fluxionum edidisse HUMPHREDUM DITTON, in quibus præcepta calculi explicat & exemplis quibusdam selectis illustrat, cum istiusmodi libellus adhuc desideraretur. Post obitum Autoris novam editionem dedit JOHANNES CLARKE, Regi à sacris ordinariis, quæ sub titulo: *An Institution of fluxions*, *Londini* An. 1726, in 8. reg. (plag. 16) prodiit. In eorundem usum L. TREVIGAR *Sectionum conicarum Elementa* methodo facillima demonstrata edidit *Cantabrigiæ* An. 1731, in 4. reg. (Alph. 1, plag. 1, Tabb. æn. 12). In compendium misit Tractatum analyticum de sectionibus conicis HOSPITALII, in quo methodus genetica cum analytica conjungitur, ut in Geometria & Algebra vel mediocriter versatus præcipuas sectionum conicarum proprietates addiscere possit. Addidit nonnulla, quæ in HOSPITALIO desiderantur, sed ad Principia Philosophiæ naturalis mathematica intelligenda requiruntur. In Italia vero FRANCISCUS XAVERIUS BRUNETTI, Sacrario Pontificis Maximi CLEMENTIS XII Præfectus, sub titulo: *Dell' Aritmetica commune e speciosa Trattato*, seu Tractatus de Arithmetica communi & speciosa, *Romæ* A. 1731, in 4. (Alph. 1, plag. 11, Tab. 2) Introductionem edidit ad scripta arithmetica & analytica intelligenda, in quo præter Arithmeticam, Algebram quoque & Analysin infinitesimalem recentiorem perspicue explicat, ut adeo plura in hoc opere reperiantur, quam titulus promittit.

CAPUT V.

De Trigonometria.

§. 1. TRigonometria in gratiam Astronomiæ primum inventa: unde PTOLEMÆUS sub initium operis sui Astronomici tantum hujus doctrinæ exponit, quantum scopo suo sufficere visum est, & recentiores Astronomi passim institutionibus Astronomicis Trigonometriæ præcepta præmiserunt.

§. 2. Magis hanc scientiam excoluit JOHANNES DE REGIO MONTE in Libris quinque *de Triangulis omnimodis*, An. 1464, conscriptis, & *Norimbergæ*, mortuo Autore, a SCHONERO An. 1533, in fol. (2 Alph. 11 plag.) editis. Idem quoque Canonem Sinuum novum condidit assumto radio pro unitate, eoque in fractiones decimales diviso, cum ante idem in 60 scrupula divideretur. Immo ipse primum radium sumebat 60 & nonnisi in fractiones decimales subdividebat: sed cum animadverteret præstare in calculo, si sinus totus sit 1, canonem suum reformavit, aut novum potius condidit. Canon Sinuum ad radium 60000 constructus subjungitur ejusdem Tabulis Directionum Profectionumque, de quibus in Astronomia dicemus. Eum in plerisque sequitur CLAVIUS (§. 24, c. 1).

§. 3. *Canonem Sinuum* ad radium 1000000000000000 & ad dena quæque scrupula secunda Quadrantis supputavit JOACHIMUS RHETICUS, quem, mortuo Autore, una cum Sinibus primi & postremi gradus ad eundem radium & ad singula secunda scrupula Quadrantis edidit BARTHOLOMÆUS PITISCUS *Francof. ad Mœnum* 1613, in fol. (3 Alph. 21 plag.), qui adjecit principia Sinuum ad radium 1000000000000000000000 supputata & sinus decimorum, tricesimorum & quinquagesimorum quorumque scrupulorum secundorum per prima & postrema 35 scrupula prima ad radium 1000000000000000000000. Hujus Canonis usus inprimis est in corrigendis Tabulis Sinuum atque Tangentium vulgaribus.

§. 4. Multum nimirum Trigonometriæ perficiendæ incubuit RHETICUS, Mathematum Professor Wittebergensis, sed qui relicta Professione ad COPERNICUM profectus & apud eum egit: quemadmodum ex *Opere Palatino de Triangulis* apparet, quod ab ipso cœptum consummavit. L. VALENTINUS OTHO, Principis Palatini Friderici IV Electoris Mathe-

Mathematicus. Prodiit An. 1616, in fol. (21 Alph. 17 plag.). Continentur in eo 1. RHETICI libri tres de fabrica Canonis doctrinæ triangulorum, & 2. ejusdem liber quartus de triangulis globi: 3. OTHONIS libri quinque de triangulis globi sine angulo recto: 4. prolixus Canon triangulorum.

§. 5. PITISCUS vero & ipse *Trigonometriam* egregie illustravit editis quinque de eadem libris An. 1599, quorum editio tertia auctior prodiit *Francof.* An. 1612, in 4. (2 Alph. 15 plag.). Libris istis subjicitur Canon Sinuum, tangentium & secantium una cum libris undecim, in quibus trigonometriæ usus in solutione problematum Geodæticorum, altimetricorum, architectonicorum, geographicorum, gnomonicorum & astronomicorum ostenditur, quæ a nobis suis in locis per eandem soluta.

§. 6. Non minus commendari merentur WILLEBRORDI SNELLII *doctrinæ Triangulorum Canonicæ* libri quatuor, quibus Canonis sinuum, tangentium & secantium constructio, triangulorum tam planorum, quam sphæricorum expedita dimensio breviter ac perspicue traditur, una cum Canone Secantium. Post mortem Autoris eos edidit MARTINUS HORTENSIUS, Delfensis (*Lugd. Bat.* 1627, in 8. plag. 29) & tractatus problematum geodæticorum & sphæricorum adjecit, quibus utriusque Trigonometriæ usus edocetur.

§. 7. An. 1591, PHILIPPUS LANSBERGIUS edidit *Geometriam Triangulorum*, quæ Anno 1663, *Middelburgi in Seelandia* in fol. (plag. 11) auctius recusa & primum inter opera ejus locum tenet (§. 26, c. 1). In eo Trigonometriam tam planam, quam sphæricam, & constructionem sinuum atque tangentium perspicue explicat, quemadmodum jam fecerat GEORGIUS PURBACHIUS, Præceptor REGIOMONTANI, Professor Matheseos in Academia Viennensi, qui in promovendo Matheseos studio plurimum operæ collocavit, & de cujus meritis plura dicemus in Astronomia.

§. 8. Insignis ad Trigonometriam accessio facta est, Logarithmis a JOHANNE NEPERO, Barone Merchistonii Scoto, in eandem introductis. Prodiit *Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio ejusque usus in utraque Trigonometria & omni Logistica mathematica explicatio*, *Edinburgi* 1614, in 4. (plag. 21) & opera filii, parente mortuo, recusum est opus auctius An. 1619. Accessere nempe tractatus aliqui de logarithmorum constructione posthumi. In eodem opere continetur regula generalis facilius solvendi triangulorum sphæricorum rectangulorum casus omnes, cui similem nos quoque dedimus in Elementis nostris. Cæterum logarithmi isti ab iis, quibus nunc utimur, sunt diversi: supposuit enim NEPERUS in prima eorundem constructio-

ſtructione logarithmum Sinus totius ſeu radii o, ut multiplicationem & diviſionem in Trigonometria plerumque prorſus evitaret, nec additionem vel ſubtractionem ſubſtituere opus haberet.

§. 9. Canonem NEPERI ad ſingula minuta prima quadrantis conſtructum ad dena ſecunda extendit BENJAMIN URSINUS; Mathematicus Electoralis Brandenburgicus, & cum Canonis tam naturalis, quam artificialis conſtructionem, tum Trigonometriam utramque & quidem ſphæricam juxta NEPERUM explicavit in *Trigonometria, Coloniæ* An. 1625, in 4. edita (conſtat liber 1 Alph. 12 plag. & Canon 2 Alph. 11 plag.). Multa continet lectu digna, præſertim quoad conſtructionem Canonis & praxin Trigonometriæ ſphæricæ.

§. 10. Poſtquam KEPLERUS hoc logarithmorum genus a JUSTO BYRGIO ſupra laudato (§. 38, C. 4) inventum, ſed illo reprehendente in Rudolphinis f. 11, in privatos tantum uſus reſervatum, ad Aſtronomiam tranſtulerat; ipſius gener JACOBUS BARTSCHIUS Canonem URSINI reduxit, reſectis tribus ultimis cyphris, & particulam antilogarithmorum exactiorum ad ſingula bina ſecunda, Tabulamque logarithmorum indicis proſtaphæreſeos ſupputavit atque Heptacoſiadem *Keplerianam* ad ſingula ſcrupula ſecunda dilatavit. Has tabulas, ſub ſoceri KEPLERI auctoritate, *Sagani* edidit An. 1630, ſed ob earum uſum in calculo *Rudolphino* inſignem ſub titulo: JOH. KEPLERI & JACOBI BARTSCHII *Tabulæ Manuales Logarithmicæ* An. 1700, *Argentorati* in 8. (1 Alph. 17 plag.) recudi fecit JOHANN. CASPAR EISENSCHMID, Med. D.

§. 11. Ex conſilio NEPERI logarithmorum formam immutavit HENRICUS BRIGGIUS, Profeſſor Geometriæ Oxonienſis, ita ut logarithmus unitatis fieret o, quemadmodum nos expoſuimus in Elementis Arithmeticæ cap. 8. Conſtruxit Canonem Logarithmorum numerorum vulgarium ab 1 uſque ad 20000 & a 90000 uſque ad 100000, quem in *Arithmetica Logarithmica* una cum methodo inveniendi logarithmos & uſu eorundem exhibuit An. 1624, in fol. Sed mox *Goudæ* An. 1628, in fol. (9 Alph. 7 plag.) eandem recudi fecit ADRIANUS VLACQ, Goudanus, qui logarithmos Briggianos 4 numeris minuit, lacunam inter 20000 & 90000 explevit, ut 100 logarithmorum chiliades exhibuerit, Canonem triangulorum ſeu Tabulam ſinuum & tangentium artificialium ad radium 10000000000 & ad ſingula ſcrupula prima quadrantis adjecit, in deſcriptione vero *Briggiana* quædam hic illic immutavit, quædam omiſit, quædam adjunxit. Idem poſtea An. 1633, Canonem ſinuum atque tangentium artificialium extendit ad ſingula dena ſecunda & ſub titulo Trigonometriæ artificialis ſeu Magni Cano-

Canonis triangulorum Logarithmici, *Goudæ* in fol. (5 Alph. 3 plag.), adjectis Chiliadibus viginti Logarithmorum pro numeris naturali serie crescentibus H. BRIGGII, edidit.

§. 12. Inchoaverat idem BRIGGIUS Canonem sinuum & tangentium artificialem pro gradibus graduumque centesimis; sed morte præpeditus non absolvit. Quæ adeo deficiebant, supplevit HENRICUS GELLIBRAND & An. 1633, sub nomine *Trigonometriæ Britannicæ* publicavit. Prodiit *Goudæ* in fol. (3 Alph. 7 plag.)

§. 13. Sub eodem *Trigonometriæ Britannicæ* nomine, sed Anglico idiomate opus trigonometricum præclarum edidit JOHANNES NEWTON, *Londini* 1658, in fol. (5 Alph. 19 plag.), in quo continentur 1. constructio & usus Canonis sinuum & tangentium naturalis atque artificialis, 2. solutio triangulorum, tam planorum, quam sphæricorum, 3. chiliades centum logarithmorum pro numeris vulgaribus, 4. Canon logarithmorum pro sinibus & tangentibus ad singulos gradus & partes graduum centesimas, 5. Canon logarithmorum pro sinibus & tangentibus ad tres primos Quadrantis gradus & partes graduum millesimas.

§. 14. Fundamentum Logarithmorum breviter quidem, attamen perspicue exposuit STIFELIUS in Arithmetica integra (§. 7. C. 1.) Lib. 3, f. 249, b & seqq. monens posse hic fere novum librum integrum scribi de mirabilibus numerorum, sed oportere, ut se hic subducat & clausis oculis abeat. Utilitatem fractionum decimalium ad exprimendos numeros prope veros, qui in calculo excludant errorem quantumlibet exiguum, adeoque contemnendum, dudum ante monstravit REGIOMONTANUS. Hisce igitur luminibus usi sunt BYRGIUS atque NEPERUS in Logarithmis computandis. Recentiores vero alias invenere methodos, de quibus in Algebra agitur. Illa tamen, qua usi sunt Canonis conditores, ad captum tyronum composita, adeoque a nobis in Arithmetica retenta.

§. 15. An. 1643, *Bononiæ* in 4. (1 Alph. 1 plag.) BONAVENTURÆ CAVALLERII *Trigonometria plana & sphærica, linearis & logarithmica*, cum canone duplici Trigonometrico & chiliade numerorum absolutorum ab 1 usque ad 10000, eorumque logarithmis ac differentiis, opus Autore suo dignum, prodiit. Eodem usus est GEMINIANUS RONDELLI, Mathem. Professor Bononiensis, qui An. 1705, *Bononiæ* in 4. (2 Alph. 12 plag.) *Trigonometriam universalem linearem & logarithmicam*, Italico idiomate edidit, cum Canone sinuum, tangentium & secantium, atque logarithmorum sinuum & tangentium & decem chiliadibus logarithmorum pro numeris vulgaribus.

§. 16. SETHI WARDI *Idea Trigono-*

gonometriæ demonstrata, quæ cum Prælectione *de Cometis* & *Inquisitione in* BULLIALDI *Astronomiæ Philolaicæ fundamentum*, *Oxonii* An. 1654, in 4. (plag. 3) prodiit, est admodum concisa & characteribus expressa. Ejusdem vero indolis est *Trigonometria* WILHELMI OUGHTREDI, quæ cum Canone sinuum, tangentium & secantium *Londini* 1657, in 4. lucem adspexit (1 Alph. 13 plag.). In eundem quoque censum veniunt JOANNIS WILSON *Principia Trigonometriæ succincte demonstrata*, quæ *Lugduni Batavorum* An. 1718, in 8. (plag. 5, Tab. 2) prodiere.

§. 17. RICHARDUS NORWOOD in *Trigonometria*, quæ Anglico sermone *Lond.* 1651, in 4. recusa, (2 Alph. 3 plag.) præter Trigonometriam planam & sphæricam, logarithmorum doctrinam explicat, & omnia Trigonometriæ sphæricæ problemata per duo axiomata fundamentalia NEPERI solvit. Adjiciuntur Canones sinuum & tangentium naturalium atque artificialium, cum 10 chiliadibus logarithmorum pro numeris vulgaribus.

§. 18. WILHELMUS HAWNEY An. 1725, *Londini* in 8. reg. (Alph. 1, plag. 8) Trigonometriam planam & sphæricam omnem explicatam dedit & ejus usum in Navigatione, Astronomia, Geographia, Architectura militari, Geodæsia & Euthymetria, atque Gnomonica prolixe commonstravit in libro sermone Anglico edito sub titulo: *The Doctrine of plain and spherical Trigonometry.*

§. 19. *Compendium Trigonometriæ planæ & sphæricæ* non contemnendum, *Leodii* 1704, in 8. ($12\frac{1}{2}$ plag.) edidit JACOBUS GOODEN, e Societate Jesu, in quo regulæ accurate demonstrantur & exemplis utilibus ex Geodæsia, Astronomia & Geographia petitis illustrantur. Adjiciuntur palmaria ex EUCLIDE theoremata, cum Canonibus sinuum, tangentium & logarithmorum contractis.

§. 20. In cursibus Trigonometriam bene explicant DECHALES atque OZANAM (§. 4. 7. c. 1). Præterea in multis aliis libris, qui de Astronomia & Navigatione conscripti sunt, Trigonometria tam plana, quam sphærica explicatur. Sed de eo dicemus suo loco, quando illorum mentionem facturi sumus.

§. 21. *Tabulæ Sinuum & Tangentium itemque Logarithmorum* separatim editæ commendantur VLACCI, quæ *Hagæ Comitum* An. 1665, prodierunt, & OZANAMI, quæ juxta eas correctæ. Quid nos in nostris præstiterimus, quæ *Halæ* 1711 (plag. 20) prodierunt, & 1728, recusæ ex præfatione iisdem præfixa intelligi potest.

§. 22. Analysis speciosa Trigonometriæ sphæricæ, primo mobili, Triangulis rectilineis & Progressioni Arithmeticæ & Geometricæ aliisque variis Problematis applicata a R. P. JACOBO KRESA, e Societate Je-

su, quæ *Pragæ* prodiit 1720, in 4. (Alph. 2, Tab. 2), docet usum Algebræ communis, cujus Isagoge libro primo præmittitur, in Trigonometria plana & Sphærica.

CAPUT VI.

De Statica & Mechanica.

§. 1. Theoria Staticæ atque Mechanicæ apud veteres fuit valde imperfecta, nec quicquam ea de re extat, nisi quod ARCHIMEDES in duobus *De æquiponderantibus* libris, de centro gravitatis figurarum planarum, & de Statices palmario fundamento, & PAPPUS lib. 8. *Collect. Mathemat.* de quinque Potentiis mechanicis, vecte, axe in peritrochio, trochlea, cochlea & cuneo demonstrat.

§. 2. Neque ulterius progrediuntur Autores recentiores, qui institutiones Mechanicas ediderunt: immo plerique Archimedea de centro gravitatis, quæ non sunt ad palatum tyronum, nec ad praxin directe tendunt, omittunt. Pertinent huc GUIDI UBALDI liber *Mechanicorum, Pisauri* An. 1577, editus in fol. (2 Alph.) SIMONIS STEVINI *Statica* (§. 23, Cap. 1); JAC. ROHAULT *Tractatus de Mechanica*, qui inter posthuma habetur *Hagæ* 1690, in 12. reg. (1 Alph. 22 plag.) edita & non nullis editionibus Physicæ ejus in Latinum versæ subjungitur; IGNATII GASTONIS PARDIES *Statica* Gallice *Hagæ Comitum* An. 1692, in 12. ($10\frac{1}{2}$ plag.) tertia vice recusa & vitiosissime in Latinam linguam translata; BERNHARDI LAMY Tractatus Gallicus *de Mechanica* (*Parisiis* 1687, in 12. plag. 12), cui accessit plagula una continens Novam methodum demonstrandi præcipua theoremata Elementorum Mechanicorum; GUIL. OUGHTRED *Institutiones Mechanicæ* (§. 27, cap. 1), PAULI CASATI *Mechanicorum* libri octo *Lugduni Gallorum* An. 1684, in 4. (4 Alph. 7 plag.) & AND. JUNGENICKELS, ex vitriario primum militis gregarii, deinde Suggestuum tormentorum Præfecti *Clavis Machinarum*, Germanice conscripta & *Norimbergæ* An. 1661, in 4. (2 Alph. 3 plag.) edita. Hos inter STEVINUS atque CASATUS multa ad praxin profutura afferunt: ROHALTIUS atque LAMY ob perspicuitatem tyronibus commendandi: JUNGENICKELIUS iis satisfacit, qui in Geometria non multum versati fundamenta mechanica populari modo cognoscere cupiunt.

§. 3. Theo-

§. 3. Theoriam potentiarum mechanicarum, quæ dicuntur, seu machinarum simplicium nemo prolixius demonstravit, ac singula huc spectantia uberius exposuit, quam VARIGNONIUS in opere posthumo, quod duobus Tomis *Parisiis* An. 1725, in 4. reg. (Alph. 4, plag. 21, Tabb. 64) sub titulo: *Nouvelle Mécanique & Statique* prodiit, ubi ex motu composito demonstrationes deducit. Ad eorum palatum est, qui theoriis profundis delectantur. Ideam hujus operis jam publicaverat An. 1687, *Parisiis* in 4. sub titulo: *Projet d'une nouvelle Mécanique*, in quo nonnisi principia continentur peritis valde probata. Adjiciuntur duo Tractatus, quorum primo examinatur Machina ab affrictu libera, cujus mentionem facit PERRAULT in Commentario ad VITRUVIUM; secundo autem opinio BORELLI de ponderibus ex chorda suspensis.

§. 4. Ulterius primus omnium progressus GALILÆUS GALILÆI in *Discursibus & demonstrationibus mathematicis circa duas novas scientias, pertinentes ad Mechanicam & motum localem*, una cum *Dialogis ejus de systemate mundi*, *Lugduni Bat.* 1699, in 4. editis. (Dialogi de motu constant 1 Alph. 14 plag). In iis enim resistentiam solidorum considerare aggressus est, quamvis parum feliciter, usus nimirum principiis parum genuinis, & de motu cum generalia tradidit, tum in specie motum gravium tam libere, quam super plano inclinato descendentium vel ascendentium, atque motum projectorum & pendulorum felicissime evolvit.

§. 5. Inventa GALILÆI expolivit discipulus ejus EVANGELISTA TORRICELLIUS in libris duobus *de motu gravium naturaliter descendentium & projectorum*, qui inter opera ejus Geometrica habentur (§. 12, Cap. 3); immutavit JOH. BAPTISTA BALIANUS in Tractatu *de motu naturali gravium* (*Genuæ* 1646, in 4.), sed parum feliciter; & doctrinam de motu pendulorum ulterius promovit CHRISTIANUS HUGENIUS in insigni Tractatu *de Horologio oscillatorio*, *Paris.* An. 1673, in fol. (2 Alph.), cujus etiam parte tertia de linearum curvarum evolutione & dimensione Geometria sublimior novis inventis illustratur. Illustris LEIBNITIUS de resistentia solidorum certiora dedit in Actis Eruditorum An. 1684, pag. 319, & eandem doctrinam celeberrimus VARIGNONIUS more suo maxime universalem reddidit Commentariis Academiæ Regiæ scientiarum An. 1702, pag. 87.

§. 6. JOH. ALPHONSUS BORELLUS in Tractatu *De vi percussionis* regulas motuum explicare aggressus est. Prodiit primum *Bononiæ* An. 1666, in 4. & cum Tractatu altero *De motionibus naturalibus a gravitate pendentibus*, *Lugd. Batav.* An. 1686, in 4. (3 Alph. 18 plag. 21 Tabb. æn.). Idem in Opere eximio *De motu animalium*,

malium, *Lugd. Batav.* 1685, in 4. (3 Alph. 18 plag. 18 Tabb. æn.) regulas Staticorum ad motus animalium varios explicandos applicavit.

§. 7. Primi regulas motuum veras dedere eodem tempore WALLISIUS, HUGENIUS & CHRISTOPHORUS WREN: ille quidem de Corporibus non elasticis, hi vero de corporibus elasticis. Extant regulæ *Wallisianæ* in Transactionibus Anglicanis n. 43, p. 864, *Wrennianæ* n. 43. p. 867, & *Hugenianæ* n. 46, pag. 927, Conf. *the Philosophical Transactions abrig'd* by JOHN LOWTHORP Vol. I. cap. 5, p. 545, & seqq.

§. 8. HUGENIUS postea Tractatum peculiarem *De motu corporum ex percussione* conscripsit, qui inter posthuma opera habetur, & in quo inventa sua clarius explicat: WALLISIUS vero absolutissimum *de Mechanica seu motu* opus perfecit, *Oxonii* An. 1669, in 4. primum editum, deinde Tomo primo Operum insertum, in quo non solum inventa veterum & *Galilæana*, *Wrenniana*, *Hugeniana* atque propria, ope analyseos plerumque demonstrantur, verum etiam in prolixa de centro gravitatis pertractatione multa ad Geometriam sublimiorem spectantia una evolvuntur. Utitur Arithmetica hinc inde infinitorum, sed ope calculi differentialis ac integralis talia felicius eruuntur.

§. 9. Quoniam opus præclarum captum tyronum transcendit; operæ pretium fecit Cl. JOH. KEILL, Astronomiæ Professor in Academia Oxoniensi, quod in *Introductione ad veram Physicam*, quæ An. 1705, *Oxonii* in 8. reg. (19½ plag.) auctior recusa, palmaria illius de motu dogmata ad captum tyronum ex elementis demonstraverit, more veterum Geometrarum.

§. 10. Cel. PHILIPPUS DE LA HIRE in Tractatu *de Mechanica* (*Paris.* 1695, in reg. 12. plag. 18.) non modo ea demonstrat, quæ ad praxin mechanicam usui sunt; verum etiam motuum doctrinam attingit. Unde merito in hoc genere commendatur.

§. 11. Prostant etiam alia de motu corporum ex percussione Scripta particularia. Pertinet huc MARIOTTI Tractatus de percussione corporum (*du Choc des corps*,) qui *Parisiis* An. 1673, in 12. (plag. 18, Tab. 2) editus Autore suo dignus; & inter opera ejus legitur, quæ *Lugduni Batavorum* An. 1717, in 4. (Alph. 4. plag. 2, Tabb. 25) prodierunt. In eo ex experimentis pendulorum demonstrationes deducit; P. DECHALES Tractatus Gallicus *De motu* (*Lugd. Gall.* An. 1682, in 8) & P. PARDIES *Discursus de motu locali* (*Hag. Comit.* An. 1692, in 12. tertia vice Gallice recusus) non magni momenti, nec veritati per omnia consentaneus. Inprimis vero hic nominanda sunt *Elementa* Gallica *Mechanicæ & Physicæ* a PARENTIO, *Paris.* An. 1700, in reg. 12, (plag. 22, Tabb. 12) edita, quamvis non satis perspicua.

§. 12. HU-

§. 12. HUGENIUS primum considerare cœpit in motu curvilineo, præsertim circulari, vim centrifugam, & de ea aliquot theoremata, sed suppressa demonstratione, Tractatui de Horologio oscillatorio (§. 4) subjunxit. Conscripsit deinde Tractatum *De vi centrifuga*, qui inter posthuma comparet, ubi theoremata ista demonstrantur. Sed antequam is in publicum prodiret, Cl. KEILLIUS faciles ac elegantes eorundem theorematum demonstrationes dedit sub finem Introductionis ad veram Physicam modo laudatæ (§. 9). Easdem regulas per calculum differentialem in Commentariis Academiæ Regiæ scientiarum An. 1700, p. 19. eruit HOSPITALIUS & nos nostro more in Elementis Mechanicæ demonstravimus.

§. 13. De motu, præsertim curvilineo, inventa prorsus præclara & admiranda dedit Geometra summus ISAACUS NEWTONUS in excellenti *Principiorum Mathematicorum Philosophiæ Naturalis* Opere (*Londini* An. 1687, in 4. reg. 2 Alph. 18 plag.) quod hinc inde emendatum & auctum *Cantabrigiæ* 1713, in 4. reg. (2 Alph. 19 plag.) & mox *Amstelodami* An. 1714, eadem forma recusum cum præfatione ROGERI COTES, Astronomiæ & Philosophiæ experimentalis Professoris Plumiani in Academia Cantabrigiensi, qui operam dedit, ut opus præstantissimum nitide imprimeretur. Tandem An. 1726, *Londini* in 4. reg. (Alph. 2 plag. 3) prodiit editio tertia aucta & emendata, ceteris omnibus præferenda. Docetur in hoc opere applicatio Geometriæ ad Naturæ explicationem & Scientia mechanica mirifice fuit promota.

§. 14. Excitavit illud attentionem Geometrarum primi ordinis, eosque incitavit, ut varia ad majorem universalitatem perducerent & ulterius proveherent: quos inter inprimis nominandus mihi est celeberrimus VARIGNONIUS, cujus præclara in hoc genere meditata in Commentariis Academiæ Regiæ Scientiarum passim leguntur.

§. 15. Cæterum cum ad lectionem operis *Newtoniani* non admittantur, nisi in Theoria mathematica multum diuque versati, cum in ea majorem perspicuitatem desideraverit ipse HUGENIUS; GUILIELMUS WHISTON, Matheseos tum Professor in Academia Cantabrigiensi, in *Prælectionibus Physico-Mathematicis* Philosophiam Newtoni mathematicam explicatius tradidit & facilius, quamvis subinde laxius, demonstravit (*Cantabrigiæ* An. 1710, in 8. 1 Alph.). Forsan huc etiam tendit liber alius ab HENRICO DITTON *Londini* An. 1706, sub titulo *the general Laws of nature and motion with their application to Mechanicks, also the doctrine of centripetal forces and velocities of bodies, describing any of the Conick Sections* editus, quem nobis non vi-

sum

sum nomen Autoris ex aliis speciminibus nobis noti commendat.

§. 16. Inprimis etiam loco introductionis in opus *Newtonianum* commendanda est explicatio quarundam sectionum ejusdem, quam dedit JOHANNES CLARKE & sub titulo: *A Demonstration of some of the principal sections, of Sir Isaac Newton's principles of natural Philosophy, in wich his peculiar method of treating that useful subject is explained and applied to some of the chief phænomena of the system of the World, Lond.* 1730, in 8. reg. (plag. 22, Tabb. 17) edidit, & omnium maxime DOMCKII *Philosophia mathematica Newtoniana* illustrata, quam Latino sermone conscriptam *Londini* An. 1731, in 8. (Alph. 1, plag. 3, Tabb. 16) publici juris fecit autor. Enimvero cum opus *Newtonianum* merito tantopere celebratum a tyronum non modo, sed etiam provectiorum captu valde removeatur, utilissimam operam sumeret, qui continuo Commentario idem illustraret, qualem in Geometriam CARTESII edidit RABUEL (§. 7, c. 4).* Præstaret enim, ut principiis Geometriæ, Analyseos & Mechanicæ instructus statim ad lectionem ejus accederet, cum dulcius ex fonte bibantur aquæ, quam demum per ambages non sine multo temporis dispendio ad eandem perduceretur, aut prorsus ab eadem avocaretur.

§. 17. Multa egregia de motu & resistentia cum solidorum, tum fluidorum a celeberrimis ævi hujus Geometris detecta in Act's Eruditorum & Commentariis Academiæ Regiæ Scientiarum, nec non in Transactionibus Anglicanis, passim extant; & præclarum de motu solidorum & fluidorum opus Geometræ insignis JACOBI HERMANNI, Mathematum Professoris primum Patavii, deinde Francofurti ad Oderam, posthac Petropoli Mathematum, tandem in Academia patria Basileensi Philosophiæ moralis celeberrimi, *Amstel.* 1716, in 4. (Alph. 2, plag. 15, Tabb. 12) sub *Phoronomiæ* nomine editum plurima inventa nova eaque egregia continet. More veterum doctrinam hanc demonstrare voluit, quorum tamen methodum non satis familiarem expertus, nec intimius perspectam possedit, ut adeo & sibi, & aliis magis consuluisset, siquidem analytica methodo, in qua erat versatissimus, usus fuisset.

§. 18. Ne igitur desideraretur opus Mechanicæ, in quo Motus scientia profundius explicaretur, & lectores ad solvenda proprio marte problemata præpararentur, LEONHARDUS EULERUS, Academiæ Imperialis scientiarum, quæ Petropoli floret, Membrum & Matheseos sublimioris Professor, *Mechanicam* sive *Motus scientiam analytice expositam* con-

* Id fecerunt PP. LE SEUR & JACQUIER ex ordine Minimorum. Prodierunt hujus Commentarii Volumina duo, *Genevæ in* 4. primum An. 1739 (Alph. 3, plag. 5) secundum An. 1740 (Alph. 2, plag. 7) Tertium mox proditurum expectatur.

conscripsit & duobus Tomis, *Petropoli* in 4. reg. (Tom. I, Alph. 2, plag. 17, Tabb. 14, & Tom. II, Alph. 2, plag. 18, Tabb. 18) in lucem publicam emisit, plura suo tempore additurus. Reperies in hoc opere multa nova, quæ alibi frustra quæsiveris, & ad ejus lectionem cum fructu absolvendam admittitur, qui in Analysi finitorum & infinitorum satis fuerit exercitatus.

§. 19. Quibus machinarum constructio curæ cordique est, in eorum gratiam Tractatum de Viribus motricibus (*Traité des Forces mouvantes*) *Parisiis* An. 1722, in 8. reg. (Alph. 1½, Tabb. 8) edidit DE CAMUS. Explicantur enim principia & ad machinas applicantur, quorum in praxi mechanica cognitio præsupponitur.

§. 20. Machinarum descriptiones dederunt JACOBUS DE STRADA, *Ferdinandi*, *Maximiliani* & *Rudolphi* II, Imperatorum Antiquarius, An. 1618, a nepote OCTAVIO DE STRADA in publicum emissas, & An. 1629, recusas; ZEISINGIUS in *Theatro Machinarum*, *Lipsiæ* An. 1612, in 4. edito, JACOBUS BESSON in *Theatro instrumentorum & machinarum* An. 1582, in lucem emisso in fol. (plag. 32), cum FRANCISCI BEROALDI Figurarum declaratione demonstrativa & JOLII PASCHALIS additionibus: AUGUSTINUS DE RAMELLIS DE MASANZANA in opere, quod ex Gallico in sermonem Germanicum translatum *Lipsiæ* An. 1620, in fol. (7 Alph. 18 plag.) sub titulo: *Schatz-Kammer Mechanischer Künste* prodiit, & GEORGIUS ANDREAS BÖCKLER, in *Theatro Machinarum* novo (*Norimb.* 1673, in fol. plag. 11, Tabb. æn. 154).

§. 21. Quoniam descriptiones machinarum, quas Autores isti tradunt, omnes sunt nimis breves, & inprimis dimensionum rationes non exprimunt, ita ut adæquata machinarum idea inde hauriri nequeat; Mechanicus ingeniosus atque industrius JACOBUS LEUPOLDUS novum promisit Theatrum machinarum & instrumentorum in Actis Eruditorum An. 1712, p. 366, cui ut staret, ipsimet eum hortati sumus. Stetit tandem, quantum per fata licuit, & *Lipsiæ* An. 1724, in publicam lucem protulit *Theatrum machinarum generale*, *Schau-Platz des Grundes mechanischer Wissenschafften* in fol. (Alph. 2, plag. 20, Tab. 71), in quo potentias mechanicas & virium motricium ad machinas applicationem declarat. Eodem adhuc anno comparuerunt *Theatrum machinarum hydrotechnicarum*, *Schau-Platz der Wasser-Bau-Kunst*, in quo ea traduntur, quæ ad Architecturam aquarum faciunt (Alph. 2, plag. 5, Tabb. 51) & pars prior *Theatri machinarum hydraulicarum*, *Schau-Platz der Wasser-Künste*; in quo repræsentantur machinæ ad aquas elevandas excogitatæ (Alph. 2, Tabb. 52). Pars posterior subsecuta

anno sequente (Alph. 2, plag. 1, Tabb. 54). Eodem adhuc anno 1725. comparuit *Theatrum Machinarium*, quod vocat Autor, *Schau-Platz der Hebezeuge* (Alph. 2, Tab. 96), in quo reperies machinas ponderibus elevandis aptas hisque agnatas, & *Theatrum ſtaticum univerſale*, *Schau-Platz der Wage- und Gewicht- Kunſt*, (Alph. 2, plag. 11, Tabb. 57), quod exhibet varias librarum & ſtaterarum ſtructuras, una cum inſtrumentis hydroſtaticis, meteorologicis & ad libellationem neceſſariis, & quæ ad pondera ſpectant, explicat. An. 1726, *Theatrum Pontificiale*, quod vocat autor, *Schau-Platz der Brücken und des Brücken-Baues* (Alph. 1, plag. 21, Tabb. 57), quæ eam Architecturæ partem illuſtrat, quæ de pontibus ſtruendis agit. Tandem An. 1727, *Theatrum Arithmeti-o-Geometricum*, *Schau-Platz der Rechen- und Meſs-Kunſt* (2 Alph. 8½ plag. Tabb. 43) ſucceſſit, in quo inſtrumenta Arithmetica & Geometrica deſcribuntur. Niſi mors Autoris finem impoſuiſſet, dare adhuc conſtituerat Theatra 1. fontium hydraulicorum, 2. molarum, 3. ad mechanicam ignis ſpectantium, 4. machinarum in metalli fodinis uſitatarum, 5. machinarum & inſtrumentorum, quæ in Architectura civili & militari uſui ſunt, 6. quæ in re Oeconomica & 7. venatoria uſum habent, 8. machinarum & inſtrumentorum aërometricorum, 9. machinarum & inſtrumentorum opticorum, 10. machinarum & inſtrumentorum in Gnomonica & arte horologiopæa uſitatorum, 11. inſtrumentorum aſtronomicorum, 12. acuſticorum & muſicorum aliorumque agnatorum, 13. anatomicorum & chirurgicorum, & tandem omnium machinarum & inſtrumentorum apud artifices & opifices obviorum.

§. 22. Dolendum inprimis erat, quod molarum uſitatarum genera cum Architecturæ parte, quæ iiſdem excitandis deſtinatur, non deſcribere potuerit Autor. Hunc igitur defectum ſupplere conatus eſt JOHANNES MATTHIAS BEYER, qui per modum Tomi noni Theatri machinarum LEUPOLDI An. 1735, *Lipſiæ* in fol. (Alph. 1, plag. 14, Tabb. 43) edidit, in quo non modo uſitata molarum genera, verum etiam ea, quæ ad extructionem earundem neceſſaria ſcitu, deſcribuntur. Acceſſit Tomus ſecundus, in quo jura molendinorum operoſe congeruntur (Alph. 2, plag. 12) in uſum Juriſperitorum.

§. 23. Molas Batavorum peculiari libro exhibuit PETRUS LIMPERGH ſermone patrio, cujus *Moole-Boek*, *Amſtelodami* An. 1690, in fol. reg. (plag. 2, Tabb. 32) prodiit. Accuratiores illarum delineationes ac deſcriptiones dedit JOHANNES VAN ZYL in Theatro Machinarum univerſali, *of groot algemen Moolen-Boek*,

cujus

cujus Tomus I, *Amstelodami* An. 1734, in fol. reg. prodiit (plag. 6, Tabb. 56), etenim singulæ partes, qualescunque tandem fuerint, quam accuratissime secundum suas dimensiones repræsentantur, ut integræ structuræ adæquatam ideam inde haurire liceat. Textus in Germanicam linguam translatus fuit, ut operis hujus etiam in Germania esset usus.

§. 24. Accuratas quarundam machinarum recentius inventarum descriptiones dedit PERRAULT in opusculo Gallico, quod sub titulo: *Recueil de plusieurs Machines de nouvelle invention*, *Parisiis* An. 1700, in 4. (plag. 7, Tabb. 11) prodiit, & HUGENIUS cum in Tractatu *De horologio oscillatorio* horologium a se inventum, tum in *Operibus posthumis* automatum suum planetarium accurate describit.

§. 25. In Gallia machinas ab Academia Scientiarum approbatas, a prima fundatione usque ad nostra tempora, una cum illarum descriptionibus, delineatas consensu Academiæ sub titulo: *Machines & Inventions approuvées par l'Académie Royale des Sciences*, *Parisiis* sex Tomis publici juris fecit GALLONUS An. 1735, in 4. reg. (Alph. 6, plag. 20, Tabb. 422). Non modo machinæ scenographice repræsentantur, verum etiam ichnographice, cum orthographiis & singularum partium delineationibus adjiciuntur, ubi opus fuerit. Descriptiones sunt satis accuratæ, ut nihil in iis desiderari possit. Subinde etiam vires ad agitandam machinam requisitæ ad calculum revocantur, aliaque cognitu necessaria annotantur. Opus hoc Mechanicæ practicæ cultoribus plurimum commendandum.

§. 26. Structuram horologiorum exponit Anglus Anonymus * in Tractatu Anglico, qui auctior *Londini* An. 1700, in 12. reg. sub titulo: *The artificial Clockmaker* ($7\frac{1}{2}$ plag. Tabb. 2) prodiit & An. 1707, in Germanicum idioma translatus, novæ editioni Gnomonicæ *Welperianæ* subjungitur: quod argumentum etiam attingit OUGHTREDUS in posthumis pag. 68, & seqq. Idiomate autem Germanico de horologiorum structura commentatus est JOANNES GEORGIUS LEUTMANNUS, in mechanicis & praxi optica versatissimus. Prodiit ejus Tractatus sub titulo: *Vollständige Nachricht von den Uhren*, *Halæ* 1718, in 8. (plag. 9, Tab. 7). Addidit An. 1722, Continuationem, in qua supplentur, quæ desiderari poterant de horologio examinatorio & repetitorio (plag. 12, Tabb. 22).

§. 27. Autoribus tamen istis palmam præripit D. JACOBUS ALEXANDER, Monachus Benedictinus Congregationis S. Mauri, in Tractatu generali de Horologiis, qui sub titulo: *Traité général des Horloges*, *Pari-*

* GUILIELMUS DERHAM Canon. Windsor. non uno nomine commendandus.

Parisiis in 8. maj. 1734, prodiit (Alph. 1, plag. 2, Tabb. 26), quem ob utilitatem suam, me suasore, in Germanicam linguam transtulit CHRISTIANUS PHILIPPUS BERGERUS, Medicinæ Doctor, & *Lemgovii* An. 1738, in 8. (Alph. 1, plag. 5, Tabb. 25) edidit sub titulo: *Des P. Dom JACOB ALEXANDERS ausführliche Abhandlung von den Uhren.* Agit etiam de horologiis solaribus majoribus construendis. Ceterum hoc opus omnibus commendandum, qui horologiorum constructionem accurate cognoscere desiderant. Singularia vero de constructione horologiorum tradit in libro Gallico HENRICUS SULLY, qui secunda vice auctior recusus *Parisiis* An. 1737, in 12. (plag. 20, Tabb. 5) cum multis accessionibus. Maximopere commendandus iis est, qui perfectionem horologiorum curæ cordique habent, atque adeo in Germanicam linguam verti meretur, ut Tractatui ALEXANDRI jungi posset.

§. 28. Silentio denique hic prætereunda non erant CASPARI SCHOTTI, e Societate Jesu, *Technica curiosa*, libris 12, comprehensa, quæ *Norimbergæ* An. 1664, in 4. (Alph. 6, Tabb. 20) prodierunt. Etenim in iis, præter varia experimenta aliaque technasmata, continentur etiam mechanica, chronometrica & automatica, consequenter plurima ad Mechanicam practicam spectantia. Edidit idem *Magiam universalem Naturæ & Artis* in tres partes distributam *Bambergæ* 1677, in 4. (Alph. 14, plag. 2, Tabb. 90): pars enim tertia multa continet, quæ ad Mechanicam & Staticam spectant, nimirum quæ sub nominibus Magiæ centrobarycæ, mechanicæ, thaumaturgæ libris tribus prioribus continentur.

§. 29. Idem SCHOTTUS in Technica curiosa lib. 9, sub titulo *mirabilium chronometricorum* multa artis horologiopææ utilia tradit, præter alia mechanica. Inprimis etiam de mobili perpetuo varios conatus describit.

CAPUT VII.

De Hydrostatica, Aerometria, & Hydraulica.

§. 1. HYdrostaticam primus docuit ARCHIMEDES in libris *De insidentibus humido*, cujus dogmata ad experimenta applicavit MARINUS GHETALDUS in ARCHIMEDE *promoto*: unde sua excerpsit OUGHTREDUS (§. 19, cap. 1).

§. 2. MA-

§. 2. MARIOTTUS in Tractatu Gallico de motu aquarum & aliorum corporum fluidorum, qui primum sub titulo: *Traité du mouvement des eaux & des autres corps fluides*, prodiit *Parisiis* An. 1686, in 12. reg. (plag. $17\frac{1}{2}$) & in editione Batava operum ipsius legitur, propositionum hydrostaticarum & hydraulicarum magnam partem & rationibus confirmavit, & experimentis comprobavit. Propter insignem utilitatem D. JOHANNES CHRISTOPHORUS MEINIG eum in Germanicam linguam transtulit & notis quibusdam illustratum *Lipsiæ* An. 1723, in 8. (Alph. 1, plag. $5\frac{1}{2}$) edidit.

§. 3. Nec contemnenda habet ROBERTUS BOYLE, cum in *Paradoxis Hydrostaticis* (*Genevæ* An. 1680, in 4. plag. 15, Tabb. 3), tum in *Medicina Hydrostatica* (*Genevæ* An. 1693, in 4. plag. $10\frac{1}{2}$): quod utrumque scriptum in usum præsertim physicum legi meretur, intelligendum etiam ab iis, qui Mathematum sunt imperiti.

§. 4. FRANCISCUS TERTIUS DE LANIS, e Societate Jesu, Tomo tertio *Magisterii Naturæ & Artis*, *Parmæ* An. 1692, in fol. (6 Alph. 14 plag. Tabb. 13) lib. 25, f. 49, & seqq. dogmata hydrostatica uberius exposuit, quam alibi leguntur. Tomo autem primo & inprimis secundo passim Machinas Hydraulicas descripsit: quemadmodum etiam in primo Mechanicam multum illustravit. Tom. I, *Brixiæ* An. 1684, in fol. 6 Alph. Tab. 24. Tom. II, *Brixiæ* 1686, 6 Alph. 5 plag. Tabb. 20).

§. 5. BERNHARDUS LAMY parte secunda Mechanicæ (§. 2, cap. 6), quæ inscribitur *Traité de l'équilibre des liqueurs*, propositiones aliquot Hydrostaticæ ac Hydraulicæ fundamentales explicavit: quod etiam fecere ROHALTIUS (§. cit.) & WALLISIUS in *Mechanicis* (§. 8, c. cit.). Commendanda quoque tyronibus *Hydrostatica* P. DECHALES, quæ in Mundo ipsius Mathematico Tom. III, legitur. (§. 4, cap. 1).

§. 6. Sublimiora dedit Geometra summus ISAACUS NEWTONUS in *Principiis Philosophiæ Naturalis Mathematicis* Sect. 5, lib. 2, pag. 282, & seqq.

§. 7. De Aërometria scriptum aliud non extat, nisi quod sub titulo: *Elementa Aërometriæ*, *Lipsiæ* An. 1709, in 12. (16 plag. Tabb. 12) edidi in usum potissimum tyronum, ut Mathesin ad experimenta applicare discant. Sed ea deinceps hisce Elementis Matheseos universæ inserui. Passim tamen huc spectantia leguntur apud GUERICKIUM, Consulem Magdeburgicum, antliæ pneumaticæ inventorem, in *Experimentis novis Magdeburgicis de vacuo spatio*, *Amstelodami* An. 1672, in fol. (Alph. 2, plag. 20, Tabb. 18) editis & qui post eum aëris proprietates experimentis comprobarunt.

§. 8. Ceterum hic etiam locum meretur

meretur libellus Gallicus, qui sub titulo: *Traitez des Barometres, Thermometres & Hygrometres* prostat & barometrorum, thermometrorum atque hygrometrorum constrúctionem ac usum edocet (*Amstel.* 1707, in 12. plag. 7, Tabb. 35). Inprimis autem hinc inde in Commentariis Academiæ Regiæ scientiarum inseruntur, quibus Aërometria locupletari ac ad majorem perfectionem adduci potest.

§. 9. Ad hydraulicam perficiendam tendit JOHANNIS CEVÆ, Mediolanensis, *Geometria motus* (*Bononiæ* 1692, in 4. plag. 12, Tabb. 9), in qua de motu tam simplici, quam composito traduntur, quæ ad motum aquarum explicandum utilia sunt.

§. 10. JOHANNES BAPTISTA BALIANUS lib. 3, 4 & 5, *de motu naturali gravium, solidorum & liquidorum* (§. 5, cap. 6) de motu liquidorum, canalium sectionibus, & de foraminibus vasis, ad praxin hydraulicæ utilia profert: quorsum etiam spectant Tractatus aliquot PICARDI, ROEMERI & MARIOTTI supra recensiti (§. 31, cap. 1).

§. 11. DOMINICUS GULIELMINI in *Mensura Aquarum fluentium* (*Bononiæ* An. 1690, & 1691, in 4. plag. 19, Tabb. 8) theorias hydraulicas sublimiores ad praxin revocare studet. Nemo autem in theoria hydraulica sublimiora dedit quam Geometræ celeberrimi, NEWTONUS in Opere modo laudato (§. 6) lib. 2. sect. 7. p. 318, & seqq. atque VARIGNONIUS in Commentariis Academiæ Regiæ Scientiarum An. 1699, & 1703. Multa nova & egregia de hoc argumento dedit Geometra insignis HERMANNUS in *Phoronomia* (§. 17, cap. 6).

§. 12. Quemadmodum vero EULERUS theoriam mechanicam perficere studuit (§. 18, cap. 6), in quam stricturas Londini edidit ROBINSON NOURSE * sub titulo: *Remarks on Mr. Eulers Treatise of motion*, nobis nondum visas; ita DANIEL BERNOULLI, Medicinæ Professor Basileensis, antea Matheseos sublimioris in Academia scientiarum imperiali Petropolitana, nunc Professor honorarius, similem operam impendit theoriæ Hydrostaticæ & Hydraulicæ, quam sub titulo: *Hydrodynamicæ sive de viribus & motibus fluidorum Commentarii*, *Argentorati* An. 1738, in 4, reg. (Alph. 1, plag. 16, Tabb. 12) publici juris fecit, cum hoc opus jam octo annis ante congessisset, dum Petropoli ageret.

§. 13. Ceterum ad Hydraulicam quoque facit SEXTI JULII FRONTINI *de Aqua ductibus urbis Romæ Commentarius*, quem uberrimis notis explicatum *Patavii* Anno 1722, in 4. reg. (Alph. 1, plag. 21, Tabb. 15) in lucem emisit JOANNES POLENUS, Professor Patavinus, cui etiam debentur de *Motu aquæ mixto* libri duo, quibus multa nova pertinentia ad æstua-

* Aut potius BENJAMIN ROBINS; *Nourse* nomen est Bibliopolæ.

æstuaria, ad portus atque ad flumina continentur, *Patavii* An. 1697, in 4. reg. (plag. 18, Tabb. 3) & liber *de Castellis, per qua derivantur fluviorum aqua, habentibus latera convergentia*, qui etiam continet nova experimenta ad aquas fluentes & ad percussionis vires pertinentia, & *Patavii* An. 1718, in 4. (plag. 9, Tab. 1) prodiit. Idem etiam An. 1723, edidit *Epistolam ad* JOANNEM JACOBUM MARINONIUM, Mathematicum Cæsareum, in qua præter defectum Solis anno isto Patavii observatum, agitur de aliquibus experimentis pertinentibus ad aquas fluentes, & cui subjicitur JOANNIS BUTEONIS *libellus de fluentis aqua mensura* cum annotationibus nonnullis, *Patavii* in 4. (plag. $3\frac{1}{2}$, Tabb. 1).

§. 14. Neque silentio hic prætereunda sunt MARINI MERSENNI *Phænomena Hydraulica pneumatica*, quæ inter *Cogitata ipsius Physico-Mathematica* leguntur, in quibus tam naturæ, quam artis effectus admirandi certissimis demonstrationibus explicantur, *Parisiis* An. 1654, in 4. (Alph. 8, plag. 19). In hac nimirum collectione, quæ inter opera mathematica, superius commemorari merebatur, reperiuntur 1. Tractatus de mensuris, ponderibus, atque nummis tam Hebraicis, quam Græcis & Romanis, ad Parisiensia expensis, 2. Tractatus, cui titulus: Hydraulica pneumatica, Arsque navigandi, Harmonia theorica, practica, & Mechanica phænomena, 3. Tractatus mechanicus theoricus & practicus, 4. Balistica & Acontismologia, in qua sagittarum, jaculorum & aliorum missilium jactus & robur arcuum explicantur, 5. Universæ Geometriæ mixtæque Mathematicæ Synopsis & bini refractionum demonstratarum Tractatus, 6. ARISTARCHI SAMII Tractatus de mundi Systemate & Reflexiones Physico-Mathematicæ, quibus varia adjiciuntur ad præcedentia. In Synopsi tantummodo sine demonstratione recensentur Propositiones EUCLIDIS, PETRI RAMI, ARCHIMEDIS, THEODOSII, MENELAI, MAUROLYCI, APOLLONII, MYDORGII, *geometricæ*; PAPPI, GUIDONIS UBALDI & STEVINI *mechanicæ*.

§. 15. De motu fluminum scripsit DECHALES in Tractatu *De fontibus naturalibus* prop. 39, & seqq. Tomi III, *Mundi Mathematici* f. 137, & seqq. sed paucis plura & abstrusiora hisce complexus est HERMANNUS in *Phoronomia* cap. 10, pag. 226, & seqq. Ex instituto de hoc argumento scripsit DOMINICUS GULIELMINI, cujus *della Natura de' Fiumi Trattato Fisico-Matematico* prodiit *Bononiæ* An. 1697, in 4. (Alph. 2, plag. 3, Tabb. 15). Multa in Italia prodiere scripta Italico sermone, in quibus plura ad hoc argumentum spectantia leguntur, occasione controversiæ de Rheno fluvio in Padum deducendo.

§. 16. Inter

§. 16. Inter Veteres, machinas hydraulicas descripsit HERON *Alexandrinus* in libro *spiritalium* a COMMANDINO in Latinam linguam translato (*Parisiis* An. 1583, in 4.) Ex recentioribus similem operam collocarunt SALOMON DE CAUX, Architectus militaris Electoris Palatini, in libro Gallico *De Machinis*, *præcipue hydraulicis*, qui An. 1615, prodiit: CASPARUS SCHOTTUS in *Mechanica Hydraulico-pneumatica*, *Herbipoli* 1657, in 4. (Alph. 2, plag. 22, Tabb. 56) edita, DECHALES in *Mundo Mathematico* Tom. III, (§. 4, cap. 1), GEORGIUS ANDREAS BÖCKLER in *Architectura Curiosa* Germanica (*Norimbergæ* An. 1704, in fol. plag. 21, Tabb. 200), qui ultra 70 fontium salientium & ultra 120 fontium artificialium formas describit; & LUCAS ANTONIUS PORTIUS in nonnullis *de fontibus naturalibus*, quæ nonnullis *de motu corporum* subjuncta, possibilitatem inprimis quorundam fontium adstruens, qui a PLINIO commemorantur. (*Neapoli* An. 1704, in 4. plag. 7, Tabb. 5).

§. 17. Denique quæ de Hydrostatica & Hydraulica per plurimos libros & volumina dispersa leguntur, qua theoriam & praxin, uno complexus est & sub titulo: *An introduction to a general systen of Hydrostaticks and Hydraulicks*, *Londini* An. 1729, in 4. charta aug. (Alph. 2, plag. 16, Tabb. æn. 60) edidit STEPHANUS SWITZER. Extant etiam in hoc libro descriptiones machinarum, quibus aqua elevatur.

§. 18. Inprimis autem iis, qui praxin solidam Hydraulicæ curæ cordique habent, commendari meretur *Architectura hydraulica*, quam Gallico idiomate conscriptam *Parisiis* Anno 1737, in 4. reg. cum 44 Tabulis æneis splendidissimis edidit DE BELIDOR. * In hoc opere etiam accurata traditur molarum descriptio & quæ ad molas aqua agitandas requiruntur ibidem explanantur. Opus utilissimum in linguam Germanicam verti mereretur.

§. 19. Ad Hydraulicam quidam referunt *Libellationem* aquarum, de qua nos egimus in Mechanicæ Elementis. Egregium de ea Tractatum conscripsit PICARDUS, quem PHILIPPUS DE LA HIRE post mortem ipsius *Parisiis* An. 1684, in 12. (plag. 15, Tabb. 3) edidit, unde sua desumsere, qui de hoc argumento apud Nostros scripsere, veluti LEUPOLDUS atque STURMIUS filius. Inter opera MARIOTTI extat quoque *De libellatione* Tractatus brevis.

* Habet quidem Tom. I, 2 Alph. 9 plag. Tabb. 44. Prodiit autem Tom. II. Anno 1739, & complectitur 2 Alph. 12 plag. Tabb. 55.

CAPUT

CAPUT VIII.

De Optica, Catoptrica, Dioptrica & Perspectiva.

§. 1. O*pticæ* & *Catoptricæ Elementa* olim conscripsit EUCLIDES, quæ a JOHANNE PENA, Mathematico Regio, Latine versa *Parisiis* An. 1604, prodiere. Extant etiam in *Cursu Mathematico* HERIGONII (§. 1. cap. 1) & in editione *Gregoriana* operum EUCLIDIS (§. 2, cap. 3).

§. 2. Circa annum Christi 1100, ALHAZEN Arabs ingens *de Optica* volumen composuit, quod in libros, capita & propositiones distinxit FRIDERICUS RISNERUS. Usus est scriptis veterum, præsertim PTOLEMÆI de *Optica* libris decem, qui hodie desiderantur.

§. 3. Cum demonstrationes ALHAZENI sint admodum intricatæ ac prolixæ; VITELLIO Polonus circa An. 1270, aliud *de Optica* volumen conscripsit in libros X digestum. Pleraque ex ALHAZENO desumsit, sed demonstrationum fundamenta ex APOLLONIO, THEODOSIO, MENELAO, THEONE, PAPPO & PROCLO petiit. Ad hunc Autorem *Paralipomena* edidit JOHANNES KEPPLERUS, quibus Astronomiæ pars optica traditur. (*Francofurti* An. 1604, in 4. 2 Alph. 15 plag.). Habentur tamen multa quoque alia in hisce Paralipomenis, & inter alia modum visionis primus decente ratione explicat Autor. ALHAZENUM & VITELLIONEM uno volumine edidit FRIDERICUS RISNERUS *Basileæ* An. 1572, in fol. (Alph. 7, plag. 18). Titulus libri est: *Opticæ Thesaurus.* ALHAZENI *Arabis libri septem nunc primum editi. Ejusdem liber de crepusculis & Nubium ascensionibus. Item* VITELLIONIS *libri* X. *Omnes instaurati, figuris illustrati & aucti, adjectis etiam in* ALHAZENUM *commentariis a* FEDERICO RISNERO.

§. 4. Compendium Opticæ antiquæ circa annum 1279, conscripsit JOHANNES PECCAMUS, Archiepiscopus Cantuariensis & Primas Angliæ (*Coloniæ Agrippinæ* 1627, in 4. plag. 11), quale etiam recentius dedit AMBROSIUS RHODIUS, Professor Mathematum Wittebergensis, cujus *Optica*, *Witteberga* 1611, cum *Tractatu de crepusculis* in 8. prodiit (1 Alph. 10 plag). Uberius eandem exposuit RISNERUS ante laudatus, cujus *Opticæ* libri quatuor, *Cassellis* An. 1606, in 4. prodiere (Alph. 1, plag. 14).

§. 5. Opticam quoque illustrare aggressus est circa idem tempus ROGERIUS BACON, Philosophus suo

Wolfii Oper. Mathem. Tom. V. K tempo-

tempore summus, Anno 1284, Oxonii mortuus, & ob scientias Mathematicas magiæ accusatus. Ejus *Perspectivam* in lucem protraxit JOANNES COMBACHIUS, Philos. Professor marpurgensis, (*Francof.* An. 1614, in 4. 1 Alph. 5 plag.): parum tamen mathematici ea continet, etsi lectu non indigna.

§. 6. Enimvero Veteres ea, quæ visionem directam & reflexam concernunt, potissimum explicant: quæ vero ad refractam spectant, nimis imperfecte tradunt. JOANNES BAPTISTA PORTA libris novem *de Refractione* conscriptis hanc doctrinam melius tradere conatus est (prodiere *Neapoli* An. 1593, in 4. 1 Alph. 6 plag.); sed parum adhuc profecit. Primus qui Dioptricam meliori habitu induit & lentium sphæricarum proprietates demonstravit accurate, fuit JOHANNES KEPPLERUS, cujus *Dioptrica* prodiit *Augustæ Vindelicorum* An. 1611, in 4. (plag. 14) & posthac alibi recusa. Præmittuntur *Epistolæ* GALILÆI *de iis, quæ post editionem Nuncii siderei ope perspicilli nova & admiranda in cælo deprehensa sunt*, itemque *Examen præfationis* JOHANNIS PENÆ *in Opticam* EUCLIDIS *de usu Opticæ in Philosophia.*

§. 7. CARTESIUS in *Dioptrica*, quæ principiis Philosophiæ subjungi solet, veram refractionis legem a SNELLIO inventam, sed suppresso inventoris nomine, affert & modum visionis distinctius, quam ab aliis factum fuerat, explicat, lentium ellipticarum & hyperbolicarum proprietates recenset & praxin poliendi vitra ita docet, ut in ea non satis versatum judicent experti.

§. 8. Theoriam Dioptricæ magis excoluit, novis plerumque demonstrationibus inventis, WILHELMUS MOLYNEUX in *Dioptrica nova* Anglice conscripta (*Londini* An. 1692, in 4. plag. 16, Tabb. 40), ubi calculo trigonometrico ad eruendas lentium sphæricarum proprietates juxta veram refractionis legem utitur. Omnium maxime eandem hactenus perfecit HUGENIUS, cujus *Dioptrica* maximam posthumorum partem constituit. Eidem & praxis multum debet: de quo tractatus *De poliendis vitris* testatur, Dioptricæ subjunctus. Prodiere primum *Opera posthuma*, *Lugd. Batav.* An. 1703, in 4. (2 Alph. 19 plag. Tabb. 24), deinde cum aliis recusa (§. 35, cap. 1). Opus Hugenianum perfectissimum eorum, quæ in hoc genere prostant: requirit autem lectorem in Geometria probe versatum.

§. 9. Tyronibus adeo commendandum est *Dioptricæ Tentamen* Gallicum NICOLAI HARTSOEKER (*Paris.* An. 1694, 1 Alph. 10 plag.), ubi multa quoque ad Physicam & praxin spectantia traduntur. Ipse enim in poliendis vitris & opticis technasmatis erat versatissimus.

§. 10. In splendidi Operis dioptrici CHERUBINI, Capucini, To-

mo

mo primo, qui sub titulo: *Dioptrique oculaire*, *Parisiis* An. 1671, in fol. (5 Alph. 11 plag. Tabb. 16) prodiit, multa ad praxin spectantia reperiuntu. In altero Tomo, qui sub titulo: *La Vision parfaite*, *Parisiis* 1678, in fol. (3 Alph. 10 plag. Tabb. 23) lucem adspexit, argumentum palmarium est tubus binoculus, cujus sub finem Tomi primi mentionem injecerat.

§. 11. Opticam sine Catoptrica & Dioptrica tradit CHRISTOPHORUS SCHEINERUS, e Societate Jesu, in *Oculo* (*Oeniponti* An. 1619, in 4. 1 Alph. 10 plag.). Ab iis potissimum legendus, qui rationes phænomenorum visionis directæ cognoscere gestiunt.

§. 12. Vir summus NEWTONUS in egregio Optices opere novas luminis proprietates, ante nondum animadversas, & quarum consideratio (ceu ex HUGENII Dioptrica apparet) maximi in Dioptrica momenti, per experimenta edocet. Prodiit opus primum *Londini* An. 1704, in 4. reg. (2 Alph. 5 plag.) sub titulo: *Opticks, or a Treatise of the Reflexions, Refractions, Inflexions and colours of Light*. In fine adjiciuntur duo Tractatus Latini, primus scilicet *de enumeratione linearum tertii ordinis*, alter *de Quadratura curvarum*. Ipsum in Latinam linguam transtulit SAMUEL CLARKE, Autore approbante & nonnulla adjiciente (*Londini* An. 1706, in reg. 4. 2 Alph. 9 plag. Tabb. 19). An. 1719, ibidem prodiit versionis editio altera in 4. (Alph. 2, plag. 8, Tabb. 12), ubi quæstiones adjectæ augentur, sed Tractatus geometrici omittuntur, quos in Analysi sua ediderat JONES (§. 21, cap. 4). Post mortem NEWTONI, *Londini* An. 1729, in 4. (Alph. 1, plag. 14, Tabb. 24) prodierunt *Lectiones ejus opticæ* An. 1669, 1670 & 1671, *in Scholis publicis habitæ*. In his equidem multa continentur quæ in Optica leguntur, alia tamen prorsus ratione proponuntur. Reperiuntur hic, quæ alibi frustra quæsiveris.

§. 13. Huc etiam referri potest MARIOTTI *Tentamen de Coloribus* (*Paris.* An. 1681, in reg. 12. Alph. 1, plag. 9, Tabb. 16) quod Tentaminum Physicorum Gallice conscriptorum quartum est, & in editione Batava operum ipsius legitur, atque HUGENII Tractatus Gallicus *de Lumine* (*Lugd. Batav.* 1690, in 4. 1 Alph. 2 plag.), qui in Operum reliquorum volumine primo extat. Ejus hypothesi in explicandis phænomenis opticis utitur PETRUS ANGO in *Optica* Gallica (*Paris.* An. 1682, in 12).

§. 14. ANDREAS TACQUET in *Optica* Perspectivæ fundamenta jecit, & in *Catoptrica* speculorum planorum & sphæricorum proprietates bene demonstrat. (§. 28, cap. 1), sed Dioptricam non attingit. ISAACUS BARROWIUS in *Lectionibus Opticis*, quæ Lectionibus Geometri-

cis præmittuntur (§. 19, cap. 3), theoriam Catoptricæ & Dioptricæ demonstrat. Nec dubitamus, quin JACOBUS GREGORIUS in *Optica promota* multa præclara dederit, etsi nobis non visa. An. 1663, in 4. lucem adspexit.

§. 15. Utriusque Compendium dedit DAVID GREGORIUS in *Elementis Dioptricæ & Catoptricæ sphericæ* (*Oxonii* 1695, in reg. 8. plag. 7). Idem in linguam Anglicam vertit WILHELMUS BROWNE, M. D. & prolixum supplementum adjecit atque Introductionem præmisit. Prodiit secunda vice cum appendice J. T. DESAGULIERS, L. L. D. de telescopio reflectente cum epistolis, quas de eodem NEWTONUS & JACOBUS GREGORIUS ad se invicem scripsere, *Londini* An. 1735, in 8. reg. (plag. 20, Tabb. 4). Prima telescopii catoptrico-dioptrici idea debetur GREGORIO, qui eam describit in *Optica promota* p. 94. Sed eam perfecit NEWTONUS & tandem feliciſſime istiusmodi telescopium construxit J. HADLEY, atque nunc construuntur ab EDUARDO SCARLET, Optico Regio, ejusque filio. Descripsimus idem in Elementis Dioptricæ nostris.

§. 16. Opticam, Catoptricam & Dioptricam una exposuit ZACHARIAS TRABERUS, e Societate Jesu, in *Nervo Optico* (*Viennæ* An. 1675, in fol. 2 Alph. 16 plag. Tabb. 28). Multa in praxi jucunda habet, sed theoria exigui momenti. Quoad praxes opticas opus absolutum censeri potest JOHANNIS ZAHN *Oculus artificialis teledioptricus*. Editio altera auctior, sed vitiosior prodiit *Norimbergæ* An. 1702, in fol. (9 Alph. 8 plag.) cum figuris multis cum ligno, tum æri incisis. Huc etiam spectat ATHANASII KIRCHERI *Ars magna lucis & umbræ* (*Romæ* 1646, in fol. 10 Alph. 16 plag. Tabb. 34).

§. 17. JOHANNES CHRISTOPHORUS KOLHANS in *Tractatu Optico* (*Lips.* An. 1663, in 8. 1 Alph. 15 plag.) non contemnenda prorsus dedit excerpta cum ad theoriam, tum ad praxin opticam spectantia, retentis ipsorummet Autorum verbis. Omnes tres Opticæ partes discursu vulgari recensuit in gratiam artificum JOHANNES MICHAEL CONRADI in Optica Germanica, qaam sub titulo: *Der dreyfach geartete Sehe-Strahl*, *Coburgi* An. 1710, in 4. edidit (plag. 17, Tabb. 25).

§. 18. *De poliendis vitris Commentarios* reliquit HUGENIUS, qui inter posthuma leguntur (§. 35). Hac arte excelluit ipse: primus enim lentes objectivas tanta exactitudine paravit, ut iis pares nullibi reperirentur, quemadmodum in Astronomicis documus & Dioptricis. In Germania An. 1716, in 8. (plag. 14, Tab. 20) *Halæ* prodiit sub titulo: *CHRISTIAN GOTTLIEB HERTELS vollständige Anweisung zum Glasschleiffen, wie auch zu Verfertigung der optischen Maschinen.* Erat Autor Matheseos Pro-

Professor in Academia illustri Lignicensi & in arte poliendi vitra plurimum exercitatus. Eandem notis illustravit JOANNES GEORGIUS LEUTMANNUS, qui & ipse hanc artem non sine successu excoluerat. Prodierunt *Witteberga* An. 1719, in 8. (plag. 7, Tabb. 21) sub titulo: *Neue Anmerckungen vom Glasschleiffen.*

§. 19. Scriptis opticis accenseri merentur ea, in quibus microscopicæ observationes recensentur. Pertinent huc I°. ROBERTI HOOKE *Micrographia* Anglice scripta (*Londini* An. 1667, in fol. 3 Alph. 8 plag. Tabb. 38) II°. *Antonii van Leeuwenhoek* scripta varia; nempe 1) *Arcana Natura detecta*, *Delphis* An. 1695, in 4. (Alph. 2, plag. 6, Tabb. 11) 2) *Continuatio Arcanorum Natura detectorum* Ibid. An. 1697, in 4. (Alph. 1, plag. 2, Tab. 7) 3) *Arcana Natura ope & beneficio exquisitissimorum microscopiorum detecta, Lugd. Batav.* An. 1696, in 4. Alph. 3, Tabb. 26) 4) *Continuatio epistolarum datarum ad longe celeberrimam Regiam Societatem Londinensem. Lugd. Batav.* An. 1696, in 4. (plag. 16½, Tabb. 10) 5) *Epistola ad Societatem Regiam Anglicam & alios illustres viros, Lugd. Bat.* 1719, in 4. (Alph. 2, plag. 11, Tabb. 33). 6) *Epistola physiologica super compluribus natura arcanis, Delphis* An. 1719, in 4. (Alph. 2, plag. 16, Tabb. 31). Titulus generalis: ANTONII A LEEWENHOEK *Opera omnia, seu Arcana natura ope exactissimorum microscopiorum detecta experimentis variis comprobata, epistolis ad varios illustres viros, ut & ad integram, qua Londini floret, sapientem Societatem datis comprehensa*, impressus Lugduni Batavorum & scriptis istis diverso tempore nec eadem prorsus forma editis in unum fasciculum collectis præfixus. III°. JOHANNIS FRANCISCI GRIENDELS VON AACH *Micrographia curiosa* Germanica (*Norimberga* An. 1687, in 4. plag. 9, Tabb. 35) IV°. PHILIPPI BONANNI *Micrographia curiosa*, adjuncta observationibus circa viventia, quæ in rebus non viventibus reperiuntur (*Roma* An. 1691, in 4. 2 Alph. 12 plag. Tabb. 68).

§. 20. Inter scriptores Perspectivæ omnium maxime commendatur DESARGUES, cujus *methodum universalem exercendi Perspectivam* gallice conscriptam edidit ABRAHAMUS BOSSE, ex Gallico in Belgicum sermonem transtulit J. BARA. Prodiit *Amstelodami* An. 1686, in 8. (plag. 12, & figurarum æri incisarum 1 Alph.).

§. 21. Nec parum Perspectivæ studiosum juvant ANDREÆ ALBERTI Libri duo *De Perspectiva*, (*Norimb.* An. 1670, in fol. plag. 19, Tabb. 15): primis vero tyronum conatibus respondet BERNHARDI LAMY *Perspectiva* Gallice conscripta (*Parisiis* An. 1701, in 8).

§. 22. Concinnas Praxium Per-

ſpectivæ demonſtrationes dedit JOH. FRANCISCUS NICERON ex Ordine Minimorum, in hac arte excellens, in *Thaumaturgo Optico*, cujus tantum pars prima *Pariſiis* 1646, in fol. prodiit (2 Alph. 18 plag. Tabb. 42). Poſt mortem ejus immaturam Anno 1652, prodiit *Perſpectiva curioſa* Gallice conſcripta in 4. ſub ejuſdem nomine, in libros quatuor diviſa, in qua plura continentur, quam in Thaumaturgo.

§. 23. Ad praxin properantibus & theoriam ſpinoſam averſantibus ſatisfacit Anonymus Gallus e Societate Jeſu in *Perſpectiva practica* Gallice *Pariſiis* An. 1642, in 4. publicata & a JOHANNE CHRISTOPHORO REMBOLDO Germanice verſa atque *Auguſtæ Vindelicorum* An. 1710, in 4. edita (1 Alph. 8 plag. cum 150 Tabulis æri inciſis atque textui inſertis). Enimvero An. 1663. prodiit editio altera duabus partibus & auctior, & quoad primam emendatior ac locupletior. (Tom. I, Alph. 2, plag. 10. Tom. II, Alph. 1, plag. 13. Tom. III, Alph. 2, plag. 8). In parte ſecunda docetur Perſpectiva corporum inclinatorum: in tertia agitur de laquearibus & anamorphoſibus opticis, catoptricis & dioptricis.

§. 24. Praxin Perſpectivæ multis exemplis illuſtrat P. ANDREAS PUZZO in *Architectura Pictorum & Sculptorum.* Tomus prior prodiit *Romæ* An. 1693, in fol. poſterior ibidem An. 1700, in fol. Uterque totidem continet Tabulas æneas, quot folia, nimirum prior 102; poſterior 120, Prior Germanice prodiit *Auguſtæ Vindelicorum* An. 1706, in fol. poſterior ibidem An. 1709.

§. 25. An. 1711, G. J. GRAVESANDIUS, Juris Doctor, nunc Mathematum Profeſſor Lugdunenſis, *Hagæ Comitum* idiomate Gallico evulgavit Tentamen de Perſpectiva, in 8. (plag. 12, Tabb. 32). Titulus libelli: *Eſſai de Perſpective*, in quo multiplices regulas ſeu methodos demonſtrat.

§. 26. Cæterum ſcriptoribus Opticis adhuc accenſendus eſt HONORATUS FABRI, e Societate Jeſu, qui in *Synopſi Optica* (*Lugd.* An. 1667, in 4. 1 Alph. 8 plag.) illa omnia, quæ ad Opticam, Dioptricam & Catoptricam pertinent, breviter quidem, accurate tamen demonſtrat. *

* Imprimis commendari meretur ROBERTI SMITH Optices Syſtema integrum, quod ſub titulo: *A compleat Syſtem of Opticks*, prodiit *Cantabrigiæ*, An. 1738, in 4. reg. (Tom. I: Alph. 1. plag. 15, Tabb. 45. Tom. II, Alph. 2, Tabb. 38).

CAPUT

CAPUT IX.

De Astronomia.

§. 1. SCripta astronomica sunt varii generis. Aut enim observationes recensent, aut calculos motuum cœlestium trigonometricos & geometricos exponunt, aut tabulas Astronomicas complectuntur, aut usum globi cœlestis, aut denique corporum mundanorum rationem declarant.

§. 2. Veterum observationes, quas inter eminent observationes HIPPARCHI, conservavit PTOLEMÆUS in *Almagesto.* An. 882, apud Saracenos observationibus operam dedit ALBATEGNIUS. Ab An. 1457, Norimbergæ iisdem incubuit JOHANNES REGIOMONTANUS (vero nomine MÜLLER), cui successere discipuli JOHAN. WERNERUS & BERNHARDUS WALTHERUS, ab An. 1475, usque ad An. 1504, observationes suas continuantes. REGIOMONTANI atque WALTHERI observationes prodiere *Norimbergæ* cum quibusdam aliis REGIOMONTANI atque PURBACHII scriptis An. 1544, in 4. (plag. 22). Titulus operis: *Scripta* JOHANNIS REGIOMONTANI *de Torqueto, Astrolabio armillari, Regula magna Ptolemaica baculoque Astronomico & observationibus cometarum; item observationes motuum Solis ac stellarum tam fixarum, quam erraticarum; item libellus* M. GEORGII PURBACHI *de Quadrato Geometrico.* Ab An. 1509, COPERNICUS, post eum WILHELMUS Hassiæ Landgravius cum Mathematico CHRISTOPHORO ROTHMANNO & Mechanico suo JUSTO BYRGIO Cassellis, & TYCHO DE BRAHE Uraniburgi observarunt. Incepit observationes suas TYCHO An. 1582, easque continuavit usque ad An. 1601, majori & meliori instrumentorum apparatu, quam ante ipsum fecerat nemo. Omnes observationes hactenus recensitæ continentur in *Historia cœlesti*, quæ jussu FERDINANDI III, Imperatoris *Ratisbonæ* 1672, in fol. prodiit (12 Alph. 6 plag. Tabb. 3). Describuntur quoque in eadem instrumenta TYCHONIS; una exhibentur observationes MOESTLINI, SCHICKHARDI aliorumque. Ipse alias Tycho instrumenta sua descripsit An. 1602, in *Astronomiæ instauratæ Mechanica*, *Norimbergæ* An. 1602, in fol. edita (Alph. 1, plag. 11). WILHELMI vero Hassiæ Landgravii observationes, una cum observationibus REGIOMONTANI atque WALTHERI edidit WILLEBRORDUS SNELLIUS, *Lugduni Batavorum* An. 1618, in 4. (Alph. 1, plag. 13).

§. 3. Ma-

§. 3. Magis ſumtuoſo inſtrumentorum apparatu & majori ſtudio, quam TICHO, obſervationibus cœleſtibus vacavit JOHANNES HEVELIUS, Conſul Dantiſcanus. Inſtrumentorum apparatum deſcripſit Tomo primo *Machinæ cœleſtis* (*Gedani* An. 1673, in fol. reg. 5 Alph. 4 plag. Tabb. 30): Tomo ſecundo (*Gedani* An. 1679, in fol. 14 Alph. 6 plag.) obſervationes 48 annorum comprehendit. Dolendum vero, quod Tomi præſertim poſterioris exemplaria pleraque ferali flamma fuerint abſumta. Equidem ROBERTUS HOOKE in *Animadverſionibus in Tomum primum* Anglico ſermone editis *Londini* An. 1674, in 4. (plag. 11, Tabb. æn. 3) inſtrumenta *Heveliana* reprehendit ceu minus exacta; ſed celeberrimus HALLEIUS, conſenſu Societatis Regiæ Britannicæ, Dantiſcum An. 1679, profectus & inſtrumentorum, & obſervandi accurationem approbavit. Obſervationes, quas in gratiam hoſpitis inſtituit, una cum aliis reperiuntur in *Anno climacterico* ſ. *Rerum Uranicarum obſervationum quadrageſimo nono* (*Gedani* 1685, in fol. 2 Alph. 6 plag. Tabb. 8). Jam ante An. 1661, celeberrimus Galliæ Aſtronomus ISMAEL BULLIALDUS Dantiſcum venit Obſervatorium HEVELII viſurus & modum ejus obſervandi examinaturus. Quid uterque, BULLIALDUS nimirum atque HALLEIUS, de eodem ſenſerint; docent *Excerpta ex literis illuſtrium & clariſſimorum virorum ad* D. JOH. HEVELIUM *perſcriptis Judicia de rebus aſtronomicis ejuſdemque ſcriptis*, quæ *Dantiſci* An. 1683, in 4. (Alph. 1, plag. 5) *edidit* JOANNES ERICUS OLHOFIUS p. 67, 68, 71, 79, 187.

§. 4. In Anglia ſeculo ſuperiori obſervandi ſtudio clarus extitit JEREMIAS HOROCCIUS ab A. 1636 uſque ad An. 1640. Ejus obſervationes ex epiſtolis ad GUIL. CRABTRIUM, ſuum in ſtudiis aſtronomicis ſocium, excerptæ leguntur in *Operibus poſthumis* (*Londini* An. 1673, in 4. 3 Alph. 12 plag. Tabb. 2). Adjiciuntur excerpta ex ſchediaſmatis GUIL. CRABTRII de obſervationibus ab ipſo inſtitutis An. 1635, 36, 37 & 38.

§. 5. In Italia JOH. BAPTISTA RICCIOLUS ſuperiori ſeculo obſervatorem egit, qui præcipuas obſervationes ſuas in *Aſtronomia Reformata* (*Bononiæ* An. 1665, in fol. 6 Alph. 5 plag.) cum ſelectis veterum & recentiorum obſervationibus contulit & de Aſtronomiæ perfectione inde judicium tulit.

§. 6. Selectæ celeberrimi CASSINI aliorumque obſervationes extant in præſtantiſſimo opere, cujus titulus: *Recueil d'obſervations faites en pluſieurs voyages par ordre de Sa Majeſté, pour perfectionner l'Aſtronomie & la Géographie, avec divers Traités Aſtronomiques par Meſſieurs de l'Académie Royale des Sciences.* (*Pariſ.* An. 1693, in fol. 6 Alph. 12 plag. Tabb. 11).

Vide

Vide supra §. 37. c. 1. Ejusdem CASSINI, aliorumque Astronomorum Regiorum, CASSINI *junioris*, MARALDI atque PHILIPPI DE LA HIRE observationes complures extant in *Commentariis Academiæ Regiæ Scientiarum*, qui quotannis prodeunt: de quibus supra (§. cit.). Habemus quoque observationes non contemnendas in *Transactionibus Anglicanis*, *Miscellaneis Berolinensibus*, *Commentariis Petropolitanis*, *Actis Eruditorum* & *Diario Trevoltiensi*. Vide supra (§. 36, 38, 39).

§. 7. In Anglia longa annorum serie observationes cœlestes continuavit observator celeberrimus JOANNES FLAMSTEDIUS. Quænam in historia ejus cœlesti, ab Astronomis dudum desiderata, essent comparitura, in *Miscellaneis Berolinensibus* p. 263 & seqq. docetur. An. 1712, *Historiam cœlestem* FLAMSTEDII edidit HALLEIUS *Londini* in fol. reg. (Alph. 6, plag. 8, Tabb. 5) Libris duobus, quorum prior exhibet Catalogum stellarum Fixarum Britannicum novum & locupletissimum, una cum earundem Planetarumque omnium observationibus, sextante, micrometro &c. habitis; posterior transitus siderum per planum arcus meridionalis & distantias eorum a vertice complectitur. Nimirum An. 1704, aliquot Societatis Regiæ Sodalibus, FRANCISCO nimirum ROBARTES, CHRISTOPHORO WRENNO, ISAACO NEWTONO, DAVIDI GREGORIO & JOHANNI ARBUTHNOT ex chartis FLAMSTEDII observationes ejus edendas suis sumtibus commiserat serenissimus Daniæ Princeps GEORGIUS, Reginæ ANNÆ conjux: Sed cum moreretur, antequam liber observationum primus absolveretur, tandem Regina, FLAMSTEDII oculis in nascentia indies siderum phœnomena intentis & in ætate provecta minus acutis, hanc curam demandavit EDMUNDO HALLEIO, ut ea quæ adhuc deerant perficeret. Enimvero cum editio non prorsus esset ad mentem FLAMSTEDII, de nova ipse cogitavit: cui tamen immortuus est An. 1719, die ultima Decembris, cum magna ejus pars typis jam esset descripta, ita ut tandem denuo HALLEIUS editionem hanc novam ad umbilicum perducere teneretur. Prodiere itaque *Historiæ cœlestis Britannicæ* Volumina tria, Autore JOANNE FLAMSTEDIO, Astronomo Regio, *Londini* in fol. maj. An. 1725, (Alph. 13). Volumen I, continet stellarum fixarum & planetarum omnium observationes, sextante & micrometro peractas, subjunctis locis, quæ ex observationibus deducta sunt. Volumen II, complectitur fixarum stellarum & planetarum omnium transitus, per planum arcus meridionalis & distantias eorum a vertice, nec non Solis, Lunæ & Satellitum Jovis observationes arcu meridionali habitas & loca planetarum

rum inde derivata ab An. 1689, ad An. 1720. Volumen III, comprehendit Historiam Astronomiæ, Catalogos fixarum ante autorem editos una cum ABRAHAMI SHARPII Indice fixarum australium in nostro hemisphærio non conspicuarum & Catalogum Britannicum Autoris ad A. C. 1689 cui subjunguntur longitudines & latitudines stellarum fixarum, quæ a Luna tegi possunt, sigillatim & appendicula Tabularum astronomicarum a SHARPIO constructarum. Optandum quoque foret, ut selectæ observationes Hafnienses ROEMERI, Berolinenses KIRCHII ac viduæ ipsius, Norimbergenses EIMARTI atque WURTZELBAUERI lucem publicam adspicerent.

§. 8. FRANCISCI BLANCHINI *Observationes astronomicas & geographicas per Italiam passim habitas* nuperrime *Verona* in fol. edi curavit EUSTACHIUS MANFREDI, Astronomus Bononiensis.

§. 9. Observationes physicæ, mathematicæ, atque botanicæ jussu Regis Christianissimi in America Meridionali & India occidentali ab An. 1701, usque ad annum 1712, a LUDOVICO FEUILLE'E, Minimo, factæ sub titulo: *Journal des Observations physiques, mathématiques, & botaniques* prodiere *Parisiis* duobus Vol. in 4. reg. 1714, & 1725, (Vol. I, Alph. 4, plag. 6, Tabb. æn. 66. Vol. II, Alph. 3, plag. 5, Tabb. æn. 57, & An. 1729. ST. SOUCIET, e Societate Jesu, idiomate Gallico *Paris.* in 4. reg. (Alph. 1, plag. 18, Tabb. 8) publicæ luci exposuit *Observationes mathematicas, astronomicas geographicas, chronologicas & physicas, ex antiquissimis Sinarum libris excerptas, & recentius a Patribus Societatis in India & China factas.* Addit An. 1732, Tomum secundum, qui continet *Historiam Astronomiæ Sinarum* a R. P. GAUBIL e Societate Jesu conscriptam, cum dissertationibus (Alph. 2, plag. 5, Tabb. 3). Huc etiam referendæ sunt FRANCISCI NOEL, Societatis Jesu, *Observationes mathematicæ & physicæ in India & China factæ ab* An. 1684, *usque ad* An. 1708, quæ *Pragæ* 1710, in 4. (plag. 14, Tab. 1) prodierunt.

§. 10. Astronomiam Geometricam inter veteres justo volumine exposuit CLAUDIUS PTOLEMÆUS anno Christi 147 mortuus. Opus ejus, quod μεγάλη σύνταξις inscribitur, A. C. 827, jussu MAIMONIS Regis Saracenorum in Arabicum translatum & An. 1528 ex Arabico in Latinum versum a GEORGIO TRAPEZUNTIO & a LUCA GAURICO Mathematum Professore Neapolitano revisum, illoque anno primum editum. An. 1551, idem cum ejusdem PTOLEMÆI scriptis Astrologicis, libris nempe quatuor *de judiciis*, *Centiloquio* & *significationibus stellarum inerrantium* sub titulo: Cl. PTOLEMÆI *omnia, quæ extant, Opera præter Geographiam,*

graphiam, *Basileæ* in fol. (*6* Alph.) opera ERASMI OSWALDI recusum.

§. 11. Cum ipsum Astronomiam integram complectatur, sed ad captum tyronum minime sit accommodatum; GEORGIUS PURBACHIUS in commodiorem formam id redigere cœpit. Sed cum vix cœpto labore rebus humanis valedicere cogeretur; REGIOMONTANUS discipulus, suasu Præceptoris, telam pertextam absolvit. Recusi sunt ejus Libri tredecim *in* PTOLEMÆI *magnam compositionem*, *quam Almagestum vocant*, *Noribergæ* 1550, in fol. (2 Alph. 11 plag.) & in iis uuiversa doctrina de cœlestibus motibus, magnitudinibus, eclipsibus &c. in epitomen redacta proponitur. Commendantur merito Astronomiæ studiosis, præsertim si qui Astronomiam veterem cognoscere in animum induxerint.

§. 12. Juxta formam *Almagesti* inter Arabes ALBATEGNIUS opus *de Scientia stellarum* composuit, *Norimbergæ* An. 1537, & *Bononiæ* An. 1545, in 4. editum, in quo ex propriis observationibus Astronomiam perficere studet.

§. 13. Seculo decimo sexto NICOLAUS COPERNICUS in libris *6 Revolutionum cœlestium* aliquoties recusis, resuscitato PHILOLAI de motu Telluris dogmate, primus ad theoriam cœlo consonam fundamenta posuit. Prostat inter alias editiones *Basileensis* An. 1566, in fol. (Alph. 4. plag. 14). COPERNICUM secutus PHILIPPUS LANSBERGIUS theorias motuum cœlestium faciles dedit (§. 26, cap. 1).

§. 14. Ex adverso autem CHRISTIANUS SEVERINUS LONGOMONTANUS in *Astronomia Danica*, in qua integram Astronomiam pertractat & regulas exemplis veris illustrat, theorias intricatiores proposuit, cum motum Telluris annuum circa Solem in Astronomiam cum TYCHONE admittere nollet. (*Amstelod.* An. 1640, in fol. 6 Alph.) Etenim extra omnem controversiam positum est, motus Planetarum per hypothesin Terræ motæ non modo facilius, quam in hypothesi Terræ quiescentis explicari posse; verum etiam loca planetarum in ista computata cum cœlo demum consentire. Unde etiam Inquisitores in Italia permittunt, ut eadem utantur Astronomi, etsi eam pro veritate demonstrata venditari non ferant.

§. 15. Omnes omnino Astronomi usque ad KEPPLERUM motum planetarum circularem statuerunt: unde theoriæ ipsorum cœlo non satis responderunt. Hanc Astronomiam circularem omnium optime exposuit ANDREAS TACQUET in octo de *Astronomia* libris (§. 28, cap. 1). Dolendum vero, quod præcepta nullis exemplis illustraverit, ut magis inservirent studiis tyronum.

§. 16. Enimvero vir acerrimi judicii ingeniique sagacissimi JOHANNES

NES KEPLERUS observationibus TYCHONIS (quas etiam adhibuerunt LONGOMONTANUS atque LANSBERGIUS) feliciſſime uſus in *Commentariis de motibus ſtellæ Martis* ſeu *Aſtronomia nova* αἰτιολογητῷ An. 1609, in fol. (4 Alph.) theoriam planetarum ellipticam propoſuit & in *Epitome Aſtronomiæ Copernicanæ* (*Franc.* 1635, in 8. 2 Alph. 15 plag.) ad omnium planetarum motus ſupputandos adhibuit, ac primus in cauſas phyſicas motuum cœleſtium inquirere cœpit. Hanc theoriam cauſis phyſicis convenientem demonſtravit NEWTONUS lib. 3 Princ. Mathem. Philoſ. Nat. itemque LEIBNITIUS in Tentamine de cauſis motuum cœleſtium phyſicis, quod legitur in *Actis Eruditorum* An. 1689, p. 82, quod idem ſuo modo oſtendere conatus PHILIPPUS VILLEMOT in *Novo ſyſtemate motus Planetarum*, *Lugduni* An. 1707, in 12. (plag. 12, Tabb. 12) edito. Phænomenis rectius, quam cæteras hypotheſes, ſatisfacientem deprehenderunt Aſtronomi.

§. 17. Equidem KEPLERI inventa ſprevit LANSBERGIUS ſuaque iiſdem antepoſuit: ſed optime illum contra hujus inſultus defendit HOROCCIUS in poſthumis (§. 4), qui in extollendis laudibus KEPLERI, a quo, ſub initium ſtudii aſtronomici, LANSBERGII magnificis promiſſis & nimium acerbis in KEPLERUM ſtricturis factus fuerat alienior, veluti extra ſeipſum rapitur.

§. 18. ISMAEL BULLIALDUS in *Aſtronomia Philolaica* (*Pariſiis* An. 1645, in fol. 7 Alph. 20 plag.) KEPLERI theoriam emendare conabatur, ut ſcilicet calculus magis geometricus fieret, cum KEPLERUS regula poſitionum interdum uti cogatur (§. 691, *Aſtron.*): oſtendit vero SETHUS WARDUS, Aſtronomiæ in Academia Oxonienſi Profeſſor, in *Inquiſitione in Aſtronomiam Philolaicam* BULLIALDI, quæ Tractatui de Cometis ſubjecta prodiit *Oxonii* An. 1653, in 4. (plag. 14), errores quoſdam ab ipſo fuiſſe commiſſos: quos agnoſcens BULLIALDUS in *Fundamentis Aſtronomiæ Philolaicæ clarius explicatis & aſſertis, adverſus* WARDI *impugnationem* (*Pariſiis* An. 1657, in 4. plag. 7) emendavit. Cæterum WARDUS *Idea* quoque *Trigonometriæ demonſtratæ*, quæ cum prælectione *de Cometis*, *Oxonii* An. 1654, in 4. (plag. 3) prodiit, inquiſitionem aliquam in BULLIALDI Aſtronomiæ Philolaicæ fundamenta adjecit.

§. 19. SETHUS WARDUS in *Aſtronomia Geometrica* (*Londini* 1656, in 8. reg. $14\frac{1}{2}$ plag.) methodum geometricam propoſuit motus ſiderum computandi; ſed a veris motuum regulis per KEPLERUM ſtabilitis recedit. Eandem anno ſequenti propoſuit *Comes* DE PAGAN in *Theoria Planetarum*, *Pariſiis* An. 1657, in 4. idiomate patrio edita. Non ignoravit eam KEPLERUS; ſed ex *Epitome Aſtronomiæ Copernicanæ* haud obſcure

ſcure colligitur, quod ideo rejecerit, quia veris naturæ legibus adverſam reperit.

§. 20. BULLIALDI hypotheſin excoluit VINCENTIUS WING in *Aſtronomia Britannica* (*Londini* An. 1669, in fol. 7 Alph. 5 plag.) ubi præcepta ſingula Aſtronomiæ practicæ veris exemplis illuſtrantur ad captum tyronum ſtudii Aſtronomici. Præmittit *Trigonometriam* planam & ſphæricam, in qua exemplis illuſtrantur problemata, & in ſphærica exhibet regulam catholicam NEPERI.

§. 21. *Wardianam* ad numeros revocavit JOHANNES NEWTON in *Aſtronomia Britannica* patrio ſermone conſcripta (*Lond.* 1657, in 4. 1 Alph. 20 plag.). Eandem excoluit THOMAS STREETE in *Aſtronomia Carolina*, *Londini* An. 1661, in 4. (plag. 29) primum edita & non ſine augmento ibidem 1710. in 4. (2. Alph. plag. 3,) recuſa. Id peculiare habet, quod motum Apheliorum & Nodorum ſuſtulerit. Aſtronomiam hanc Carolinam ex idiomate Anglico in Latinum tranſtulit GABRIEL DOPPELMAYER & *Norimbergæ* An. 1705, in 4. (Alph. 1, plag. 13, Tabb. 5) edidit.

§. 22. Omnia Aſtronomorum tam veterum, quam recentiorum, hypotheſes atque inventa, quæ tunc temporis proſtabant, in unum volumen congeſſit JOHANNES BAPTISTA RICCIOLUS e Societate Jeſu in *Almageſto Novo* (*Bonon.* An. 1651, in fol. 16½ Alph.). Contra DAVID GREGORIUS in *Elementis Aſtronomiæ Phyſicæ & Geometricæ* (*Oxoniæ* 1702, in fol. 5 Alph. 12 plag.) recentiorem Aſtronomiam expoſuit, COPERNICI, KEPLERI atque NEWTONI inventis ſuperſtructam, quorum ille verum ſyſtema mundi, iſte veras planetarum orbitas ac motuum leges, hic tandem omnium cauſas phyſicas detexit. Multum præſtantiæ operis accederet, ſi numeris ex recentioribus obſervationibus illuſtraretur. In Anglia in linguam Anglicam verſa ſunt hæc Aſtronomiæ Elementa: Latina vero recuſa ſunt *Genevæ* An. 1726, in 4. (Alph. 5, Tabb. 46) cum nonnullis additamentis.

§. 23. Nucleum Aſtronomiæ recentioris exhibuit GUILIELMUS WHISTON in *Prælectionibus Aſtronomicis* (*Cantabrigiæ* An. 1707, in 8. reg. 1 Alph. 6 plag.) ſolam tamen partem theoricam pertingit. Idem fuit inſtitutum JOHANNIS KEILL in *Introductione ad veram Aſtronomiam* (*Oxoniæ* An. 1718, in 8. Alph. 1, plag. 9½, Tabb. 2), in qua recentiſſima continentur Aſtronomorum inventa. Alias Tyronibus inprimis commendandi ſunt NICOLAI MERCATORIS *Inſtitutionum Aſtronomicarum* Libri duo (*Londini* An. 1676, in 8. 1 Alph.), in quo & Sphærica, & theorica, juxta hypotheſes tam veteres, quam recentiores, breviter explicatur & exemplis illuſtratur, calculus quoque aſtronomicus perſpicue docetur.

§. 24. Quodsi cui volupe fuerit, theoricas Veterum animi gratia cognoscere; ei satisfaciet PURBACHIUS in *Theoricis Planetarum* sæpius editis. Recusæ sunt *Basileæ* An. 1569, in 8. cum REGIOMONTANI *disputationibus contra Cremonensia in planetarum theoricas deliramenta* & JOHANNIS ESSLERI *speculo Astrologico* (plag. 18). Accessere huic editioni CHRISTIANI WURSTISII, Mathematum Professoris Basileensis, *quæstiones novæ in illas theoricas* (1 Alph. 5 plag.). Explicat autem PURBACHIUS in tyronum gratiam solas theoricas planetarum, forma calculi geometrici neglecta, quæ ex REGIOMONTANI *Epitome Almagesti* PTOLEMÆI hauriri debet. Hasce Theoricas prolixo ac perspicuo Commentario illustravit ERASMUS OSWALDUS SCHRECKENFUCHSIUS, qui *Basileæ* An. 1556, in fol. (Alph. 5, plag. 5) prodiit, ita ut Astronomiam veterem, qualem tradidit PTOLEMÆUS, omnium optime ex hoc opere haurire possint tyrones. Theoricam Astronomiam tantummodo explicavit in gratiam tyronum PURBACHIUS, quia isto tempore in Scholis doctrina sphærica tradebatur ex JOANNIS DE SACRO BOSCO libello *de Sphæra*, sæpissime recuso, quem prolixo Commentario illustravit CLAVIUS Tomo tertio Operum (§. 24). MICHAEL MOESTLINUS, Matheseos Professor Tubingensis, KEPLERI Præceptor, in *Epitome Astronomiæ* (*Tubingæ* An. 1610, in 8. 1 Alph. 12 plag.) non modo theoricas Planetarum, sed & partem Astronomiæ sphæricam explicat.

§. 25. Tabulæ Astronomicæ antiquissimæ sunt *Ptolemaicæ*, in PTOLEMÆI *Almagesto*; sed hodie cum cœlo non amplius consentiunt. Eas An. 1252, corrigi curavit ALPHONSUS XI Rex Castiliæ, usus inprimis opera ISAACI HAZAN Judæi, impensis 400000 aureorum factis. Hinc enatæ sunt *Tabulæ Alphonsinæ*, quibus ipse Rex præfationem præmisit. Sed mox harum etiam defectum agnoverunt Astronomi periti PURBACHIUS & REGIOMONTANUS: unde REGIOMONTANUS & post ipsum WALTHERUS atque WERNERUS observationibus cœlestibus incubuerunt; non tamen fata permisere, ut iis emendandis manum admoverent. Sane *Tabulæ resolutæ*, quas dedit REGIOMONTANUS, ex Alphonsinis derivatæ. Hasce correctas & locupletatas edidit SCHONERUS An. 1536. Ea reperire licet in Operibus ejus mathematicis, de quibus postea dicemus. Neque ab his abludunt *Tabulæ resolutæ de supputandis siderum motibus* JOANNIS VIRDUNGI HASFURDII, quas An. 1542, *Norimbergæ* edidit JACOBUS CURIO, nunquam antea typis excusas, in 4. (plag. 15), nisi quod sint breviores.

§. 26. NICOLAUS COPERNICUS in libris *Revolutionum cœlestium* tabulis Alphonsinis alias substituit ex recentioribus & partim propriis observationibus

tionibus a se supputatas; sed ex COPERNICI observationibus & theoriis mox ERASMUS REINHOLDUS *Tabulas Prutenicas* procudit, aliquoties recusas. Utor ego editione *Tubingensi* An. 1571, in 4. 2 Alph. 15 plag.

§. 27. Tabularum Prutenicarum imperfectionem juvenis agnovit TYCHO DE BRAHE: qua agnita permotus, ut tanto cum fervore observationes cœlestes venaretur. Ipse tamen nonnisi Solis ac Lunæ motus inde restituit *Progymnasmatum* Tomo primo. Sed mox iisdem utebantur LONGOMONTANUS, qui in *Astronomia Danica* exemplo PTOLEMÆI & COPERNICI theoricis singulorum Planetarum *Tabulas* motuum subjunxit, *Danicarum* nomine hodienum celebratas, & KEPLERUS, cujus opera prodiere *Tabulæ Rudolphinæ* (*Ulmæ* An. 1627, in fol. 2 Alph. 20 plag.), quæ hodienum magno in pretio habentur, anterioribus omnibus prælatæ. Has in aliam formam transmutavit MARIA CUNITIA, cujus *Urania protia* sive *Tabulæ Astronomicæ mire faciles* vim hypothesium physicarum a KEPLERO proditarum complexæ, facillimo calculandi compendio, sine ulla Logarithmorum mentione phænomenis satisfacientes Latine & Germanice *Olsnæ* in Silesia An. 1650, in fol. (6 Alph. 4 plag.) prodiere, ut scilicet calculus *Rudolphinus* difficilis facilior redderetur. Idem institutum fuit MERCATORIS in *Astronomicis Institutionibus* (§. 23) & JOH. BAPTISTÆ MORINI, cujus *Tabulæ Rudolphinæ* in compendium redactæ versioni Latinæ Astronomiæ Carolinæ STREETII subjunctæ (§. 21).

§. 28. Equidem LANSBERGIUS Tabularum Rudolphinarum fidem sublestam reddere tentavit & *Tabulas motuum cœlestium perpetuas*, quas vocat, condidit (§. 26, cap. 1) sed non solum HOROCCIUS hominis arrogantiam retudit in *Astronomia Kepleriana defensa*, quæ maximam posthumorum partem absolvit (§. 4); verum etiam reliqui Astronomi parum eidem tribuerunt. Similiter *Rudolphinarum* autoritatem non imminuere *Tabulæ Britannicæ* WINGII (§. 20), quæ in ipsius *Astronomia Britannica* leguntur, & NEWTONI, quas in sua *Astronomia Britannica* proposuit (§. 21), nec Gallicæ Comitis DE PAGAN (*Paris.* An. 1658, in 4. 1 Alph. 11 plag.), *Novalmagestica* RICCIOLI, quæ extant in ejusdem *Astronomia Reformata* (§. 22), *Philolaicæ* BULLIALDI, quæ leguntur in *Astronomia Philolaica* (§. 18) & *Carolinæ* STREETII in *Astronomia Carolina* (§. 21). Inter meliores tamen censentur Philolaicæ & Carolinæ, ita ut ob benignum FLAMSTEDII, optimi hac in re arbitri, judicium Carolinas *Prælectionibus* suis *Astronomicis* subjunxerit WHISTON (§. 23).

§. 29. Novas quoque Tabulas ex datis *Keplerianis* & *Bullialdinis* juxta propriam hypothesin Cono-ellipticam

cam supputavit JOH. JACOBUS ZIMMERMANN Ecclesiæ Würtembergo-Bieticanæ Diaconus, in *Prodromo Bicipite Cono-elliptica & a priori demonstrata Planetarum Theorices* (*Stutgardiæ* An. 1679, in 4. plag. 15); sed nullam hactenus in foro Astronomico autoritatem adeptæ.

§. 30. *Tabulæ* omnium novissimæ sunt *Ludoviciana*, quas Astronomus præclarus PHILIPPUS DE LA HIRE ex solis observationibus, citra ullius hypotheseos subsidium, deduxit: quod ante inventa micrometra, tubos & horologium oscillatorium impossibile habebatur. Prodiere *Parisiis* An. 1702, in 4. (1 Alph. 4 plag. Tabb. 4) cum ante jam An. 1687, Tabulæ Solares & Lunares sub titulo *partis prioris Tabularum Astronomicarum* (in 4. plag. 17) lucem adspexissent. Haberi possunt pro Tabulis Rudolphinis correctis. Dudum etiam in manibus Astronomorum versantur JOH. DOMINICI CASSINI *Tabulæ astronomicæ* * & in Anglia novas condidit HALLEIUS.

§. 31. JOHANNES HEVELIUS in *Prodromo Astronomiæ* (*Gedani* An. 1690, in fol. 4 Alph. 7 plag. Tab. 1) cum *Catalogo fixarum ex propriis observationibus deducto* Tabulas quoque Solares exhibuit domesticis observationibus superstructas, quæ præstantissimæ habentur. Optandum vero fuisset, ut fata permisissent, quo reliquorum quoque Planetarum Tabulas conderet observationum suarum fructum laturus celeberrimus Autor.

§. 32. Primus fixarum Catalogum confecit ex domesticis observationibus HIPPARCHUS, quem ad suum tempus reductum PTOLEMÆUS exhibuit in *Almagesto* lib. 7. Novum dedit TYCHO *Progymnasmatum* Tomo primo p. 257, & seqq. quem extendit KEPLERUS in Rudolphinis. Exhibet fixarum Catalogum, sed tantummodo correctum, non vero ex propriis observationibus conditum RICCIOLUS in *Astronomia Reformata*. Ast *Tabulæ Longitudinis* ac *Latitudinis stellarum fixarum* ex observatione ULUGH BEIGHII, TAMERLANI Magni Nepotis, ex MSC. Persicis Latine vertit, Commentariis illustravit & *Oxonii* An. 1665, in 4. (1 Alph. 13 plag.), edidit THOMAS HYDE. Addit MUHAMMEDIS TIXINI *Tabulas declinationum & ascensionum rectarum*. HEVELIUS *in Prodromo* catalogos fixarum omnes, qui hactenus prostant, una exhibet atque inter se comparat.

§. 33. Enimvero locupletissimus Fixarum omnium, quæ conspici possunt, ex propriis observationibus conditus a FLAMSTEDIO & sub titulo: *Catalogi Fixarum Britannici*, exhibetur in Astronomi summi Historia

* Edidit nuperrime JACOBUS CASSINI Domin. filius, *Tabulas Astronomicas*, una cum *Elementis Astronomiæ* gallice. *Parisiis*. in 4. 2 Vol. An. 1740. Primum volumen, quod Astronomiam complectitur, habet Alph. 3, plag. 15, Tabb. 20. Alterum quod Tabulis destinatur, constat Alph. 1, plag. 3, Tabb. 5.

ſtoria cœleſti, de qua abunde diximus ſuperius (§. 7).

§. 34. Aſtra deſcribunt & ſchematiſmis illuſtrant JOHANNES BAYERUS in *Uranometria*, *Ulmæ* An. 1661, quæ prodiit textu in 4. figuris in folio impreſſis (plag. 13, Tabb. 48), qua in citandis ſtellis utuntur Aſtronomi, & JOHANNES HEVELIUS in *Firmamento Sobieſciano* (*Gedani* An. 1690, in fol. plag. 6, Tabb. æn. 54). Optandum vero fuiſſet, ut literas, quibus ad indigitandas ſtellas uſus fuit BAYERUS, etiam HEVELIUS retinuiſſet: id quod fecit JOHANNES FLAMSTEDIUS in opere magnifico *Atlantis cœleſtis*, quod *Londini* An. 1729, in fol. reg. (plag. 5, Tabb. 29) prodiit. Compendia uſibus tyronum ſervientia ſunt ÆGIDII STRAUCHII *Aſtrognoſia* (*Wittebergæ* An. 1684, in 12. plag. 9, Tabb. 25) & WILHELMI SCHICKARDI *Aſtroſcopium* (*Lipſiæ* An. 1698, in 12. plag. 6, Tabb. 2).

§. 35. Globi cœleſtis conſtructionem & uſum perſpicue explicavit SCHONERUS in Tractatu, qui inter opera ipſius extat. Recentius præter alios uſum globi cœleſtis docent GUILIELMUS BLEAU in *Inſtitutione Aſtronomica de uſu globorum* (*Amſtelod.* An. 1690, in reg. 8. plag. 16) & BION in libro Gallico ejuſdem argumenti, qui ſub titulo *Uſage des Globes céleſtes & terreſtres, & des ſphéres*, *Pariſiis* An. 1699, in 12. reg. (16 plag. Tabb. 26) prodiit, ac nuper auctior recuſus.

§. 36. Librum BIONIS Germanice vertit & annotationibus nonnulliſque additamentis locupletavit D. CHRISTIANUS PHILIPPUS BERGER. Prodiit *Lemgoviæ* ſub titulo: *Des Herrn BIONS Abhandlung von der Welt-Beſchreibung und dem Gebrauch derer Himmels und Erd-Kugeln auch Sphären* An. 1736, in 8. (Alph. 1, plag. 19, Tabb. 35). Explicat hic Autor in altera præſertim editione, quæ ex Aſtronomia & Geographia tanquam cognita ſupponi debent, ſiquidem uſum utriuſque Globi, terreſtris ſcilicet ac cœleſtis, intelligere volueris. Adduntur etiam phyſica de Meteoris & alia, quæ ad Calendarii notitiam faciunt.

§. 37. Cum LOTHARIUS ZUMBACH DE KOESFELD, Med. D. poſtea Matheſeos Profeſſor in illuſtri Collegio Carolino, quod Caſſellis erat, novos Globos, cœleſtem juxta Catalogum fixarum HEVELII & terreſtrem ex recentiſſimis obſervationibus, GERARDO VALK chalcographo conſtruxiſſet, adornationem quoque & diſtributionem ac uſum Globorum deſcripſit. Enimvero quia Globus cœleſtis tantummodo ſatisfacit phænomenis primi mobilis, novum excogitavit inſtrumentum aſtronomicum, quale adhuc deſiderari arbitrabatur, quo loca & motus Planetarum atque ſtellarum fixarum proprii in longitudinem & latitu-

latitudinem Zodiaci, eclipses Solis & Lunæ, occultationes stellarum, aliaque plurima inde derivata, absque calculo exacte, facile, ac promte exhibentur. Instrumentum hoc *Planetolabium* appellavit & GERARDUS VALK dextre idem præparavit. Descriptioni itaque Globorum adjunxit descriptionem Planetolabii sui, explicans omnem ejus rationem & usum. Utraque descriptio sub titulo: *Praxis Astronomiæ utriusque, ut & Geographiæ exercita per usum Globi cœlestis & Terrestris, tum & Planetolabii*, prodiit *Amstelodami* An. 1700, in 4. Descriptio globorum constat plag. 18, Tabb. 4. Planetolabii plag. 9, Tabb. 2. Supponit illa ad manus esse Globos, hæc Planetolabium. Equidem SCHONERUS jam invenerat Organum Uranicum, quod vocat, e quo facillime, absque scrupulosa supputatione, veri mediique planetarum motus reperiuntur, & quod sub finem operum describitur; cum tamen ejus constructio nitatur hypothesibus Veterum, ZUMBACHII vero Planetolabium secundum hypothesin recentiorem ellipticam, & *Bullialdi* inprimis Astronomiam Philolaicam fuerit constructum, & multo accuratius exhibeat loca planetarum; quin non inutilem operam sumserit ZUMBACHIUS dubitandum non est. Ne quid in mechanica Astronomiæ Theoricæ parte desiderari posset, addidit idem *Jovilabium* & *Saturnilabium*, quorum isto loca Satellitum Jovis, hoc autem loca Satellitum Saturni, absque calculo, ad datum quodcunque tempus determinantur. *Descriptio Jovilabii* prodiit *Amstelodami* An. 1716, in 4. (plag. 6, Tab. 1); *Saturnilabii* vero ibid. An. 1726, in 4. (plag. 9, Tabb. 2).

§. 38. Construxit ZUMBACHIUS Planetolabium suum ad imitationem Astrolabii, instrumenti ad explicanda phænomena motus primi dudum adhibiti. Astrolabii constructionem & usum rigidissime demonstravit CLAVIUS in Tractatu *de Astrolabio*, qui in Operibus ejus legitur (§. 24, cap. 1). Etsi autem CLAVIUS tantummodo de polari, quod vocatur, egerit; tanta tamen usus prolixitate & schemata construxit tam implexa ac intricata, ut a nullo mortalium totum fuisse perlectum judicet TACQUETUS. Quamobrem ipse lib. 3 Opticæ, qui de projectione astronomica agit, doctrinam hanc magis perspicue proponit, & non minus æquinoctiale, quam polare explanat. Ceterum quoad doctrinam de projectione sphæræ, tam orthographica, quam stereographica, commendari meretur Tractatus, quem sub titulo: *A Treatise of the sphere* patrio sermone *Londini* An. 1714, edidit JOANNES WITTY (plag. 15, Tabb. 10). Tyronibus autem, qui usum Astrolabii cognoscere student, satisfaciet BION in Tractatu, qui *Parisiis* An. 1702, in 12. reg. (plag. $10\frac{1}{2}$, Tabb. 9). sub titulo: *L'Usage des Astrolabes tant universels que particuliers* lucem adspexit.

§. 39. Ad

§. 39. Ad naturam ſiderum & rationem univerſi cognoſcendam conducunt, præter RICCIOLUM in Almageſto, CHRISTOPHORI SCHEINERI *Roſa Urſina* (*Bracciani* An. 1626, uſque ad An. 1630, in fol. 11 Alph. cum figuris multis textui inſertis) opus de maculis ſolaribus abſolutiſſimum; ejuſdem *Diſquiſitiones Mathematicæ de controverſiis & novitatibus aſtronomicis* (*Ingolſtadii* An. 1614, in 4. plag. 12); opuſculum *de refractionibus cœleſtibus* (*Ingolſtadii* An. 1617, in 4.) & ejuſdem *Sol ellipticus* (*Auguſtæ Vindelicorum* in 4. (plag. 5); GALILÆI Tractatus *de maculis ſolaribus* (*Romæ* An. 1613) & *Nuncius ſidereus* aliquoties recuſus; ejuſdem *Dialogi de Syſtemate mundi* (*Lugd. Bat.* An. 1699, in 4. 3 Alph.), opus lectu digniſſimum; JOHANNIS KEPLERI Tractatus Germanicus *de Cometa* anni 1607, (*Halæ* 1608, in 4. plag. 5) & *De Cometis libelli tres* (*Auguſtæ Vindelicorum* An. 1619, in 4. plag. 20, Tab. 1): ejuſdem *Prodromus diſſertationum coſmographicarum, continens Myſterium coſmographicum de admirabili proportione orbium cœleſtium, deque cauſis cœlorum numeri, magnitudinis, motuumque periodicorum genuinis & propriis, demonſtratum per quinque regularia corpora Geometrica*, cum Narratione GEORGII JOACHIMI RHETICI de libris revolutionum NICOLAI COPERNICI (*Tubingæ* An. 1596, in 4. 1 Alph.): ejuſdem *Somnium* ſeu *opus poſthumum de Aſtronomia lunari* (*Francof.* An. 1634, in 4. 1 Alph.): ejuſdem *Harmonica Mundi* (*Lincii* An. 1619, in fol. 3 Alph. 13 plag.): ejuſdem *Hyperaſpiſtes* TYCHONIS (*Franc.* An. 1625, in 4. plag. 28) adverſus SCIPIONIS CLARAMONTII *Antitychonem*, in quo contra TYCHONEM BRAHE demonſtrare ſatagit cometas eſſe ſublunares, non cœleſtes (*Venetiis* An. 1621, in 4. 2 Alph. 2 plag.); HEVELII *Selenographia* (*Gedani* An. 1647, in fol. 6 Alph. 10 plag. Tabb. 111), in quo ejus facies ſecundum omnes phaſes accuratiſſime delineatur: ejuſdem *Prodromus Cometicus*, quo hiſtoria Cometæ An. 1664 exorti, curſum, facieſque diverſas capitis ac caudæ, accurate delineatas complectens, nec non *Diſſertatio de Cometarum omnium motu, generatione, variiſque phænomenis* exhibetur (*Gedani* An. 1665, in fol. plag. 17, Tabb. 3): ejuſdem *Deſcriptio Cometæ* An. 1664, (*Gedani* An. 1666, in fol. 2 Alph. 5 plag. Tabb. 7): ejuſdem *Epiſtola de Cometa* An. 1672, (*Gedani* An. 1672, in fol. 2 plag. Tab. 1): ejuſdem *Cometographia* (*Gedani* An. 1668, in fol. 10 Alph. 19 plag. Tabb. 38), opus de Cometis abſolutiſſimum: ejuſdem *Diſſertatio de nativa Saturni facie* (*Gedani* An. 1656, fol. 12 plag. Tabb. 9), ubi phaſes Saturni delineat & ad cauſas ſuas revocare ſtudet: ejuſdem *Mercurius in Sole viſus, cum* HOROCCII *Venere in Sole viſa, & Hiſtoria*

stellæ mira (*Gedani* An. 1662, in fol. 2 Alph. 2 plag. 10 Tabb.); CHRISTIANI HUGENII *Systema Saturninum* (*Hagæ Comitis* An. 1659, in 4. plag. 12), in quo annulus Saturni describitur & unus ejus satellitum annunciatur, & inprimis ejusdem *Cosmotheoros* (ibid An. 1698, in 4. plag. 18, Tabb. 5, item *Leoburgi* 1704, in 8. plag. 8, Tabb. 5), in quo natura planetarum ex conjecturis probabilibus eruitur: FRANCISCI BLANCHINI *Hesperi & Phosphori Nova phænomena, sive Observationes circa Planetam Veneris* (*Romæ* An. 1728, in fol. Alph. 1, plag. 2, Tabb. 10), in quo opere maculæ Veneris exactissime delineantur, & Veneri eadem opera impenditur, quam in Luna consumsit HEVELIUS, præter alia ad parallaxin Veneris & ejus a Terra distantiam spectantia: DE MAUPERTUIS Discursus Gallice conscriptus *de Figuris differentibus astrorum* (*Paris.* An. 1732, in 8. plag. $5\frac{1}{2}$): JACOBI BERNOULLI *Conamen novi systematis Cometarum* (*Amstelodami* An. 1682, in 8. $6\frac{1}{2}$ plag. Tabb. 8): JOH. BAPTISTÆ DU HAMEL *Astronomia Physica* (Tom. 1. Operum Philos. *Norimb.* An. 1681, in 4): WILHELMI DERHAM *Theologia Astronomica*, quæ sub titulo: *Astro-Theology*, *Londini* An. 1715, in 8. (plag. 20, Tabb. 3) prodiit, & *Hamburgi* ex Anglico sermone in Germanicum translata lucem adspexit.

§. 40. Huc etiam referendi sunt Autores qui motuum cœlestium causas physicas tradere aggressi sunt; KEPPLERUS in Physica cœlesti seu Commentariis de motibus stellæ Martis, & in Epitome Astronomiæ Copernicanæ (§. 16), NEWTONUS in Principiis Philos. Natur. Mathem. cum GREGORIO in Elementis Astronomiæ (§. cit.) VILLEMOT supra laudatus (§. cit.): & Cel. J. POLENUS in *Dialogo de Vorticibus cœlestibus* (*Patavii* An. 1712, in 4. 1 Alph. 6 plag. 7 Tabb.).

§. 41. Systema Copernicanum defendunt, præter GALILÆUM ante laudatum in Dialogis de Systemate mundi (§. 39), peculiaribus scriptis PETRUS MEGERLINUS, Professor Mathematum Basileensis in *Systemate mundi Copernicano argumentis invictis demonstrato* (*Amstelodami* An. 1682, in 8. plag. 6, Tabb. 3); BULLIALDUS in *Philolao ab inferis resuscitato* seu *Dissertatione de vero systemate* (*Amstelod.* An. 1629, in 4.), PETRUS HORREBOWIUS Mathematum Professor Hafniensis, in *Copernico triumphante*, sive *de parallaxi Orbis annui Tractatu epistolari* (*Hafniæ* 1727, in 4. plag. 7, Tabb. 1) & JOH. JACOBUS ZIMMERMANN in *Scriptura Copernizante* Germanice sæpius edita. Utor editione *Norimbergensi* anni 1709, in 8. (plag. 8).

§. 42. Astronomiam, quam in parte prima secundum proprias hypotheses explicaverat, in secunda ad usum concionatorum transfert AN-

TONIUS

TONIUS MARIA SCHYRLÆUS DE RHEITA, Capucinus, in *Oculo Enochi atque Eliæ*, seu *Radio sidereo mystico* (*Antverpiæ* An. 1665, in fol. 4 Alph. 9 plag.), qui etiam sub finem partis primæ praxin Dioptricæ explicat.

§. 43. Calculum eclipsium peculiaribus scriptis in usum tyronum illustrarunt ELIAS MOLERUS in *Opere novo Astronomico*, in quo doctrina de supputandis deliquiis juxta Tabulas Prutenicas explicatur (*Lugduni* An. 1687, in 4. 1 Alph. 4 plag.); JOHANNES HANKE, e Societate Jesu, in *Tenebris summatim illustratis*, qui secundum Tabulas RICCIOLI computum instituit (*Moguntiæ* An. 1682, in 4. plag. 15) & inprimis ZIMMERMANNUS modo laudatus in scripto Germanico, cui titulus: *Auf alle und jede Hypotheses applicable Fundamental-Aufgaben von den Sonn- und Mond-Finsternissen* (*Hamburgi* An. 1691, in 8. 15½ plag.) Eclipseos solaris calculum quoque bene tradidit, & Logarithmos, in usum Logisticæ sexagenariæ exhibuit, quales alibi non prostant. Commemorari hic quoque merentur Dissertationes quædam academicæ. Nimirum calculum Eclipsium solarium exemplo Eclipseos anni 1705, illustravit JOHANNES BERNHARDUS WIDEBURGIUS, nunc Professor Mathematum Jenensis (*Helmstadii* An. 1714, in 4. plag. 12, Tabb. 4) & Eclipseos solaris anni 1723, calculum secundum methodum PHILIPPI DE LA HIRE, ex ejusdem Tabulis, quoad minutissima, repræsentat GEORGIUS MATTHIAS BOSE, nunc Physicæ Professor in Academia Wittebergensi, in *Commentatione in Eclipsin Terræ* An. 1723, d. 13 Maji (*Lipsiæ* An. 1723, in 4. maj. Alph. 1, Tab. 1) Huc etiam pertinent *Dissertationes de Eclipsi lunari* & *de Eclipsi solari* CHRISTOPHORI LANGHANSEN, Professoris Mathematum Regiomontani, quarum primam sub præsidio BLÆSINGII, tum Mathematum Professoris, alteram ipse Præses defendit.

§. 44. Equidem Tabularum astronomicarum conditores præcepta quoque calculi iisdem præmittere solent, quod etiam fecit PHILIPPUS DE LA HIRE: quoniam tamen sæpissime præcepta breviora sunt, quam ut ad omnem calculum astronomicum absolvendum tyronibus præsertim satisfaciant; ideo JOANNES ALBERTUS KLIMMIUS, idiomate Germanico, *Norimbergæ* An 1725, in 4. (Alph. 1, plag. 17, Tabb. 16). Tabulas PHILIPPI DE LA HIRE cum nova, completa, & accurata descriptione omnis calculi astronomici in usum tyronum calculi edidit. Ad eundem finem tendit opus in hoc genere maxime commendandum, *Astrosophia numerica*, sive astronomica supputandi ratio ANGELI CAPELLI, Canonici & Astronomiæ Professoris Parmensis, quæ duabus partibus *Venetiis* An. 1733 & 1736, in 4. prodiit

diit (Pars I, plag. 14, Tabb. æn. 8. Pars II, Alph. 1, plag. 16). Parte priori abunde docentur, quæ ad calculum faciunt; posteriori autem Tabulæ astronomicæ continentur.

§. 45. JOANNES LEONHARDUS ROSTIUS An. 1718, *Norimbergæ* in 4. (Alph. 3, Tabb. 14), edidit librum astronomicum sub Titulo: *Astronomisches Hand-Buch*, h. e. Manuale Astronomicum, in quo doctrinam sphæricam exemplis perspicuis illustrat, & modum observandi declarat, ipse nimirum in observando versatissimus. Addidit deinde An. 1727, (*Norimbergæ* in 4. Alph. 2, plag. 5, Tabb. 14) partem alteram sub Titulo: *Aufrichtiger Astronomus*, h. e. Astronomus ingenuus. In ea plurima tradit, quæ ad doctrinam sphæricam, motus Cometarum, & observationes astronomicas spectant. Inprimis autem plurima tradit, quæ ad calculum Eclipsium facilitandum conducunt. Ad Astronomiam adeo practicam addiscendam utile opus.

§. 46. Quoniam in anterioribus aliquoties mentionem injecimus *Operum Mathematicorum* JOANNIS SCHONERI, ut de iis adhuc dicamus res ipsa flagitare videtur. Ea in unum volumen congessit, & correcta & locupletata *Norimbergæ* An. 1561, in fol. excudi curavit Autoris filius ANDREAS SCHONERUS (Alph. 10). Continentur in hisce 1. Isagoge Astrologiæ judiciariæ, 2. de Judiciis Nativitatum libri tres, 3. Tabulæ resolutæ astronomicæ, 4. de usu globi cœlestis, 5. de compositione globi cœlestis, 6. de usu globi terrestris, 7. de compositione globi terrestris, 8. Libellus de distantiis locorum per numeros & instrumentum investigandis, 9. de constructione Torqueti, 10. In constructionem atque usum Rectanguli sive radii astronomici Annotationes, 11. In Fabricam & usum magnæ Regulæ PTOLEMÆI Annotationes, 12. Horarii Cylindri Canones, 13. Æquatorium astronomicum, ex quo errantium stellarum motus, luminarium configurationes & defectus colliguntur, oppositis ubique planetarum sphæris & terminorum expositionibus, 14. Planisphærium seu Meteoroscopium, in quo singula, quæ per motum primi mobilis contingunt, inveniuntur, 15. Organum Uranicum, quo facillime, absque scrupulosa supputatione, veri mediique planetarum motus reperiuntur, 16. Instrumentum impedimentorum Lunæ, per quod dies impediti facillime colliguntur his apprime utile, qui Almanach conscribere gestiunt. Videmus adeo in hisce operibus non contineri alia, nisi quæ ad præsens caput pertinent, quæ siderum nempe scientiam concernunt.

§. 47. Plura nobis recensenda essent scripta astronomica, si omnia promiscue in medium afferre liberet. Sed cum ea, quæ a veteribus & recentioribus usque ad Annum 1660, seculi superioris literis consignata fuere,

re, ex RICCIOLI Almagesto facile suppleri queant, cetera ex Diariis Eruditorum, quæ hodie magno numero eduntur, peti queant; potiora a nobis commemorata esse sufficit. De TYCHONIS tantum *Progymnasmatibus Astronomiæ instauratæ*, aliquoties laudatis, observamus, quod pars prima equidem inscribatur *De nova stella anni* 1572, generaliter tamen de restitutione motuum Solis & Lunæ stellarumque inerrantium tractet (*Uraniburgi & Pragæ* 1610, in 4. 4 Alph. 13 plag.); altera vero de Cometa An. 1577, agat (*Pragæ* An. 1610, in 4. 2 Alph. 13 plag). Tomo secundo hujus editionis adjiciuntur TYCHONIS DE BRAHE *Epistolæ Astronomicæ* (*Uraniburgi* An. 1010, in 4. 1 Alph. 16 plag.). Sola Progymnasmata sub titulo Operum TYCHONIS DE BRAHE postea *Francofurti ad Mœnum* in 4. recusa.

§. 48. Dignum quoque est, cujus singularem mentionem injiciamus, Automatum Planetarium HUGENII, motus planetarum motu suo accurate indicans, descriptum sub finem posthumorum (§. 35, cap. 1). Etsi enim ante ipsum istiusmodi automata construxerint alii, quorum nonnulla recenset SCHOTTUS in Technica curiosa: eorum tamen usus hodie nullus amplius est, postquam *Hugenianum* ad Astronomiæ recentioris perfectionem compositum.

§. 49. Præterea nobis adhuc commemoranda sunt scripta quædam recentiora, quæ silentio præteriri nefas. Nimirum An. 1697, *Norimbergæ* in fol. (Alph. 1, plag. 4, Tabb. 4) JOH. PHILIPPUS A WURTZELBAU edidit Tractatum de situ Geographico secundum latitudinem & longitudinem civitatis Norimbergensis sub titulo: *Uranies Noricæ Basis*; in usum observationum suarum, quas ibidem multa solertia & instrumentis exquisitis instituebat. Sed cum in longitudine ac refractionibus aliquid immutandum esse posthac deprehenderet, ejus supplementum An. 1713, in fol. (plag. $5\frac{1}{2}$) addidit sub titulo: *Stabilimentum Baseos Uranies Noricæ Astronomicæ & Geographicæ, pro deducta antehac inclytæ urbis latitudine & corrigendis longitudinum Geographicarum numeris* &c. ubi etiam de obliquitate Eclipticæ & refractione horizontali agit. Tandem An. 1719, accessit opus Motuum solarium, in qua ex Solis observationibus in Meridiano Norimbergensi per tria secula habitis iidem definiuntur, & eorundem Tabulæ exhibentur, sed intra dimidium seculum variabiles ob eccentritatis, quam statuit, mutabilitatem. Prodiit *Norimbergæ* An. 1719, in fol. (plag. $22\frac{1}{2}$, Tab. 1) sub titulo: *Uranies Noricæ Basis astronomica*, sive *Rationes motus annui ex observationibus in Solem, hoc nostro & seculo abhinc tertio, Norimbergæ sub eodem Meridiano habitis quam plurimis deducta & ampliter demonstrata.* Operi huic solari adjicitur tractatus de situ geographico Norim-

Norimbergæ & ejus supplementum, de quo ante diximus, ut adeo integrum, quale nunc in bibliopoliis prostat, constet (Alph. 2, plag. 9, Tabb. 5).

§. 50. An. 1735, *Hafniæ* in 4. reg. (Alph. 1, plag. 7, Tabb. 11) PETRUS HORREBOWIUS, Phil. & Med. D. in Universitate Hafniensi Astronomiæ Professor, edidit *Basin Astronomiæ*, sive Astronomiæ partem mechanicam, in qua describuntur observatoria atque instrumenta astronomica Rœmeriana Danica, simulque eorundem usus, sive methodi observandi Rœmerianæ in usum publicum, & præsertim in gratiam una prodeuntis valde insignis atque usus amplissimi, nunquam non posteris memorandi, Tridui observationum Tusculanarum ROEMERI ex fundamentis exponuntur. Dolendum vero, quod duo libri, in quo observationes suas descripserat ROEMERUS ferali isto incendio An. 1726, quod circa finem Octobris totam fere Hafniam vastavit, una cum observationibus *Horrebovianis* perierint.

§. 51. Multum desudavit ROEMERUS in detegenda parallaxi orbis annui, nec sine successu hoc se præstitisse sibi videbatur. Ex ejus adeo observationibus HORREBOWIUS eandem demonstrandam sibi sumsit, edititque ea fini Hafniæ in 4. (plag. 8, Tab. 1) suis sumtibus *Copernicum triumphantem*, sive *de parallaxi orbis annui Tractatum epistolarem* ad Serenissimum Principem CHRISTIANUM, Daniæ & Norwegiæ hæredem An. 1727, cujus pleraque exemplaria ferale istud, quod modo commemoravimus, incendium consumsit.

§. 52. Enimvero nondum triumphare Copernicum in *Commentariis Bononiensis Scientiarum & Artium Instituti* (§. 40, cap. 1) ostendit EUSTACHIUS MANFREDI, cum ex observationibus Rœmerianis, quæ colligitur in fixis, quoad declinationem & ascensionem rectam, mutatio parallaxi orbis annui minime consentiat. Nimirum hactenus Astronomi in parallaxin orbis annui inquisituri id tantummodo agebant, ut omni circumspectione dispicerent, num aliqua fixarum a loco fixo aberratio annua deprehendatur, parum solliciti utrum præcise talis sit, qualem exigit motus annuus Telluris circa Solem, an vero eidem contrarietur. Saluberrimo igitur consilio MANFREDIUS *Theoriam de annuis inerrantium stellarum aberrationibus*, in Astronomia hactenus desideratam condidit eamque publici juris fecit *Bononiæ* Anno 1729, in 4. (plag. 10, Tabb. 6), ut juxta eam observationes examinari queant, ne per errorem parallaxis orbis annui inde colligatur, quæ inde colligi nequit.

§. 53. Celebratissimus hodie inter Astronomos est Gnomon Meridianus Bononiensis ad D. *Petronii*, cui Astronomia multa debet incrementa & cujus historiam dederunt JOAN-

JOANNES DOMINICUS CASSINI atque DOMINICUS GULIELMINUS. Hujus instrumenti descriptionem & observationes astronomicas omnes eodem, ab ejus constructione usque ad hoc tempus, peractas An. 1736, *Bononiæ* in 4. reg. (Alph. 2. plag. 2) edidit idem MANFREDIUS. In hoc opere de obliquitatis eclipticæ mutatione & theoria Solis præclara leguntur, & illa inprimis extra omnem controversiæ aleam ponitur.

§. 54. Anno 1725, HORREBOWIUS edidit *Hafniæ* in 4. (plag. 16, Tab. 1) *Clavem Astronomiæ*, sive *Astronomiæ partem physicam*, *in qua potissimum in parallaxin Solis inquirit*. Pendet autem methodus ab hypothesi quadam physica. Unde ipsi posthac consultum visum, ut missis omnibus hypothesibus elementa Astronomiæ quoad refractiones, obliquitatem eclipticæ, polique altitudinem nudis observationibus ROEMERI superstrueret. Eo consilio in publicam lucem emisit, An. 1732, *Hafniæ* in 4. (plag. 16, Tab. 1). *Atrium Astronomiæ*, sive *de inveniendis refractionibus*, *obliquitate eclipticæ*, *atque elevatione poli* Tractatum. Subjunxit schediasma de arte interpolandi, quod jam antea seorsim publicatum ad scripta analytica referendum. Ceterum in Atrio hoc aperiendo amplissimum usum ostendit Tridui illius *Roemeriani*, quod in Basi Astronomiæ extat (§. 50), & se in posterum uberiorem adhuc ostensurum pollicetur. Unde non mireris ROEMERUM morti vicinum ejus editionem, una cum descriptione instrumentorum suorum serio commendasse, & eo fine ejus exemplar nitide descriptum S. R. Selandiæ Episcopo C. W. WORMIO tradidisse.

§. 55. Ad scripta Astronomica referendæ etiam sunt Ephemerides, in quibus loca planetarum eorumque adspectus, ad singulos anni dies computati, una cum Eclipsium descriptionibus exhibentur. Juxta Tabulas Prutenicas, *Ephemerides* ab An. 1577, ad annum 1590, construxerat JOANNES STADIUS. Juxta easdem ab An. 1581 usque ad annum 1620, computatas *Venetiis* excudi curavit JOANNES ANTONIUS MAGINUS, Mathematum Professor Bononiensis, edito opere *Primi Mobilis*, duodecim libris contenti, in quibus habentur Trigonometria sphæricorum & astronomica, gnomonica, geographicaque problemata, magnus trigonometricus canon emendatus & auctus, ac magna primi mobilis Tabula ad decades primorum scrupulorum supputata (*Bononiæ* An. 1609, in fol. Alph. 10, plag. 21), celebris: sed cum eas examinaret DAVIDES ORIGANUS, Mathematum Professor Francof. ad Viadrum, eas non satis accuratas deprehendit. Quamobrem ipse An. 1599, *Franc. ad Viadrum* in 4. (4 Alph. 12 plag.) novas edidit *Ephemerides*, ab An. 1595 usque ad An. 1630, deinceps continuatas

usque ad finem sæculi. Præmissa est Introductio seu compendiaria Ephemeridum enarratio, qua non solum, quæ ad motum primi & secundorum mobilium usumque pleniorem Ephemeridum faciunt, sed & plurima alia chronologica & astrologica præcepta ea facilitate explicantur, ut inde quisque calendaria anniversaria & nativitatum texere possit judicia. Hæ Ephemerides seculo decimo sexto celebratissimæ fuerunt, iisdemque usi sunt calendariographi. Etsi enim KEPLERUS ab An. 1617 usque ad An. 1636, ex Tabulis suis Rudolphinis supputatas *Lincii* in 4. (3 Alph. 17 plag.) edidisset, inchoatas *Lincii* 1616, & absolutas *Sagani* Silesiæ typis Autoris An. 1630, quibus præmittitur explicatio fundamentorum Ephemeridis & instructio super nova ejus forma; facile tamen apparet, cur usum Ephemeridum ORIGANI impedire minime potuerint.

§. 56. Cum ORIGANI Ephemerides cum seculo præcedente exspirassent, initio hujus complures de novis computandis consilia agitarunt: quo successu, nostrum jam non est enarrare. Initio hujus seculi Ephemerides dederat MEZZAVACCHA, quibus deficientibus, manum eidem operi admovit Marchio ANTONIUS GHISLERIUS, cujus *Ephemerides motuum cœlestium* ab An. 1721 ad An. 1740, ex Tabulis DE LA HIRE, STREETII & FLAMSTEDII ad Meridianum Bononiæ supputatæ prodierunt *Bononiæ* An. 1720, in 4. (Alph. 3, plag. 9½). Anno autem 1725, ibidem lucem adspexere *Novissima Ephemerides motuum cœlestium e Cassinianis Tabulis ad meridianum Bononiæ supputata*, autoribus EUSTACHIO MANFREDIO Bononiensis Scientiarum Instituti Astronomo & sociis ad usum Instituti. Tomus primus continens Ephemerides ex An. 1726 in An. 1737, constat Alph. 2, plag. 4, Tabb. 8: Tomus II, complectens Ephemerides ex An. 1738 in An. 1750, Alph. 2, plag. 6, Tabb. 7. Id singulare habet MANFREDIUS, quod dederit typos eclipsium solarium, quales per totam Telluris faciem, ubi conspicuæ sunt, apparent, juxta principia projectionis.

§. 57. Singulis annis Parisiis in usum anni sequentis, jussu Academiæ Regiæ scientiarum, ad Meridianum Parisiensem editur Ephemeris sub titulo: *Connoissance des Tems pour l'Année* v. gr. 1739. Ephemeridi subjiciuntur Tabulæ quædam astronomicæ cum earundem explicatione & usu, una cum Catalogo singulorum membrorum Academiæ Regiæ scientiarum, qualis est mense Novembri ejus, quo editur, anni. Extant in iisdem eclipses Satellitum Jovis, cum in casum observationum astronomicarum potissimum edantur istæ Ephemerides, quæ præterea usum Calendarii præstant.

§. 58. Olim usque ultra dimidium seculi superioris ad Astronomiam quo-

quoque relata fuit *Astrologia judiciaria*, ars divinandi ex astris: omnes enim & naturæ, & hominum actiones, horumque fata iisdem subjecerunt Veteres. Magna ea fuit autoritas, exculta & defensa a gravibus Autoribus, ita ut ipse PTOLEMÆUS de eadem commentatus fuerit, eamque Astronomiæ sociam fecerit (§. 10, cap. 9). Nostro autem ævo, vanitate ejus agnita, indigna censetur, quæ inter scientias mathematicas referatur: quæ etiam ratio est, cur nullum eidem in Elementis nostris Matheseos universæ fecerimus locum. Quodsi tamen cui volupe fuerit Astrologiæ præcepta cognoscere, ei satisfaciet SCHONERUS in *Opusculo astrologico*, quod ex diversorum libris summa cura pro studiosorum utilitate collegit & *Norimbergæ* An. 1539, in 4. (plag. 14) edidit. Legitur idem in Operibus, in quibus primum tenet locum (§. 46). In his autem prolixa quoque occurrit tractatio de judiciis nativitatum, ut in hac Astrologiæ parte nihil amplius desiderari possit. Compendiosior est *Tractatus astrologicus de genethliacorum thematum judiciis, pro singulis nati accidentibus, ex vetustis & optimis quibusque auctoribus collectus industria* HENRICI RANZOVII, *Producis Cimbrici*, qui *Francofurti ad Mænum* An. 1633, in 8. (Alph. 1, plag. 2) prodiit, & quo in juventute usus, cum artem illam pernoscere gestirem.

§. 59. Superiori adhuc seculo Astrologiæ maxime deditus fuit JOANNES BAPTISTA MORINUS, Medicinæ Doctor, & Parisiis Regius Mathematum Professor, cujus *Astrologia Gallica principiis & rationibus propriis stabilita*, atque in 26 libros distributa, prodiit *Hagæ Comitis* An. 1661, in fol. cum prolixa præfatione apologetica (Alph. 6, plag. 12), qui vulgo dicitur Astrologiam demonstrasse. Sed quantum distent a veris demonstrationibus ejus probationes, haud difficulter judicabit, qui genuinæ demonstrationis formam animo concepit.

CAPUT X.

De Scriptis Chronologicis, Geographicis & Gnomonicis.

§. 1. DOctrinam temporum primus in Scientiæ formam redegit JOSEPHUS SCALIGER, cujus *De emendatione temporum* libri primum An. 1587, lucem adspexerunt, deinde quindecim annis elapsis prorsus immutati denuo prodierunt. Multa eruditione conscriptum est hoc opus; sed

sed ad captum Tyronum minime compositum.

§. 2. Præclarum quoque in Chronologia opus est DIONYSII PETAVII *Doctrina Temporum*, *Parisiis* An. 1627, in fol. primum edita; sed An. 1703, tribus Tomis in fol. reg. (21 Alph. 7 plag.) Antverpiæ recusa. Accessit editioni novæ integer Tomus tertius, in quo continentur *Uranologium sive systema variorum auctorum, qui de Sphæra ac sideribus eorumque motu Græce commentati sunt*, An. 1630, seorsim editum; Libri VIII variarum Dissertationum Chronologiam illustrantium & Libri tres epistolarum. Nimirum in Uranologio continentur GEMINI Elementa Astronomiæ; PTOLEMÆI de Apparentiis inerrantium & significationibus, cui Tractatui subjungitur Calendarium vetus Romanum, cum ortu occasuque stellarum ex OVIDIO, COLUMELLA, PLINIO; ACHILLIS TATII Isagoge ad ARATI Phænomena; Ejusdem fragmenta a VICTORIO edita, quæ cum anterioribus eadem fere continent; HIPPARCHI BITHYNI ad ARATI & EUDOXI Phænomena Enarrationum libri tres; ARATI Genus & Vita; THEODORI GAZÆ liber de mensibus; S. MAXIMI Martyris Computus ecclesiasticus; ISAACI Monachi Computus; S. ANDREÆ Hierosolymitani methodus investigandi Cycli solaris & lunaris, nec non Paschatis. Ceterum paulo durius tractat SCALIGERUM, cui opus suum opposuit.

§. 3. Dogmata SCALIGERI ad faciliorem intelligentiam proposuit SETHUS CALVISIUS, Cantor Lipsiensis, vir longe ultra sortem sui similium eruditus, cujus *Introductio ad Chronologiam* sæpius cum in 4. tum in folio recusa.

§. 4. Triumviris istis jungi meretur JOANNES BAPTISTA RICCIOLUS in *Chronologia Reformata*, quæ *Bononiæ* An. 1669, in fol. prodiit (Alph. 11, plag. 18).

§. 5. Tyronibus inserviunt DIONYSII PETAVII *Rationarium temporum* (*Moguntiæ* An. 1646, in 8. 2. Alph. 22 plag.), GUILIELMI BEVEREGII *Institutiones Chronologicæ*, quæ cum *Arithmetica Chronologica* recusa *Londini* An. 1705, in 4. (1 Alph. 11 plag.) & ÆGIDII STRAUCHII *Breviarium Chronologicum* (*Witteberga* An. 1664, in 12. 2 Alph. 10 plag.).

§. 6. Ad Chronologiam Historicam spectat opus ISAACI NEWTONI, quod *Londini* An. 1728, in 4. sub titulo: *The Chronology of ancient Kingdoms amended* (Alph. 2, plag. 4, Tabb. 3) prodiit, in quo agitur de Chronologia Græcorum, Ægyptiorum, Assyriorum, Babyloniorum & Medorum, atque Persarum. Traditur etiam in eodem descriptio templi SALOMONIS. Cum nobis jam sit negotium cum Chronologia mathematica; facile patet, Chronologiam NEWTONI non esse

hujus

hujus loci. Ne tamen quis miretur, cur ejus nullam injecerimus mentionem, cum NEWTONUS inter Mathematicos summus emineat; eum silentio præterire noluimus. Singulares vero prorsus sibique proprias de Chronologia antiquorum imperiorum fovet opiniones NEWTONUS, ita ut enormis detur inter ipsum & ceteros Chronologos dissensus. Quamobrem eodem adhuc anno, ARTHURUS BEDFORD idiomate patrio Animadversiones in Chronologiam NEWTONI edebat *Londini* in 8. (plag. 15). Ostendit autem, NEWTONUM e diametro esse adversum scriptoribus sacris: quæ adeo ratio esse videtur, cur ad eum confutandum adeo properaverit.

§. 7. Ad Calendariographiam spectant, quæ Tomo quinto operum CLAVII habentur (§. 24, cap. 1): SETHI CALVISII *Elenchus Calendarii Gregoriani* (*Franc. ad Mœn.* An. 1612, in 4. plag. 27); FRANCISCI VIETÆ *Relatio Calendarii vere Gregoriani & Calendarium Gregorianum perpetuum* (§ 25, cap. 1); BLONDELLI *Historia Calendarii Romani* Gallice conscripta (*Paris.* An. 1682, in 4.); ERHARDI WEIGELII *Bürgerlicher Zeit-Spiegel*, seu speculum temporis civile (*Jenæ* An. 1664, in 4. plag. 15), GUILIELMI BONJOUR *Calendarium Romanum* (*Romæ* An. 1701, in fol. 21 plag.) FRANCISCI BLANCHINI *Solutio Problematis paschalis* (*Romæ* An. 1703, in 4. plag. 13, Tabb. 5); DOMINICI QUARTAIRONII *Responsiones ad assertiones* DOMINICI CASSINI *pro reformatione Calendarii Gregoriani* (*Romæ* 1703, in 4. plag. 4); EUSTACHII MANFREDII *epistola ad* QUARTAIRONIUM, *qua* CASSINI *assertiones* 16 vindicantur (*Venetiis* An. 1705, in 4. reg. plag. 8); THOMÆ PII MAPHÆI Opus *De Cyclorum Soli-Lunarium inconstantia & emendatione* (*Venetiis* An. 1706, in 4. 1½ Alph.).

§. 8. *Calendarium Judaicum* ex Hebræorum penetralibus cum versione Latina edidit SEBASTIANUS MÜNSTERUS *Basileæ* An. 1527, in 4. (1 Alph. 5 plag.); in quo computus Judæis usitatus exponitur. *Rabbi* ORI Calendarium Palæstinorum & universorum Judæorum ex Hebræo sermone in Latinum vertit, & *Francof. ad Mœnum* publicavit JACOBUS CHRISTMANNUS, in Academia Heidelbergensi Professor An. 1594, in 4. (plag. 10).

§. 9. Inter veteres Geographos eminet PTOLEMÆUS, cujus *Geographia* libri octo, in quibus non modo traduntur ad Geographiam mathematicam spectantia, sed inprimis etiam quæ ad historicam faciunt, *Basileæ* prodiere plus simplici vice, e. gr. An. 1542, in fol. (Alph. 2, plag. 16, Tabb. 48). Inter compendia vero maxime celebre fuit JOANNIS DE SACRO BOSCO libellus *de sphæra*, sæpius recusus: in quem

post alios commentatus est CLAVIUS (§. 24, cap. 1).

§. 10. Præstantissimum in hoc scientiarum genere & fere unicum est JOHANNIS BABTISTÆ RICCIOLI *Geographia & Hydrographia Reformata* (*Venetiis* An. 1662, in fol. 7 Alph. 17 plag.), ex quo ERHARDUS WEIGELIUS scitu præ cæteris necessaria, in tyronum gratiam, in compendium misit in speculo Terræ, (*Erd-Spiegel*), quod vocat, patrio idiomate conscripto, (*Jenæ* Anno 1665, in 4. 1 Alph. 3. plag.).

§. 11. Multa habet RICCIOLUS, quæ ad Geographiam proprie non spectant, sed ab eo in eadem pertractantur, ne ea aliunde supponere habeat opus. Unde tyronum conatibus magis respondet *Geographia*, quæ in cursu Mathematico MILLIETI DECHALES extat (§. 4, cap. 1).

§. 12. Ceterum applausum Eruditorum dudum quoque meruit BERNHARDI VARENII *Geographia generalis*, sæpius recusa. Elegans est editio *Cantabrigiensis* anni 1672, in 8, (1 Alph. 9 plag. Tabb. 5), juxta quam recusa est *Jenæ* An. 1693, in 8. sed præstantissima omnium prodiit *Cantabrigiæ* An. 1712, in 8. reg. (1 Alph. 15 plag. 9 Tabb. 9) cum Appendice JACOBI JURIN, in qua nova habentur inventa, post obitum scilicet VARENII demum detecta. VARENIO autem non solum mathematica, verum etiam physica curæ cordique sunt.

§. 13. Laudantur quoque *Elementa Geographiæ generalis* Cl. J. G. LIEBKNECHT Prof. Giess. (*Franc.* An. 1712, in 8. 1 Alph. 10 plag. fig. plag. 3½). LEONHARDUS CHRISTOPHORUS STURMIUS vero in *Compendio Geographico*, quod idiomate vernaculo in gratiam tyronum *Francof.* An. 1705, in 8. edidit (plag. 10, Tabb. 5) praxin inprimis conficiendi mappas geographicas bene tradit, quamvis demonstrationes omiserit, utpote quæ non sunt ad palatum tyronum.

§. 14. De *Hydrographia*, seu arte navigandi, commendatur Tractatus in Cursu mathematico MILLIETI DECHALES (§. 4, cap. 1). Data opera omnium prolixissime scripsit de eadem GEORGIUS FOURNIER e Societate Jesu in *Hydrographia* Gallice edita *Paris.* An. 1653, in fol. (10 Alph. 10 plag.). Habebatur pro opere præstantissimo in hoc genere: verum postea in Anglia prodiere libri complures de arte navigandi, qui præ illo commendari merentur.

§. 15. JACOBUS HODGSON, Matheseos in schola mathematica regia orphanotrophii ad S. Salvatorem conscripsit *Theoriam navigationis demonstratam*, in usum Navigationis docendæ. Eam deinde multo auctiorem sub titulo, *A system of the Mathematicks*, hoc est, systema Matheseos, *Londini* An. 1723, in 4. duobus Voluminibus (Alph. 7, plag. 19½, Tabb. æn. 14, cum figuris mul-

multis ligno incisis & textui insertis) multo auctiorem recudi curavit. In hoc systemate ex Mathesi non traduntur, nisi quæ ad Navigationem rigide demonstrandam faciunt & in ea usum habent. Præmittuntur ex EUCLIDIS Elementis sex prioribus, quæ ad hunc scopum conducunt, una cum Trigonometria plana ex inventis recentiorum plurimum illustrata. Reperies hic porro Trigonometriam sphæricam, & doctrinam de projectione sphæræ, tam orthographica, quam stereographica prolixe explicatam, quarum hæc ad solvenda problemata trigonometrica & astronomica applicatur. Ex Astronomia docentur, quæcumque usui esse possunt in navigatione, veluti modus computandi appulsum Lunæ ad stellas fixas, & harum per illam occultationes, quarum in determinandis longitudinibus locorum usus est. Inferuntur novæ Tabulæ solares, quarum docetur constructio & usus. Adduntur Tabulæ aliæ, quibus opus est in navigatione. Ipsa autem praxis Navigationis omnis perspicue docetur, exemplis illustratur, & Theoriæ demonstratæ superstruitur. Id nimirum egit Autor, ut ex suo opere Navigationis theoriam & praxin solide addiscere liceat, & quæ ex reliqua Mathesi præsupponuntur aliunde hauriri non demum opus sit.

§. 16. Anno 1715, HENRICUS WILSON, problemata nautica variis modis soluta dedit in Tractatu, quem sub titulo: *Navigation new modell'd*, hoc est, Navigatio in novam formam redacta, *Londini* in 8. maj. (Alph. 1, plag. 12) publici juris fecit. Docet problemata ista solvere 1. per constructiones geometricas triangulorum, in locum solutionum trigonometricarum surrogandas, 2. per calculum trigonometricum, & ope peculiarium Tabularum, ut calculo nullo sit opus; 3. per calculum, qui canone sinuum, tangentium, secantium & logarithmorum non habet opus, sed tantummodo paucis quibusdam numeris in Tabulam redactis; 4. ope circini & scalæ geometricæ; tandemque 5. per novam methodum a se inventam, qua problemata Trigonometriæ planæ sine Tabulis ac instrumentis solvuntur. Navigationem primam geometricam, secundam trigonometricam, tertiam arithmeticam, quartam instrumentalem, quintam vero practicam appellat. Nullum adeo dubium est, quin hunc librum multo cum fructu legant, qui artem navigandi addiscere cupiunt, modo ex ceteris partibus Matheseos hausta theoria fuerint instructi, quæ hic præsupponitur.

§. 17. Quoniam libri, qui magno numero de navigatione conscripti sunt, vel solam praxin tradunt, vel nimis diffusi sunt, nec levi pretio comparandi; ideo ARCHIBALDUS PATOUN praxin navigationis ex primis principiis demonstratam sub titulo: *A Compleat Treatise of practi-*

cal

cal navigation demonstrated from its first Principles, una cum tabulis omnibus necessariis *Londini* An. 1730, in 8. maj. (Alph. 1, plag. 10, Tab. 1) edidit. Præmittit adeo ea, quæ ex Geometria, Trigonometria plana, Geographia, Astronomia & Chronologia perspecta esse debent ei, qui artem navigandi penitus perspicere voluerit.

§. 18. Eodem anno idiomate itidem Anglico *Londini* An. 1730, in 8. maj. (Alph. 1, plag. 9) a GEORGIO GORDONIO publicata sunt ex MSC. originali *Opera posthuma* JOHANNIS WARDI. In horum parte prima, præmissis principiis Geometriæ & Trigonometriæ planæ, Navigatio explicatur, ubi nova quædam methodus simul proponitur ab Autore inventa; in parte autem secunda Trigonometria sphærica traditur, ubi simul sphæræ projectio, tam orthographica, quam stereographica explicatur. Ad demonstrationes illius facilius percipiendas schemata ita construxit, ut casus singuli in solido repræsentari possint; quo artificio etiam usus est JOANNES KEILL in *Trigonometria*, quam EUCLIDIS Elementis ex versione COMMANDINI a se editis subjunxit.

§. 19. Apud Batavos de arte navigandi Tractatum conscripsit WILLEBRORDUS SNELLIUS, qui sub titulo: *Tiphys Batavus, sive Histiodromice de navium cursibus & re navali*, *Lugduni Batavorum* An. 1624, in 4. Alph. 1, plag. 7) prodiit. De Loxodromia accuratas affert demonstrationes quæ hactenus desiderabantur. Theoriam tradit libro primo; praxin secundo.

§. 20. Inter problemata vexata refertur problema de invenienda longitudine maris, quod hactenus multum exercuit ingenia Mathematicorum, irrito successu solutionem ejus aggressorum. Nimis prolixum foret recensere tentamina, quæ publice descripta prostant. Non tamen possumus, quin mentionem injiciamus Autoris cujusdam personati DOROTHEI ALIMARI, Mathematici (si credimus) Veneti, cujus *Methodus longitudinis aut terra, aut mari investiganda, adjectis demonstrationibus & instrumentorum Iconismis*, *Londini* An. 1715, in 8. (plag. 13, Tabb. 4) prodiit. Etsi enim ea non satisfaciat, continentur tamen in hoc Tractatu quæ legi merentur.

§. 21. Pars nauticæ difficillima est manuaria nautica, quia reconditam Geometriæ sublimioris notitiam supponit. Agit autem manuaria nautica de dispositione velorum, gubernaculi & navis. Equidem Vir & generis nobilitate, & experientia maritima præstans RENAU An. 1689, libellum de ea ediderat; sed mox HUGENIUS principium ejus unum, dein ex intervallo celeberrimus BERNOULLIUS alterum impugnavit, & theoriam aliam substituit in Tentamine novæ theoriæ nauticæ, quæ idio-

idiomate Gallico sub titulo: *Essai d'une nouvelle Théorie de la Manœuvre des Vaisseaux*, una cum epistolis nonnullis de eadem materia perscriptis, *Basileæ* An. 1714, in 8. reg. (plag. 15, Tabb. 10) prodiit. Theoriam hujus artis ad praxin aptare studuit PITOTUS in libro Gallice conscripto, qui sub titulo: *Théorie de la Manœuvre des Vaisseaux reduite en Pratique*, *Parisiis* in 4. An. 1731, prodiit.

§. 22. Ad Geographiæ potissimum perfectionem tendunt *Observationes Mathematicæ & Physicæ in India & China factæ a R. P.* FRANCISCO NOEL, *e Societate Jesu ab* An. 1684, usque ad An. 1708, (*Pragæ* 1710, in 4. plag. 17, Tabb. 2) & *Observationes* argumenti similis *a R. P.* FRANCISCO FEUILLE'E *jussu Regis Christianissimi in regionibus potissimum Australibus factæ*, de quibus supra (§. 9, cap. 9). Summæ harum observationum leguntur in Actis Eruditorum Lipsiensibus.

§. 23. Commemorandi hic denique sunt Autores, qui in magnitudinem & figuram Telluris inquisiverunt. Laudandus hic nobis WILLEBRORDUS SNELLIUS, cujus *Eratosthenes Batavus de Terræ ambitus vera quantitate*, *Lugduni Batavorum* An. 1617, in 4. (Alph. 1, plag. $11\frac{1}{2}$) prodiit. Sed errores quosdam in metiendis angulis, tum & in calculo admisit, quos ipse agnovit: Unde observationes repetiit & in MSC. correctas reliquit. Emendationes videre licet in *Dissertatione de magnitudine Terræ* PETRI VAN MUSCHENBROEK, Mathematum Professor in Academia Ultrajectina, quæ legitur in opere *Dissertationum physicarum experimentalium & geometricarum de magnete, tuborum capillarium vitreorumque speculorum attractione, magnitudine Terræ, cohærentiâ corporum firmorum*, *Lugduni Batavorum* An. 1729, in 4. reg. edito p. 354, & seqq.

§. 24. In Gallia feliciori successu laborem hunc exantlatus est PICARDUS, postea continuatus a CASSINO. Mensurationem PICARDI videre licet in Tractatu, quem ex sermone Gallico in Anglicum transtulit RICHARDUS WALLER & *Londini* sub titulo: *The Measure of the Earth* 1688, (plag. 6, Tabb. 4), edidit, tum in Commentariis Academiæ Regiæ scientiarum Parisinæ ab An. 1666, usque ad An. 1699, Tom. 7, *Cassinianam* vero in Commentariis An. 1718.

§. 25. Quoniam per mensurationes *Cassinianas* alia prodibat figura Telluris, quam per demonstrationes NEWTONI atque HUGENII; ideo jussu Regis Christianissimi DE MAUPERTUIS cum Sociis, summo cum studio & plusquam Herculeo labore, gradum Meridiani prope circulum polarem dimensus est aliasque observationes huic instituto inservientes instituit. Legatur Tractatus, quem *Parisiis* An. 1738, in 8. edidit (plag. 13, Tabb. 16). Observationibus hisce exactis-

exactiſſimis figura Telluris confirmatur *Newtoniana* & *Hugeniana*. Conſtat juſſu Regis Chriſtianiſſimi eodem fine miſſos eſſe Mathematicos in regnum Peruvianum, qui ubi redierint, cum publico dubio procul communicabunt abſque mora ſuas quoque obſervationes.

§. 26. Theoriam atque praxin Gnomonicam more veterum rigidiſſime, ſed adeo intricate demonſtravit CHRISTOPHORUS CLAVIUS (§. 24, cap. 1) ut vix credibile ſit, ullum unquam ejus demonſtrationes omnes perlegiſſe. Faciliores vero exhibent DECHALES atque OZANAM in curſibus (§. 4, 7, cap. 1).

§. 27. Demonſtrationes quoque affert GUARINUS GUARINI in parte poſteriore *Mathematicæ cæleſtis* (*Mediol.* An. 1683, in fol. 1 Alph. 3 plag.). Pars prior, quæ una cum poſteriore prodiit (7 Alph. 5 plag.) integram Aſtronomiam complectitur.

§. 28. Novam methodum horologia ſolaria magna conficiendi, lineis horariis per calculum determinatis, invenit PICARDUS, quæ in Operibus Mathematicis Academicorum Gallicorum (§. 31, cap. 1) legitur. Et Cel. PHILIPPUS DE LA HIRE in ſua *Gnomonica*, quam patrio ſermone *Pariſiis* 1683, in 12. reg. publici juris fecit, methodum Geometricam expoſuit, ex quibuſdam punctis per obſervationem determinatis lineas horarias ducendi.

§. 29. Anno 1625, EBERHARDUS WELPERUS, Artium Magiſter, *Argentorati* propriis ſum ibus typis deſcribi curavit ſuum de *Gnomonica* tractatum vernaculum in 4. (plag. 8), in quo ex facili fundamento horologia in planis primariis deſcribere docet. Idem fundamentum jam antea perſpicue expoſuit eodemque in deſcribendis horologiis uſus eſt SEBASTIANUS MUNSTERUS in *Rudimentis Mathematicis*, quorum liber prior prima elementa Geometriæ, poſterior omnigenum horologiorum genus delineare docet. (*Baſileæ* An. 1551, in fol. 2 Alph. 20 plag.).

§. 30. WELPERI Gnomonicam An. 1672, *Norimb.* in 4. (plag. 21, Fig. plag. $14\frac{1}{2}$) recudi curavit & integra parte ſecunda de horologiis inclinatis & declinatis, ac figuris Zodiacalibus, arcubuſque diurnis, & horis varii generis inſcribendis auxit, notiſque partem primam illuſtravit JOH. CHRISTOPHORUS STURMIUS, Math. Prof. Altorfinus. Addidit An. 1681. (*Norimbergæ* in 4. plag. 19, Fig. plag. 9) partem tertiam de horologiis reflexis & portatilibus. Eadem Gnomonica cum inſigni augmento *Sturmiano* denuo recuſa *Norimbergæ* An. 1708, in fol. (2 Alph. 16 plag. Tabb. 35). Acceſſit vero pars quarta, in qua methodi, *Picardiana & Lahiriana*, magna horologia deſcribendi exponuntur (§. 28). In hoc adeo opere plura continentur, quam ullibi in unum volumen con-

congesta reperire licet, ita ut instar omnium esse possit, nisi quis demonstrationes exasciatas praxium desideret, theoriæ magis, quam praxi intentus. Appendicis quoque loco adjicitur Tractatus de horologiis automatis ex Anglico in Germanicum sermonem translatus, quemadmodum jam supra monuimus (§. 26, cap. 6.).

§. 31. Commendandum hic quoque est opus de horologiis majoribus delineandis, methodo universali, quod debetur J. G. DOPPELMAYERO, Matheseos Professori Norimbergensi, & sub titulo: *Neue und gründliche Anweisung*, wie *nach einer Universal-Methode grosse Sonnen-Uhren aus einem arithmetischen und geometrischen Fundament zu zeichnen*, *Norimbergæ* An. 1719, in fol. (Alph. 2, plag. 10, Tabb. 20) prodiit. Quodsi idem cum novissima & auctiori Gnomonica *Welperiana* conjungas, vix est ut quicquam in praxi Gnomonica, sive utilitatem, sive curiositatem spectes, amplius desideres. Ceterum ALEXANDER in eximio de horologiis Tractatu egregiam quoque tradit methodum horologia majora solaria accurate in quovis pariete delineandi (§. 26, cap. 6.)

§. 32. Solas praxes tradunt JOHANNES PETERSON STENGEL in *Gnomonica universali*, idiomate vernaculo (*Ulmæ* An. 1706, in 8. plag. 18, Tabb. 109) edita, rerum varietate commendanda; GEORGIUS MICHAELIS in *Praxi Gnomonica* Germanice An. 1701, *Jenæ* in 8. edita (12 plag. fig. æn. plag. $1\frac{1}{2}$), qui tamen tantum communiora exponit; JOH. ULRICUS MULLER in *Indice horarum infallibili* Germanice itidem *Ulmæ* An. 1702, in 8. edito (1 Alph. plag. 9, Fig. æn. plag. 9) & HENRICUS COETSIUS in *Horologiographia plana* (*Lugd. Batav.* An. 1689, in 4. plag. 12, Tabb. 20), qui tamen inscriptiones signorum & arcuum diurnorum negligit, nec ad horologia portatilia descendit.

§. 33. Anno 1711, *Augustæ Vindelicorum* in 4. ($2\frac{1}{2}$ Alph. Tabb. æn. $21\frac{1}{4}$ plag.) prodiit JOHANNIS GAUPPENII *Gnomonica Mechanica universalis*, sermone vernaculo in eorum gratiam conscripta, qui in theoria Mathematica parum versati. Inseruit operi suo Tractatum brevem, quem HENRICUS BIERUM, Architectus militaris, An. 1676, (plag. 4) ediderat, & ejus fundamento mechanice describendi horologia utitur. Rerum varietate commendatur iis, qui variis horologiorum solarium generibus conficiendis delectantur.

§. 34. Eodem fundamento nititur JOHANNES JACOBUS SCHEUBLERUS in libro Germanico, qui sub titulo: *Neue und deutliche Anleitung zur practischen Sonnen-Uhr-Kunst*, *Norimbergæ* An. 1726, in 8. reg. (plag. 14, Tabb. 44) prodiit, & ubi inter alia ornamenta, quibus horologia solaria parietibus inscripta circumscribi possunt, delineat. Alias jam

O 2 initio

initio seculi præteriti CASPARUS UTTENHOEFER, civis Norimbergensis, Pedem Mechanicum invenit, cujus ope horologia solaria mechanice delineari possunt. Descriptionis editio altera auctior prodiit *Norimbergæ* An. 1620, in 4. (plag. 7).

§. 35. Horologiorum solarium omnis generis, præsertim portatilium descriptionem etiam tradit NICOLAUS BION in opere Gallico *De constructione & præcipuis usibus instrumentorum mathematicorum* (*Parisiis* An. 1709, in 8. reg. 1 Alph. Tabb. 28), quod unicum fere in hoc genere a J. G. DOPPELMAYERO Prof. Math. Noribergensi ex Gallico in Germanicum sermonem verti meruit (*Noribergæ* An. 1712, in 4. Alph. 2, plag. 5, Tabb. 28).

§. 36. Commendari quoque merentur Machinæ duæ, quæ pro describendis horologiis solaribus publicavit aliquoties jam citatus IGNATIUS GASTON PARDIES (*Hagæ Comitum* An. 1691, in 12. 2 plag.). In hac editione tertia subjunguntur Elementis Staticæ.

§. 37. Methodum trigonometricam describendi horologia solaria excoluit BERNARDUS GRUBER, S. Ordinis Cisterciensis in Monasterio B. V. Mariæ de Alto Vado Professus, in Collegio Archiepiscopali Pragæ A. L. L. & Philosophiæ Professor, in *Horographia trigonometrica*, seu *Methodo accuratissima arithmetice per sinus & tangentes horologia quævis solaria in plano stabili qualitercunque situato, etiam declinante & simul inclinato, facile negotio describendi, & quædam alia, quæ vialia dicuntur, expositis eorundem fundamentis & rationibus*, *Vetero-Pragæ* An. 1718, in 4. (Alph. 1, plag. 14, Tabb. 11) edidit. Idem institutum fuit BENEDICTI MARIÆ CASTRONII, Ordinis Prædicatorum ac Panormi Matheseos Professoris, qui *Horographiam universalem*, *seu Sciatericorum omnium planorum*, *gnomonice nova methodo describendorum*, *pro quovis horologio sive astronomico*, *sive Italico*, *sive Babylonico*, *sive Judaico doctrinam uniformem atque universalem*, *sola triangulorum analysi breviter expositam*, *cum Isagogicis nonnullis Mathematum & triplici Appendice de nautica scientia*, *de militari Architectura*, *ac de temporum Janua*, *Panormi* An. 1728, in fol. (Alph. 4, plag. 10, Tabb. 19) edidit. Temporum Januam vocat Calendarium quoddam perpetuum, Januæ formam præ se ferens, quod a se inventum. Tenendum hic est methodum trigonometricam, quæ & arithmetica dici solet, in Gnomonica præferendam esse geometricæ, cum hæc facilius errori obnoxia fiat, qui per illam evitari potest.

§. 38. Quoniam non cujusvis est per calculum trigonometricum eruere numeros, quibus in describendis horologiis solaribus opus est; ideo JOANNES LUDOVICUS QUADRI, Academiæ Instituti scientiarum Bononiensis

niensis adscriptus idiomate Italico *Bononiæ* An. 1733, in 4. (Alph. 1, plag. 5, Tabb. 6) edidit *Tabulas Gnomonicas delineationi Horologiorum sciatericorum inservientes*; quæ consentiunt cum horologiis Italicis, sonitu campanæ pulsæ horas indicantibus: ut adeo Italorum tantummodo usui destinentur. Dederat jam ante istiusmodi Tabulas in Italia P. ANGELUS MARIA COLOMBONUS & apud Nostros JO. GAUPPIUS in *Gnomonica mechanica* (§. 33) & BERNARDUS GRUBER in Horographia trigonometrica modo laudata (§. 37). Edidit quoque Tabulas Gnomonicas, sed pro horarum quovis genere, sub titulo *Deliciarum mathematicarum*, sermone patrio, una cum brevi descriptione praxeos universæ Geometriæ & Trigonometriæ tam sphæricæ, quam planæ, quæstionibusque & problematibus astronomicis chronologicisque ad Calendarium ecclesiasticum pertinentibus, ope tabularum logarithmicarum facili modo solvendis, *Romæ* An. 1730, in 4. reg. (Alph. 4. plag. 2, Tabb. 14).

§. 39. Hic denique commemorare lubet ADRIANI METII, Med. D. & Matheseos Professoris in Academia Frisiorum, *Primum mobile astronomice, sciographice, geometrice & hydrographice nova methodo explicatum*. Prodiit editio nova ab innumeris mendis vendicata & instrumentis mathematicis aucta a GUILIELMO BLAEU *Amstelodami* An. 1633, in 4. (Tomus I, Alph. 2. Tom. II, Alph. 1, plag. 12. Tom. III, Alph. 1, plag. 10. Tom. IV, plag. 20). Primo exponitur doctrina Sphærica, Gnomonica & Geographica; secundo continetur accurata descriptio Astrolabii utriusque & ejus usus, una cum Trigonometria sphærica; tertio solvuntur problemata primi mobilis per astrolabium, Trigonometriam sphæricam & Tabulas Astronomicas; quarto denique problemata primi mobilis geometrice delineantur & arithmetice solvuntur, atque Tabulæ geographicæ & hydrographicæ describuntur, & per easdem, tumque per Canones ex secantibus conflatos, Ars navigandi absolvitur.

CAPUT XI.

De Architectura Civili.

§. 1. INtegram Architecturam civilem tradidit VITRUVIUS, qui sub AUGUSTO floruit, cui decem *De Architectura* libros dedicavit. Optima editio Latina prodiit *Amstelodami* An. 1649, in fol. (6 Alph.).

Accessere huic editioni novæ castigationes & observationes GUIL. PHILANDRI integræ, DANIELIS BARBARI & CLAUDII SALMASII excerptæ & passim insertæ. Præmittuntur *Elementa Architecturæ* HENRICI WOTTONI, Equitis Angli: subjiciuntur *Lexicon Vitruvianum* BERNHARDI BALDI, ejusdem *Scamilli impares Vitruviani*, *De pictura* libri tres LEONIS BAPTISTÆ DE ALBERTIS, *De sculptura* excerpta ex Dialogo POMPONII GAURICI & Commentarius *De sculptura & pictura* LUDOVICI DEMONTIOSII.

§. 2. Reprehendunt in egregio alias opere *Vitruviano*, quod nullum ordinem tenuerit; quod obscure scripserit, nempe judice LEONE BAPTISTA DE ALBERTIS *(a)* Græcis Latine & Latinis Græce; quod denique multa superflua ac aliena immiscuerit. Hinc PERRAULT, quemadmodum olim suaserat PHILIBERTUS DE L'ORME, regulas Architectonicas Vitruvianas ex opere prolixo excerpsit & in ordinem redactas sub titulo: *Architecture generale de Vitruve reduite en Abregé* publici juris fecit (*Amstelodami* An. 1681, in 8. 16½ plag. & fig. æn. plag. 1½). Textum obscurum VITRUVII in versione Germanica, & adjecta singulis capitibus paraphrasi clariorem redidit D. GUALT. H. RIVIUS. Recusa est hæc versio *Basileæ* An. 1614, in fol. (7 Alph. 2 plag.). In paraphrasi seu Commentario, si mavis, more *Vitruviano*, multa aliena admiscuit. Magis commendanda est versio Gallica, quam primum An. 1673, typis describi, sed An. 1684, auctiorem & emendatiorem recudi curavit PERRAULT adjectis notis selectis & figuris æri nitidissime incisis (*Parisiis* in fol. reg. 4 Alph. 5 plag.). Idem PERRAULT opus præclarum de Ordinibus An. 1684, in fol. addidit sub titulo: *Ordonnance des cinq espéces de Colonnes selon la methode des anciens*, in quo præjudicia Architectorum refellit & quod instar supplementi Architecturæ VITRUVII haberi potest, qui doctrinam de Ordinibus imperfectam tradidit.

§. 3. Post VITRUVIUM libros decem *De re ædificatoria* edidit LEO BAPTISTA DE ALBERTIS aliquoties recusos & ex idiomate Latino in varias Linguas translatos. Prodiit Latine *Parisiis* An. 1512, in 4. (2 Alph.) & *Florentiæ* An. 1585. Italice lucem adspexit *Venetiis* An. 1546, in 8. (1 Alph. 9½ plag.); Gallice An. 1553. Multa habet utilia; sed VITRUVIO, quemadmodum intenderat, palmam præripere non potuit. Doctrinam de Ordinibus non satis perfectam tradidit.

§. 4. Mox secuti sunt SEBASTIANUS SERLIUS & ANDREAS PALLADIUS coætanei, quorum ille septem, hic quatuor *De Architectura* libros

(a) Lib. 6, cap. 1, de re ædificatoria pag. 80, & seq.

bros composuit. Architecturæ *Serlianæ* libri quinque Italice *Venetiis* An. 1602, in fol. Germanice, *Basileæ* An. 1609, in fol. (4 Alph. 13 plag.) prodiere. Quinque tantum ordines cum variis ædificiorum generibus describit; regulas ex VITRUVIO supponit, a quibus recedere religioni duxit. Vid. lib. 3, f. 46, edit. Venetæ. Liber sextus de ædificiis privatis in publicum nondum prodiit: Septimum de ædificiis publicis JACOBUS STRADA Latine & Gallice *Francofurti* An. 1575, in fol. imprimi curavit.

§. 5. PALLADIUS hanc laudem meruit, quod splendorem ordinibus ac operibus suis conciliaverit. Libro primo regulas fundamentales Architecturæ tradidit; reliquis varia ædificiorum & operum architectonicorum genera delineavit. Commendatur Architecturæ purioris studiosis. Prodiere libri omnes Italice An. 1575, in fol. recusi anno superiore An. 1714, *Venetiis* in fol. adjecto ipsius de Antiquitatibus Romanis tractatu. Libros duos priores GEORGIUS ANDREAS BOECKLER, Germanice vertit & multis annotationibus auxit (*Norimbergæ* 1689, in fol. 1 Alph. 3 plag. Tabb. 88). Idem PALLADIUS scripsit *de Templis Romanis* (An. 1554, in 8).

§. 6. PHILIBERTUS DE L'ORME, Caroli IX Consiliarius, Eleemosinarius & Architectus An. 1567, *Parisiis* in fol. edidit novem *De Architectura* libros idiomate vernaculo. Architecturæ peritia adeo celebris erat, ut ad excitanda palatia Principum ex Gallia in exteras regiones evocaretur.

§. 7. JACOBUS BAROZZIUS VIGNOLA An. 1631, Italice de quinque ordinibus scripsit, cujus liber in varias linguas translatus. Utor ego editione Gallica, quæ sub titulo: *Régles des cinq Ordres d'Architecture de* J. B. DE VIGNOLE, *avec plusieurs augmentations de* MICHEL ANGE BUONAROTI, curâ DURÆI DE CHAMPDORE', *Lugduni Batavorum* An. 1712, in 8. prodiit (plag. 9½). Eundem prolixis additamentis locupletavit DAVILER & idiomate Gallico Parisiis in 4. edidit cum Lexico Architectonico. Mox recusum est opus sub titulo: *Cours d'Architecture, qui comprend les Ordres de* VIGNOLE *avec des Commentaires, les figures & descriptions des plus beaux bâtimens & de ceux de* MICHEL ANGE *&c. Amstelodami* An. 1694, in 4. (3 Alph. 20 plag. Tabb. 103, magnam partem textui insertæ). LEONHARDUS CHRISTOPHORUS STURMIUS Germanice vertit & notis quibusdam auctum, omisso Lexico, *Amstelodami* An. 1699, in 4. (2 Alph.) edidit, figuram plagulis 3½, adjectis ultra eas, quæ in editione Gallica habentur. Prodiit nuper nova editio Gallica *Parisiis* in 4. auctior. Laudatur ob facilitatem & perspicuitatem. Unde omnibus fere sese probavit, qui praxi operam dant.

§. 8. VIN-

§. 8. VINCENTIUS SCAMOZZI An. 1615, Venetiis sermone patrio edidit librum primum, secundum, tertium, sextum & septimum *Ideæ Architecturæ universalis* in fol. Præstantissima editio est, quæ idiomate Gallico *Lugd. Batav.* An. 1713, in fol. reg. (3 Alph. 5 plag. Tabb. 105, quarum 84 textui insertæ) sub titulo: *Oeuvres d'Architecture de* VINCENT SCAMOZZI prodiit. Liber sextus & tertius Germanice versus sub titulo: *Klärliche Beschreibung der fünf Säulen-Ordnungen und der gantzen Bau-Kunst. Norimbergæ* An. 1697, in fol. (2 Alph. 6 plag. Tabb. 85) lucem adspexit. Laudatur, quod Symmetriam unus omnium optime excoluerit, sed intricate scribit.

§. 9. CAROLUS PHILIPPUS DIEUSSART in *Theatro Architecturæ civilis*, quod vernaculo sermone *Bambergæ* An. 1697, in fol. reg. (1 Alph. 3 plag. Tabb. 95) prodiit, non modo regulas Architectonicas explicavit, verum etiam Ordines juxta institutum PALLADII, VIGNOLÆ, SCAMOZZI, PETRI CATANEI, SEBASTIANI SERLII & BRANCÆ inter se comparavit: quod idem executus est ante ipsum ROL. FREARD DE CHAMBRAY in *Parallelismo Architectonico* Gallice *Parisiis* An. 1650, in fol. publicato. Et postea idem fecit LE BLOND in Libro sub titulo: *Parallele des V. Ordres d'Architecture, Parisiis* An. 1710, in 4. edito. Plurium quoque Architectorum Ordines inter se confert JOHANNES CHRISTIANUS SEYLER, in *Parallelismo Architectonico* Germanice *Lipsiæ* in fol. edito.

§. 10. FRANCISCUS BLONDEL in *Cursu Architecturæ* Gallico (*Parisiis* An. 1698, in fol. reg. 8 Alph. 14 plag. Tabb. 24, cum figuris plurimis textui insertis) parte prima Ordines VITRUVII, VIGNOLÆ, PALLADII & SCAMOZZI explicat; in ceteris quatuor ex omnium Architectorum celebrium scriptis congessit, quicquid circa ordinum usum notatu dignum occurrit. Habentur etiam in eodem alia nonnulla ad Architecturam spectantia, v. gr. de fenestris & scalis. Cursus hujus aliquid jam 1675 prodierat. Ea potissimum explicare intendit, quæ ad ornatum ædificiorum faciunt.

§. 11. NICOLAUS GOLDMANNUS, Vratislaviensis, in Tractatu *de Stylometris* (*Lugd. Batav.* An. 1661, fol. Lat. & Germ. 9 plag. Tabb. 40) ostendit, quomodo Ordines Architectonici ab ipso ad majorem perfectionis gradum deducti ope peculiarium quorundam instrumentorum facile delineari possint: quorum & constructionem, & usum docet, textui Latino ad latus adjecta versione Germanica. In opere vero Architectonico, quod LEONHARDUS CHRISTOPHORUS STURMIUS sub titulo: *Vollständige Anweisung zu der Civil-Bau-Kunst* (*Guelpherbyti* An. 1696, in fol. reg. 2 Alph. 4 plag. Tabb.

Tabb. 74) publici juris fecit, præter Ordinum doctrinam, magna dexteritate tradiditquicquid in VITRUVII, & Architectorum Italorum scriptis atque VILALPANDI Commentario in Prophetam Ezechielem, ex quo se plura didicisse ait, quam ex Architectorum ceterorum omnium scriptis, boni continetur: ita ut hoc opus ceteris omnibus præferatur. Cl. Editor An. 1699, Appendicem sub titulo: *Ausübung der Civil-Bau-Kunst des Goldmanns*, in fol. (1 Alph. 14 plag. Tabb. 19) adjecit, in quibus ex aliis supplet, quæ in eo scitu necessaria desiderantur. Ordinem quoque sextum, quem Germanicum appellat, proponit; sed hactenus in usum non receptum. Fallitur autem plurimum editor, dum sibi aliisque persuadere vult, GOLDMANNUM regulas Architecturæ demonstrasse & eam in formam scientiæ redegisse. Plura ad operis hujus illustrationem posthac edidit STURMIUS, qui Architecturæ totus erat deditus. Sed de his dicemus mox apertius.

§. 12. DOMINICUS DE ROSSI in *Studio Architecturæ civilis in ornamentis portarum & fenestrarum, delineatis ex insignioribus Romæ ædificiis* An. 1702, seu potius 1712, *Romæ* in fol. reg. edito figuris æneis 143, celeberrimorum Architectorum monumenta circa ornatum portarum & fenestrarum repræsentat. *Augustæ Vindelicorum* figuris ad minorem modulum reductis recusum est hoc opus, ut facilius & minori sumtu comparari possit. Plurima tamen habet, quæ imitari non licet, nisi a puritate Architecturæ Græcorum recedere velis.

§. 13. Ad eam perspiciendam inservit opus, quod ANTONIUS DESGODETZ, qui ædificia antiqua Romæ ex ruderibus nitidissime delineavit, sub Titulo: *Edifices antiques de Rome* (*Parisiis* An. 1697, in fol. (3 Alph. 17 plag.) edidit.

§. 14. JOHANNES BALTHASAR LAUTERBACH in *Compendio Architecturæ* (*Amstelodami* An. 1699, in 8. Gall. 2 plag. Tabb. 18) ordines Architectonicos delineandi methodum facillimam proponit.

§. 15. In *Gallia* An. 1728, in 4. reg. (Alph. 1, plag. 19½, Tabb. 150) prodiit opus architectonicum sub titulo: *Architecture moderne, ou l'Art de bien batir pour toutes sortes de Personnes, tant pour les Maisons des particuliers; que pour les Palais.* Explicantur satis perspicue omnia, quæ ad exstructionem ædificiorum omnis generis scitu necessaria, excepta doctrina de Ordinibus, quæ aliunde nota supponitur. Maximam operis partem complent omnis generis ædificiorum delineationes, quibus doctrina de distributione ædificiorum illustratur, vulgo vel neglecta, vel saltem nonnisi levi brachio pertractata. Commendatur etiam Tractatus de Architectura, quem LE MUET in 4. edidit, inventiones quasdam novas continens; sed nobis non visus.

§. 16. Ædificia magnifica, cura PETRI POST Architecti insignis, passim per Bataviam exstructa accurate describuntur tum quoad ichnographiam, tum quoad orthographiam cum externam, tum internam in opere splendido, quod sub titulo: *Les Oeuvres d'Architecture de* PIERRE POST, *Lugd. Batav.* An. 1715, in fol. reg. (plag. 22, Tabb. 75) prodiit. Orthographiæ externæ & ichnographiæ ædificiorum, quæ in Batavia extruxit PHILIPPUS VINGBOON, Architectus Amstelodamensis, exhibentur in alio opere, quod sub titulo: *Les nouvelles Oeuvres d'Architecture de* PHILIPPE VINGBOONS *Lugduni Batav.* An. 1715, in fol. reg. (plag. 11, Tabb. 80) lucem adspexit.

§. 17. Villas Veterum, in quibus describendis admodum parcus est VITRUVIUS, idiomate Anglico plenius descripsit ROBERTUS CASTELLUS & sub titulo: *The Villa's of the Ancients illustrated*, *Londini* suis sumtibus in fol. (Alph. 1, plag. 12, Tabb. 11) edidit. *De Amphitheatris* vero & præcipue Veronensi libros duos idiomate Italico *Veronæ* 1718, in 12, (plag. 15, Fig. æn. 15) edidit SCIPIO MAFFEIUS, in quo non minus ea, quæ ad historiam, quam architecturam eorundem pertinent, exponuntur. Formam minorem elegit autor ob commodiorem usum in ruderibus eorundem perlustrandis.

§. 18. Anno 1721, *Viennæ Austriæ* in fol. reg. (Alph. 1, plag. 21, Tabb. 93) prodiit opus splendidissimum JOHANNIS BERNHARDI FISCHERI AB ERLACHEN, S. Cæsareæ Majestatis Architecti primarii, sub titulo: *Entwurff einer historischen Architectur*, hoc est, Speciminis Architecturæ historicæ, sumtibus Autoris, in quo varia exhibentur ædificia, quæ ab antiquis historicis celebrantur, vel hodienum apud exteras gentes conspiciuntur, æri nitidissime insculpta. Textui Germanico adjicitur versio Gallica, ut exterorum quoque usui inserviat.

§. 19. In *Opere architectonico* FRANCISCI BORROMINI, Patrum Congregationis Oratorii, quod Romæ est, Architecti, describuntur Oratorium Ædesque Romanæ P. P. Congregationis Oratorii S. *Philippi Neri*. Prodiit *Romæ* An. 1725, in fol. (plag. 8, Tabb. 67).

§. 20. In *Schola* vero *civili Architecturæ*, quam FERDINANDUS RUGGIERI, Architectus Italus, idiomate patrio *Florentiæ* An. 1722, in fol. reg. (Tabb. 80) edidit, præmissa præfatione & dedicatione cum indice contentorum, exhibentur ornamenta januarum & fenestrarum cum mensuris, ichnographia, orthographia & sectionibus verticalibus e potioribus Florentiæ ædificiis desumta, quæ a celeberrimis Italiæ Architectis extructa esse constat, ita ut nulla per totam Italiam occurrat urbs, quæ ædificiis se magis commendet Florentia.

§. 21. Non

§. 21. Non exiguus est numerus illorum scriptorum, quæ illustrandæ Architecturæ *Goldmanniæ* causa reliquit LEONHARDUS CHRISTOPHORUS STURMIUS & quæ post fata ipsius *Augustæ Vindelicorum* impensis Chalcographi Augustani JEREMIÆ WOLFII lucem adspexerunt. Eorum argumentum ex ipso titulo comparet, quos hic ex Germanico in Latinum versos exhibere lubet. *Nimirum* An. 1718, in fol. (plag. 8, Tabb. 11) lucem adspexerunt *Idea & compendium Architecturæ Civilis*, explicationem terminorum technicorum & præcipuarum regularum exhibens; An. 1717, (plag. 17, Tabb. 17) *Officina ornatus architectonici perfecta*, in qua ordines architectonici juxta GOLDMANNUM, cujus insignia in hoc genere merita, describuntur; An. 1730, (plag. 4½, Tabb. 10) *Regula symmetriæ*, eæque in Architectura templi Salomonæi conspicuæ & ab eodem mutuo in nostra opera transsumtæ; An. 1718, (plag. 4½, Tabb. 9) *Tractatio de arcuationibus architectonicis triumphalibusque arcubus rite designandis*; An. 1720, (plag. 3, Tabb. 17) *Institutio de interioribus ædificiorum rite ordinandis & disponendis*, ubi etiam de aperturis fenestrarum & januarum, & de caminis, scalis, cœlis conclavium, aulis subdialibus præcepta reperiuntur. Anno eodem (plag. 4½, Tabb. 5) *Institutio Goldmanniana de ornatu architectonico extraordinario*, veluti picturis, quibus ædificia exornantur, statuis & sculpturis, obeliscis, encarpis, cornibus Amaltheæ &c. An. 1715, (plag. 4, Tabb. 15) *Institutio de commoda dispositione ædium privatarum & civilium*; An. eodem (plag. 5, Tabb. 8) *De suburbanis & nobilium ædibus in agris*; An. 1718, (plag. 21, Tabb. 35) *De construendis palatiis Principum* ad Architecturæ regulas & genium seculi nostri; An. eodem (plag. 6, Tabb. 13) *De ædificiis ad conventus publicos Provinciæ rectorum, magistratuum, mercatorum &c. instituendos aptis*; An. eodem (plag. 8, Tabb. 22) *De templis varii generis bene construendis*; An. 1720, (plag. 6½, Tabb. 15) *De ædificiis publicis, quæ curæ orphanorum, liberalibus studiis erudiendorum, ob flagitia castigandorum, senum, ægrotorum, peregrinorum & vinctorum custodiæ destinantur, rite parandis*; An. eodem (plag. 2, Tabb. 5) *De monumentis defunctorum, cenotaphiis, castris doloris* &c. An. eodem (plag. 4½, Tabb. 10) *De machinis hydraulicis, aquæ ductibus, fontibus & cisternis publicis*, & tandem An. 1721, (plag. 2½, Tabb. 4) *De Navium armamentariis & stationibus, itemque partibus rite parandis.* Ceterum huc etiam pertinet Prodromus Architecturæ Goldmannianæ editioni novæ & auctiori præmissus, qui sub titulo: *Vorbereitung zu einer neuen und vermehrten Edition der vollständigen Anweisung zur Civil-Bau-Kunst, Augustæ Vindelicorum* An. 1714, in fol. reg. (plag. 10, Tabb. 29) prodiit.

diit. In eo de cognitione Architecto necessaria agit, consilium impertitur, quomodo Princeps efficere possit, ut omnis materia sufficienti copia in promtu habeatur, ædificium publicum describit, in quo materiæ cum machinis & instrumentis asserventur, & denique specimina quædam Architecturæ exhibet, veluti ideam palatii principalis, domus suburbanæ Ducis Megapolitani & turris alicujus prægrandis.

§. 22. In Anglia GUILIELMUS HALFPENNY *Londini* An. 1728, in 4. (plag. 3, Tabb. 15) edidit libellum sub titulo: *Magnum in parvo*, seu *The Marrow of Architecture*, hoc est, Medulla Architecturæ. In eo ordines architectonicos juxta PALLADIUM una cum arcubus delineare docet.

§. 23. Artem tignariam illustrant DECHALES in cursu (§. 4, cap. 1) JOHANNES WILHELM in *Architectura civili* idiomate Germanico edita *Norimbergæ* in fol. (5 plag. Tabb. 74) & JOHANNES VOGEL in *Architectura moderna* Germanico itidem idiomate conscripta (*Hamburgi* An. 1707, in fol. 3 plag. Tabb. 36). In Anglia JACOBUS SMITH edidit Tractatum de Arte tignaria *Londini* An. 1733, in 8. maj. (plag. 2, Tabb. 41) sub titulo: *The Carpenters Companion*, h. e. Fabrorum lignariorum Comes. Sed non alia habet quam WILHELMUS, nisi quod appendicem de ordinibus delineandis adjecerit.

§. 24. Artem secandi lapides in usum architectonicum, quam primus dedisse creditur PHILIBERTUS DE L'ORME in Architectura (§. 6), docent DECHALES in cursu (§. 4, cap. 1), qui sua ex opere, quod P. DERAN An. 1643 publicavit, præstantissimum in hoc genere, descripsit & DES ARGUES, cujus liber ex Gallico in Germanicum versus sub titulo: *Kunstrichtige und probmässige Zeichnung zum Steinhauen in der Bau Kunst*, *Norimbergæ* An. 1699, in 8. (15 plag. Tabb. 154) prodiit.

§. 25. Quoniam vero Autores isti, si P. DECHALES excipias, omissis demonstrationibus, tantummodo praxin inculcant, neque etiam hic perfectam dedit Theoriam; ideo hunc defectum supplere conatus est FREZIER in *Theoria & Praxi de Sectione Lapidum*, seu *Tractatu de Stereotomia*, sermone Gallico duobus Tomis *Argentorati* 1737, & 1738, in 4. maj. edito (Tomus I, Alph. 2, plag. 14, Tabb. 27. Tom. II, Alph. 2, plag. 19½, Tabb. 69). In usum eorum, qui praxi operam navant, ex Tomo secundo excerpi poterant, quæ huc faciunt, aut opus insigne P. DERAN in Linguam Germanicam verti mereretur.

§. 26. Ad Architecturam aquarum spectant libri Italici sequentes: 1. Jo. BAPTISTÆ BARATTERI *Architettura d'Acque* (*Piacenza* An. 1656, in fol. 3 Alph. 6 plag.) 2. CORNELII MEYERI, Batavi, *L'Arte di restituire*

tuire a Roma la tralasciata navigatione del suo Tevere (*Roma* 1675, in fol. 2 Alph. 3 plag. cum multis figuris textui insertis) & ejusdem *Nuovi ritrovamenti* (*Roma* An. 1689, in fol. plag. 8, & 1696, in fol. plag. 12, cum figuris plurimis) 3. DOMINICI GUIELMINI *della natura de' fiumi Trattato* (*Bononiæ* An. 1697, in 4. 2 Alph. 2 plag. 15 Tabb.). Ex *Meyeri* libro insigni plagio sua omnia descripsit Anonymus Gallus in libello *Amstelodami* An. 1696, in reg. 8. edito (6 plag. Tabb. 12) sub titulo: *Traité des moyens de rendre les Riviéres navigables*. Quoniam vero Theoriæ loco est, quod ab Italis præsertim de motu aquarum traditum; ideo non alienum a scopo præsente est injicere mentionem sylloges scriptorum de motu aquarum, quæ sub titulo: *Raccolta d'Autori, che trattano del moto dell' Aque*, Tomis tribus in 4. maj. *Florentiæ* An. 1723, (Alph. 9, plag. 6, Tabb. 44, cum multis figuris textui insertis) prodiit.

§. 27. Ad Architecturam aquarum referri quoque potest Tractatus de pontibus & aggeribus & dissertatio de crismatis, fornicibus, pilis & anteridibus pontium HENRICI GAUTIER, Architecti & Inspectoris viarum regiarum, pontium & aggerum in Gallia. Prodiit ille sub titulo: *Traité des ponts & chaussées*, *Parisiis* An. 1716, in 8. (plag. 14, Tabb. 26); hæc vero sub titulo: *Dissertation sur les Culées, voussoirs, piles & poussées des Ponts*. Habemus ab eodem autore Tractatum de viis muniendis sub titulo: *Traité de la Construction des Chemins*, (*Parisiis* An. 1716, in 8. (plag. 8, Tabb. 5) editum.

§. 28. De Architectura navali sermone Anglico commentatus est WILHELMUS SUTHERLAND, cujus quinque tentamina huc spectantia sub titulo: *The Shipbuilders Assistant, or Some Essays towards compleating the Art of Marine Architecture*, *Londini* An. 1711, in 4. (Alph. 1, Tabb. 13) lucem adspexerunt. Inprimis autem hanc Architecturæ partem tradidit Anonymus in Arte extruendi naves & earum constructionem perficiendi, quæ *Amstelodami* sub titulo: *L'Art de batir les Vaisseaux*, in 4. (Alph. 1, plag. 5½, Tabb. 147, quarum 35 textui inseruntur) edita.

§. 29. Geometriam practicam ad Architecturam civilem applicatam addiscere licet ex opere Anglico, quod sub titulo: *Practical Geometry applied to the usefull Arts of Building, Surveying, Gardening and Mensuration*, *Londini* 1726, in fol.(Alph. 1, plag. 11, Tabb. 40) edidit BATTY LANGLEY. Eodem instituto inservit *Architectura practica*, quam BULLET, Architectus Regius, An. 1691, in 8. maj. (Alph. 4, plag. 4) *Paris.* publici juris fecit.

§. 30. In Dictionario Architectonico, quod *Londini* 1734, in 8. reg. (Alph. 2, plag. 18, Tabb. 33) sub titulo: *The Builder's Dictionary* prodiit,

diit, non modo termini explicantur, verum etiam ex Architectorum celebrium scriptis excerpuntur, quæ res ipsas vocabulis denotatas concernunt. Unde non modo usui est Anglis, verum etiam exteris usui esse potest. Ceterum nullam hic mentionem facimus scientiæ Architectorum militarium de BELIDOR, in qua multa habentur ad Architecturam spectantia singularia, quæ alibi frustra quæsiveris, quia de hoc libro dicemus capite 13.

CAPUT XII.

De Pyrotechnia.

§. 1. INter nostros, qui Pyrotechniæ operam dant, maximi fiunt CASIMIRUS SIMIENOWITZ, Polonus, JOHANNES SIGISMUNDUS BUCHNERUS & ERNESTUS BRAUNIUS. Illius opus a THOMA LEONHARDO BEEREN ex Latino idiomate in Germanicum translatum & a DANIELE ELRICH integra parte secunda auctum prodiit *Francofurti ad Mœnum* An. 1676, in fol. sub titulo: *Vollkommene Buchsen-Meisterey-Kunst*. Ex eo sua plerumque descripsit DECHALES in Cursu (§. 4, cap. 1). Istius *Theoria & praxis Artilleriæ* Germanico idiomate *Norimbergæ* An. 1685, in fol. (2 Alph. 18 plag. Tabb. 53) Hujus denique *Novissimum Fundamentum & praxis Artilleriæ* eodem sermone conscriptum *Dantisci* An. 1687, in fol. (2 Alph. 16 plag. Tabb. 60) lucem adspexit. Ceterum Autores isti non tantum de iis agunt, quæ in bello usui sunt. sed ignium quoque festivorum rationem exponunt.

§. 2. MICHAEL MIETH in *Artilleria recentiori praxi* lingua nobis vernacula conscripta (*Francof.* An. 1684, in fol. 3 Alph. 10 plag. Tabb. 60) tormentorum & mortariorum descriptionem omnium exactissimam dedit & ignium nocivorum rationem declaravit, festivis omissis. Atque hi Autores abunde satisfaciunt iis ipsis, qui Pyrotechniæ data opera incumbunt.

§. 3. Inter Gallos eminet SURIRÆUS DE S. REMIGIO, cujus Commentarii Pyrotechnici (*Mémoires d'Artillerie*) accuratam descriptionem continent omnium machinarum & instrumentorum bellicorum hodie usitatorum, una cum rebus aliis eo pertinentibus. Optima editio est *Parisiensis* An. 1707, in 4. reg. (4. Alph. 17 plag. Tabb. 196), quæ ceteris quoque longe auctior.

§. 4. Ob peritiam bellicam celeberrimus COEHORNIUS sermone Batavo de Artilleria libellum brevem, sed

ſed autore ſuo dignum, conſcripſit, qui ſuppreſſo ejus nomine in Germanicum translatus ſub titulo: *Der gründliche Unterricht von der Artillerie*, *Hamburgi* An. 1699, in 8. (10 plag. Tabb. 23) prodiit.

§. 5. Tyronum uſui ſervit Fabrica *Vulcani*, quam *Eques de S. Juliano* (*Chevalier* DE SAINT JULIEN) *Hagæ* An. 1706, in reg. 8. (10 plag.) edidit. Titulus libri: *La Forge de Vulcain, ou l'Appareil des Machines de Guerre.*

§. 6. An. 1713, idiomate vernaculo prodiit Compendium pyrotechnicum, Pyrotechniæ ſtudioſis commendandum, ſub titulo: *Gründlicher Unterricht von der Theoria und Praxi der heutigen Büchſenmeiſterey*, *Francofurti* An. 1713, in 8. (2 Alph. 4 plag. 29 Tabb.). Si titulo fidem habemus, lingua Gallica ipſum conſcripſit *Eques* DE S. JULIANO modo laudatus, & inde in Germanicam tranſtulit AUGUSTINUS BRAND. Sed diverſum non modo eſt a Fabrica *Vulcani* paulo ante laudata; verum etiam partem primam integram verbotenus ex MIETHII Artilleria deſcriptam reperio, quod quomodo in verſione libri a Gallo Gallice conſcripti accidere potuerit, non ſatis apparet.

§. 7. Aliud compendium, ſed minoris pretii, ante dedit GEORGIUS ANDREAS BOECKLER Tom. III, & IV, *Manualis Architecturæ militaris* (*Francof.* & *Lipſ.* An. 1689, in 16, Tom. III, 4 plag. Tabb. 11, & Tom. IV, 10 plag. Tabb. 34). Cum tamen COEHORNIUS, *Eques* DE S. JULIANO & BRANDIUS tantum tradant, quæ uſui bellico inſerviunt; BOECKLERUS quoque de ignibus feſtivis tractat.

§. 8. Ceterum huc etiam referri debet BLONDELLI Tractatus de bombis jaciendis, qui ſub titulo: *L'Art de jetter les Bombes*, *Pariſiis* An. 1683, in 4. prodiit & in Germanicam linguam translatus *Sulzbaci* An. 1686, in 8. recuſus. Scriptum Mathematico dignum. Huic affine eſt ſcriptum, quod ſub titulo: *Le Bombardier François*, DE BELIDOR, *Pariſiis* editum, *Amſtelodami* recuſum An. 1734, in 4. reg. (Alph. 2, plag. 11, Tabb. 8), in quo ſimul praxis Pyrotechniæ concinna perſpicuitate exponitur. Pertinet huc etiam F. E. Comitis DE HERBERSTEIN *Cyclodiatomia*, qua pro rei tormentariæ incremento motum ac tempus projectorum menſurat & demonſtrat. (*Pragæ* An. 1716, in 8. Alph. 1, Tabb. 20).

CAPUT

CAPUT XIII.

De Architectura Militari.

§. 1. QUi de Architectura militari commentati sunt, vel formas muniendi proprias, vel alienas exponunt.

§. 2. Primum forma muniendi Belgica admodum celebris extitit, de qua scripsit ADAMUS FREYTAG, Polonus, cujus *Architectura militaris* Germanice prodiit *Amstelodami* An. 1665, in fol. (2 Alph. 9 plag. Tabb. $1\frac{1}{2}$ Alph.). Eandem in numeris tantum immutavit GERHARDUS MELDER, cujus *Praxis fortificatoria*, *Francofurti* An. 1666, in fol. lucem adspexit (plag. 36, Tabb. 8).

§. 3. Minori autem in pretio statim haberi cœpit, cum An. 1645, Comes DE PAGAN suam muniendi formam publicaret *Parisiis* in fol. (1 Alph. 6 plag. Tabb.II) sub titulo: *Les Fortifications du Comte* DE PAGAN, postea in sermonem Germanicum translatam. Cum eo in multis convenit HENRICUS RUSIUS *Baro de* RUSENSTEIN, cujus muniendi forma cum *Melderiana* prodiit (§. 2).

§. 4. Eidem quoque agnata est, magis tamen quam *Rusiana* ab eadem dissidet, quam BLONDELLUS sub titulo: *Nouvelle maniére de fortifier les places*, *Parisiis* An. 1686, in 12. reg. (5 plag. Tabb. 12) in lucem emisit, recusam *Hagæ Comitum* (An. 1686, in 8) bonam quidem, sed sumtuosam nimis.

§. 5. Comes DE VAUBAN duas muniendi formas invenit & secundum eas celebria munimenta exstruxit; sed neutram ipsemet descripsit. Priorem optime delineavit Abbas DU FAY, qui eam sub titulo: *La véritable maniére de bien fortifier de M.* VAUBAN in lucem publicam emisit. (*Amstelod.* An. 1692, in 12. plag. 9). Posteriorem primus descripsit Autor Anonymus in libro Gallico, cujus titulus: *L'Ingénieur François* (*Paris.* An. 1691, in 8. reg. $13\frac{1}{2}$ plag. Tabb. 33). Utramque STURMIUS, aliquoties jam laudatus, in libro Gallico sub titulo: *Le Véritable* VAUBAN explanavit (*Hagæ Comitum* 1709, in reg. 8. plag. 14, Tabb. 31). Recenset idem regulas Architecturæ militaris fundamentales & principia Arithmeticæ ac Geometriæ practicæ more communi præmittit, ut adeo tyronum instituto inserviat hic liber.

§. 6. COEHORNIUS suam muniendi methodum primum sermone Batavo edidit *Leeuwardiæ* An. 1685, in fol. (45 plag. Tabb. 14). Postea in sermonem Gallicum translatus prodiit *Hagæ Comitum* An. 1706, in reg. 8. (19 plag.

(19 plag. Tabb. 14) sub titulo: *Nouvelle Fortification, tant pour un terrain bas & humide, que sec & élevé.*

§. 7. Singulares muniendi formas, a reliquis prorsus diffidentes, apud Italos dedere ALEXANDER DE GROTTE & DONATUS ROSETTI. Prior prodiit Italice *Venetiis* An. 1617, (3 Alph. in fol.) anno sequente Monachii Germanice recusa: posterior itidem Italice *Augustæ Taurinorum* An. 1678, in fol. (Alph. 2, plag. 5).

§. 8. Similiter apud nostros inusitatam reliquis formam dedit BERNHARDUS SCHEITER in libro Germanico, cui titulus: *Neu vermehrte und verstärckte Vestungs-Bau-und Kriegs-Schule* (*Brunswigæ* An. 1672, in fol. 11 Alph. 7 plag. Tabb. 24). Eam cum anno sequente oppugnaret CHRISTIANUS NEUBAUER eidemque aliam suam opponeret in libro Germanico, cui titulus: *Wohlmeinende Gedancken, oder Discurs über ausgegange Fortification des* Tit. *Herrn JOH. BERNHARD SCHEITERS* (*Coloniæ ad Spream* in 8.); SCHEITERUS An. 1677, *Argentorati* in fol. (1 Alph. 2 plag. Tabb. 8) *Examen fortificatorium* in lucem publicam emisit, in quo *Neubauerianam* oppugnat, suam defendit, aliamque novam superaddit. NEUBAUERUS autem An. 1679, suam in *vera praxi Architecturæ militaris* (*Stargardiæ* An. 1679, in fol. plag. 19, Tabb. 8) uberius exposuit.

§. 9. ERNESTUS FRIDERICUS DE BORGSDORF novas muniendi methodos publicavit cum in Munimento inexpugnabili, cui titulus: *Unüberwindliche Festung* (*Ulmæ* An. 1682, in 8. plag. 7, Tabb. 8), tum in scripto altero, cui titulus: *Die befestigte Stütze eines Fürstenthums, oder neu erfundene Defension wieder das sonst Welt bezwingende Canoniren, Bombardiren und Miniren.* (*Norimbergæ* An. 1687, in 8. cum aliquot figuris).

§. 10. GEORGIUS RIMPLERUS in libello Germanico, cui titulus: *Die bevestigte Festung* (*Francofurti* An. 1674, in 12. plag. 16) hactenus usitatas muniendi formas omnes rejicit, tanquam principiis spuriis nitentes, & axiomata prorsus nova substituit: quibus tamen convenientem muniendi formam ipse non delineat. Nemo autem magis in ea delineanda desudavit, quam Cl. STURMIUS in libello, cui titulus: *Entdeckung der unstreitig allerbesten Manier zu bevestigen* (*Francof. ad Oderam* An. 1704, in 8. plag. 12, Tabb. 9). Alias quoque eandem operam sumsit DANIEL SUTTINGER in scripto Germanico *Dresdæ* in fol. edito (plag. 14, & 9½ plag. fig.).

§. 11. Scripta RIMPLERI admodum rara annotationibus & schematismis, quæ desiderabantur, illustrata, additis nonnullis aliis, *Dresdæ* in 4. An. 1724, (Alph. 3, plag. 9, Tabb. 10) recudi curavit LUDOVICUS ANDREAS HERLIN, qui

STURMII de RIMPLERI inventis judicium parum probat.

§. 12. RIMPLERI principia probat J. H. LANDSBERGIUS, Germanus, Statuum Belgii fœderati Architectus militaris primarius, & iisdem consonam muniendi formam delineat: cum tamen non ex asse ipsi satisfaciat, novam quandam aliam substituit, in libro Gallico, cui titulus: *Nouvelle maniére de fortifier les places* (*Hagæ Comitum*, An. 1712, in 4. plag. 11, Tabb. 8).

§. 13. Idem laudatus LANDSBERGIUS, una cum aliis Architectis militaribus peritis, valde probat *Architecturam militarem*, quam DANIEL SPECKLE, Architectus Argentoratensis, jam An. 1589, in fol. (2 Alph. 10 plag. Tabb. 36) publici juris fecit. Hinc etiam factum est, ut præclarum in hoc genere opus *Dresdæ* An. 1705, in fol. fuerit recusum (2 Alph. 12 plag. Tabb. 24).

§. 14. Sunt vero adhuc plures inter nostros, qui singulares muniendi formas dedere, attentione Architectorum militarium non indignas. Huc refero JOHANNEM FRANCISCUM GRIENDEL AB AACH, qui septem muniendi formis, utut eidem fundamento superstructis, inclaruit (*Norimbergæ* An. 1683, in fol. plag. 14, Fig. plag. 15), CHRISTOPHORUM HEER, qui in *Theoria & praxi Artis muniendi* (*Francof.* An. 1689, in 4. plag. 16, Tabb. 30) elegantes dedit sibique proprias constructiones; in *Speculo* vero *Artis muniendi* (*Lipsiæ* An. 1694, in 4. plag. 17, Tabb. 31) præterea varia munimenta celebria Europæ describit, & CHRISTOPHORUM HEIDENMANN, cujus *Architectura militaris* una prodiit *Monachii* An. 1664, in fol. (1 Alph. 22 plag. 27, & fig. plag.) altera ibidem An. 1673, in fol. (plag. 10, & Fig. plag. 14).

§. 15. Nec forte e re esset WILHELMI DILICHII *Peribologiam* (*Francofurti* An. 1640, in fol. 2 Alph. 2 plag. Tabb. 409, seu 9 Alph. 11 plag.) in scenam adducere, quoniam Architecturæ militaris periti multa ad praxin proficua in ea reperient. Immo si verum fateri fas est, in hoc autore occurrunt, quæ dudum posthac in Gallia tanquam nova inventa prodita fuerunt. Unde melius de eo judicium ferendum, quam tulit DECHALES in Tractatu de illustribus Mathematicis Tomo I, Mundi Mathematici (§. 4, cap. 1). Idem quoque edidit *Scholam militarem* (*Francof. ad Mœn.* An. 1689, in fol. 10 Alph. 13 plag. cum ingenti numero figurarum partim æri, partim ligno incisarum), in qua omnia ad bellum tam veterum, quam nostris moribus necessaria describuntur & illustrantur.

§. 16. In eadem scena mimi vices adimplebit WENDELINUS SCHILDKNECHT, qui muniendi formam Batavam stylo histrionico describit (*Stetini* An. 1652, in fol. plag. 129, & fig. plag. $20\frac{1}{2}$).

§. 17.

§. 17. Eclecticam quandam muniendi formam ex ANTONII DE VILLE, *Comitum* DE PAGAN & VAUBAN methodis deductam proposuit Autor Anonymus in libro, cui titulus: *Nouvelle maniére de fortifier les places, tirée des méthodes du Chevalier* DE VILLE *&c.* (*Amstelodami* An. 1689, in reg. 12 plag. 10 Tabb. 15), qui regulas Architecturæ militaris bene explicat, simulque ideam exhibet, quomodo diversorum Architectorum muniendi formas una ad praxin transferre liceat. ANTONII DE VILLE *Ars muniendi* prodiit *Amstelodami* An. 1675, recusa juxta editionem *Parisinam* An. 1672, in 8. (1 Alph. 3 plag. cum figuris multis partim textui insertis, partim seorsim excusis). Multa hic distincte exponuntur, quæ alibi vel omittuntur, vel strictim proponuntur.

§. 18. MATTHIAS DOEGEN in *Architectura militari moderna*, quæ An. 1647, in fol. (Alph. 5, plag. 13, Tabb. 78), Latina lingua prodiit, formam equidem muniendi Batavam nonnisi describit, quæ illo tempore usitatissima erat; multa tamen lectu digna habet iis præsertim, qui in extructione munimentorum scitu necessaria nosse desiderant. Regulas, quas tradit, exemplis veris celebrium tunc temporis per Europam munimentorum illustrat, calculos, ubi iis opus est, perspicue explicat, de figurarum irregularium fortificatione experientia confirmata tradit, modumque munimenta oppugnandi & defendendi declarat. Singula variis historiis tam veteribus, quam novis confirmat. Partem Architecturæ militaris, quæ de locis muniendis agit, *Hercotectonicen*; alteram vero, quæ de munimentis oppugnandis & defendendis tractat, *Areotectonicen* vocat. Et hujus partem oppugnatoriam *Poliorceticen*; repugnatoriam vero *Antipoliorceticen* appellat.

§. 19. BONAJUTUS LORINUS, Nobilis Florentinus, cujus *De Architectura militari* Libri quinque a DAVIDE WORMBSER ex Italico in Germanicum versi *Francofurti ad Mœnum* An. 1607, in fol. prodierunt, multa habet, quæ etiam in Architectura civili usui sunt, & libro quinto Mechanicam practicam tradit, variaque instrumenta & machinas varias describit.

§. 20. DONATUM ROSETTI singularem quandam muniendi methodum invenisse, quæ a ceteris prorsus dissidet, eandemque sub titulo: *Fortificazione à rovescio* sermone patrio edidisse, supra jam meminimus (§. 7). Ejus ideo mentionem injicere lubet, quia peritis viam ad ulteriora sternit. Unde eidem multum tribuit ALEXANDER CHRISTIANUS LE MAITRE in *Troja vetere & nova* An. 1684, in 8. (Alph. 1, plag. 7, Tabb. 14), ob principia utilia lectu dignissimus.

§. 21. Nec minus singularis ea est, quam pro inexpugnabili vendi-

tat JACOBUS DE LA VERGNE, Architectus militaris Cæsareus primarius, cujus *Nouvelle Fortification imprenable par force d'Armes*, lucem adspexit *Viennæ Austriæ* An. 1700, in 4. (plag. 17, Tab. 1). Ostendit idem, quomodo munimenta ordinaria ad novam istam formam reduci queant. Edidit idem ibidem An. 1698, duos Tractatus alios in 4. quorum unus inscribitur. *De l'utilité d'avoir un bon Ingénieur ou Directeur général des Fortifications dans un Etat &c.* alter vero: *Nouveau exercice du Gabion & de la Fascine*. Constat ille plag. 11, hic itidem plag. 11, & Tabb. 3. Quemadmodum vero illi jungit Tractatum de officiis Architectorum militarium, qui subsunt Directori generali; ita in altero quoque agit de modo oppugnandi munimenti satis perspicue.

§. 22. Hactenus recensitas muniendi formas omnes, sola Landsbergiana excepta, una cum aliis a nobis brevitatis studio prætermissis atque propriis, breviter describit & ad examen revocat, vir in hoc studiorum genere probe versatus sæpiusque jam nobis laudatus STURMIUS in *Architectura militari hypothetica & eclectica* (*Norimbergæ* An. 1702, in 8. plag. 10, & fig. plag. 6), ex quo adeo libro brevi temporis spatio cognoscere licet, quæ alias ex vastis voluminibus cum multo sumtuum & temporis dispendio forent conquirenda. In prima editione desideratur orthographia munimentorum. Hic vero defectus suppletur in altera, quæ multo auctior *Norimbergæ* An. 1719, in 4. (Alph. 1, Tabb. 41) prodiit.

§. 23. Novam quoque muniendi methodum dedit ROZARD, Architectus militaris Electoris Bavariæ, quam in libro sub titulo: *Nouvelle Fortification Françoise*, *Norimbergæ* in 4. reg. An. 1731, Alph. 1, Tabb. 42) edito describit. In parte altera desiderio aliorum satisfacturus adjecit explicationem trium systematum Comitis DE VAUBAN, qualem ex ipsis munimentis ab eodem extructis hausit, una cum omni praxi offensiva & defensiva, ubi etiam præliorum rationem habet, addens ubivis observationes, quas experientia domestica suggerebat.

§. 24. Restat ut de iis Autoribus dicamus, qui in gratiam Architecturæ militaris studiosorum libros ediderunt. Commendandi hic nobis sunt *Don* SEBASTIAN FERNANDEZ DE MEDRANO in Architectura militari, quæ sub titulo *Ingénieur pratique*, *Bruxellis* An. 1696, in 8. (1 Alph. Tabb. 35) lucem adspexit; Cl. OZANAM, cujus Tractatus de Architectura militari (*Traité de Fortification*) *Parisiis* An. 1694, in 8. reg. (17 plag. Tabb. 44) prodiit; *Eques de S.* JULIANO supra laudatus, cujus *Architectura militaris* publicata est sermone Gallico, *Hagæ Comitum* An. 1705, in 8. (plag. 11, Tabb. 25). In eundem censum venit Ano-

Anonymi Architectus militaris Gallicus ſupra laudatus (§. 5).

§. 25. In vernacula noſtra notiſſimi ſunt libri ſequentes: 1 GEORGE CONRAD MARTII *Europäiſcher Ingenieur* (*Norimbergæ* An. 1696, in 8. 2 Alph. 16 plag. Tabb. 60), qui præter Architecturam militarem etiam Arithmeticam & Geometriam practicam prolixe tradit: 2. JOH. HEINRICI BEHRS *aufs neu verſchantzter Turenne oder gründlich-alt und neue Kriegs-Bau-Kunſt* (*Francofurti* An. 1690, in 8. 1 Alph. 16 plag. Tabb. 32): 3. JOHANN SEBASTIAN GRUBERS *Friedens- und Krieges-Schule* (*Norimbergæ* An. 1697, in 8. 2 Alph. 11½ plag.): 4. Ejuſdem *Examen Fortificatorium* (*Lipſiæ* An. 1703, in 8. 1 Alph. 22 plag. Tabb. 19): 5. ejuſdem *neuer und gründlicher Unterricht von der heutigen Fortification und Artillerie* (*Norimb.* 1700, in 8. 1 Alph. 17 plag. 16 Tabb.) aliique.

§. 26. Anno 1722, *Bruxellis* prodiere Principia Architecturæ militaris modernæ (*Les Principes de la Fortification moderne*) Directoris Academiæ militaris Cæſareæ, quæ Bruxellis eſt, HARTMANNI in reg. (plag. 19, Tabb. 9). Explicat principia *Comitis de* VAUBAN & COEHORNII, ac multus inprimis eſt in uberius explicanda munimentorum oppugnatione & defenſione, quam ab aliis factum: ut hinc addiſcere liceat, quomodo munimentorum forma ad examen revocanda, ubi quidem rectum de iis judicium ferre velis.

§. 27. Inprimis autem commendari meretur Anonymi * Inſtitutio Architecturæ militaris, quam ſub titulo: *Le parfait Ingénieur François, Amſtelodami* An. 1734, in 4. (Alph. 1, plag. 22, Tabb. 42) edidit. Omnem enim artem muniendi ſecundum triplicem non modo methodum Comitis DE VAUBAN, verum etiam ERRARDI, SARDII, Equitis DE VILLE, Equitis DE S. JULIANO, MAROLOISII, BOMBELLI, BLONDELLI, Comitis DE PAGAN, COEHORNII, SCHEITERI, STURMII aliorumque anonymorum explicat, artem muniendi irregularem réformat, & praxin offenſivam ac defenſivam conſummatam tradit. De STURMII cogitatis parum honorifice ſentit, quantuſcunque ſibi viſus fuerit Apollo.

§. 28. Antea celebrabatur liber Gallicus, quem ſecunda vice multo auctiorem ſub titulo: *Les Travaux de Mars ou l'Art de la Guerre*, ſeu Artis militaris, *Pariſiis* An. 1685, in 8. reg. ediderat ALLAIN MANESSON MALLET tribus tomis. Tomus I, conſtat Alph. 1, plag. 2, Tabb. 152; Tomus II, plag. 22. Tabb. 111; Tomus III, Alph. 1, plag. 3. Figuræ ipſi textui inſertæ ſunt & ornatus gratia multa adjiciuntur, quæ ad rem non faciunt, quemadmodum fecit in Geometria practica ſupra laudata (§. 30., cap. 3). Etſi

Q 3 autem

* Abbatis DEIDIER.

autem ab eo tempore Architectura militaris multum subierit mutationis; in primo tamen præsertim ac tertio tomo habentur, quæ non sine fructu leguntur. Editionis primæ versionem Germanicam dedit An. 1672, *Amstelodami* in 8. reg. excusam sub titulo: MANESSON MALLET *Kriegs-Arbeit*, qui puritatem linguæ Germanicæ ridicule affectabat PHILIPPUS A ZESEN, sed ob insuetum dicendi genus nullius momenti.

§. 29. Regulas fundamentales Architecturæ militaris qui cognoscere avent, iis abunde satisfaciet JOHAN. JACOBUS WERTMULLER in Theatro regularum fundamentalium Architecturæ militaris tam veterum, quam recentiorum, *Schauplatz der alten und neuen Fortifications-Maximen*, *Francof. ad Mœn.* An. 1691, in 8. 1 Alph. 20 plag. Tabb. 12) & in Lapide Lydio Architectorum militarium, *Probier-Stein der Ingenieur* An. 1685, in 8. 16 plag. Tabb. 4), tum etiam in *Apologia fortificatoria*, in qua Belgicam muniendi formam defendit, quamvis eam aliqua emendatione indigere fateatur (*Francof.* An. 1691, in fol. 1 Alph. 15 plag. & Fig. plag. 16).

§. 30. Quæ in excitatione munimentorum observari merentur, docent JOHANNES FAULHABER in *Schola Architectorum militarium* (*Norimbergæ* An. 1637; in 4.) & HEER in *Praxi Artis muniendi* (§. 14) præter alios, quos antea laudavimus. Inprimis hic commemorari meretur LAMBERTUS LAMBION in Praxi Architectonica (*der Bau-Practica*) (*Viennæ* An. 1696, in 8. plag. 16, & Fig. plag. 1½), ubi multa singularia occurrunt præsertim de cuniculis subterraneis, nisi quod linguæ Germanicæ non satis peritus male scripserit, ut adeo libellus Germanice scriptus in idioma Germanicum verti mereatur.

§. 31. De praxi militari tam offensiva, quam defensiva data opera scripsit GOULON in libello Gallico, cui titulus: *Mémoires pour l'attaque & pour la défense d'une Place* (*Hagæ Comitum* An. 1706, in 8. plag. 13, Tabb. 4) & qui eodem adhuc anno recusus *Weselii* in 8. reg. (plag. 5, Tabb. 4) postea in Germanicum idioma translatus (*Norimb.* An. 1709, in 8. plag. 5½, Tabb. 4).

§. 32. Etsi autem multa utilia dederit, quæ domestica experientia ipsum docuit, non tamen dedit, quæ sufficiunt. Anno autem superiori 1737, *Hagæ Comitum* in 4. reg. (Alph. 1, plag. 5½, Tabb. 33) prodiit *Comitis* DE VAUBAN de praxi offensiva & defensiva opus posthumum, sub titulo: *De l'attaque & de la défense des places*, quod observationibus ultra dimidium seculum a se continuatis superstruitur. Composuerat idem in usum Ducis Burgundiæ, cui MSC. dederat, non ea intentione, ut publici juris fieret; sed ut arcani instar asservaretur. Neque adeo facile

facile erat MSC. istud describi, propter Tabulas majores, in quibus Schemata nitidissime delineata erant. Cum in eo candide de singulis mentem suam aperuerit; nullum superesse potest dubium, quin insigni cum fructu legatur ab iis, qui castra sequuntur, vel de praxi offensiva & defensiva judicium sibi sumunt.

§. 33. JOHANNES TEYLER in *Architectura militari* (*Rot.* 1697, in 4. plag. 8, Tabb. 41) ad Architecturam militarem Algebram applicare cœpit, quoad calculum inprimis probabilium, spem feriendi planum sclopeto vel tormento ad mensuram revocaturus. Aliud vero Specimen Algebræ ad Artem Fortificatoriam applicatæ, diversum prorsus a *Teyleriano*, etiam dedit JOH. MATTHIAS HASIUS, nunc Mathematum Professor Wittebergensis, *Lipsiæ* An. 1707, in 4. (plag. $3\frac{1}{2}$, Tab. 1).

§. 34. Tandem hic commemorandum est opus, quod in usum Architectorum militarium conscripsit BELIDOR, Commissarius ordinarius Artilleriæ, Professor Mathematum Regius in Scholis eidem destinatis, editum *Parisiis*, mox vero *Hagæ Comitum* recusum An. 1734, in 4. reg. (Alph. 2, plag. 10, Tabb. maj. 53) sub titulo: *La Science des Ingénieurs dans la conduite des Travaux de Fortification & d'Architecture civile.* In eo Autor, qui omni studio id agit, ut ad solidam scientiam Architectos militares perducat, eoque fine in eorum gratiam Cursum mathematicum jam ante edidit, recusum *Parisiis* An. 1725, in 4. reg. cum 24 Tabulis figuras nitidissime æri incisas exhibentibus, in quo ea inprimis docentur, quæ iisdem scitu necessaria sunt ad finem istum consequendum, non modo ea tradit, quæ ex Architectura militari, verum etiam quæ ex civili iisdem perspecta esse debent. Traditur hic theoria multorum, quæ hactenus in utraque Architectura nudæ experientiæ fuere superstructa. Videre hoc est ex libro primo atque secundo, quorum isto quæ ad muros, hoc autem quæ ad fornices pertinent, ex principiis geometricis & mechanicis demonstrat, usus hinc inde demonstrationibus algebraicis. Usui esse potest hoc opus iis, qui ad formam scientiæ vere mathematicæ utramque Architecturam reducere voluerint ea demonstraturi, quæ hactenus experientiæ fide sumuntur nondum satis limata. Opus hoc etiam in censum scriptorum de Architectura civili referendum, inter quæ eminet, quatenus viam ad ulteriora sternit.

§. 35. Non silentio prætereundus est libellus Germanicus, quem JOHANNES CHRISTOPHORUS GLASERUS *Halæ Saxonum* An. 1728, in 4. (Alph. 1, plag. 2, Tabb. 6) sub titulo: *Vernünfftige Gedancken von der Kriegs-Bau-Kunst erste Probe* edidit, in quo ostendit in omnibus muniendi formis, quæ hactenus prostant, deficere defensionem fossæ sufficientem, novamque

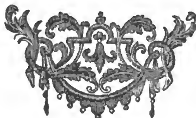
vamque proponit, qua huic defectui succurritur. Addit adhuc aliam per Algebram erutam. Plura dare constituerat specimina Architecturæ militaris perficiendæ: sed nescio qui factum, ut a proposito suo destiterit.

§. 36. Artem militarem universam describit GEORGIUS ANDREAS BOECKLER in Schola militari moderna: *Neu vermehrte Kriegs-Schule*, quæ *Francofurti ad Mœnum* An. 1635, in 8. (Alph. 2, plag. 8, cum figuris multis æri incisis) prodiit. Tradit autor ea omnia, quæ in bello usui esse possunt, ita ut etiam jus militare Cæsareum, Suecicum & Batavum libro suo inseruerit, & sub finem in Appendice varia arcana doceat, quæ militibus scitu necessaria.

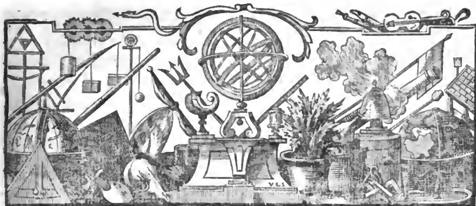
§. 37. Huc etiam pertinet JOANNIS FRIDERICI A FLEMMING, Regis Poloniarum & Electoris Saxoniæ Tribuni militum pedestrium, Miles Germanus perfectus, *der vollkommene Deutsche Soldat*, qui *Lipsiæ* An. 1726, in fol. (Alph. 9, plag. 8, Tabb. 64) prodiit, in quo autor omnem scientiam militarem, inprimis quæ ad militem pedestrem spectant, dilucide exponit. In eundem quoque censum referri potest liber Gallice conscriptus, quem sub titulo: *Les Fonctions du Capitaine de Cavalerie* & *les principales de ses Officiers subalternes*, multo auctiorem *Parisiis* edidit DE BIRAC, recusum *Hagæ* An. 1693, in 8. (Alph. 1, plag. 2, Tabb. 14). Optandum vero foret, ut quis rei militaris peritus, in Mathesi versatus & methodi gnarus Artem militarem in eam formam redigeret, qua nos Pyrotechniam, Architecturam militarem & civilem repræsentavimus, iis simul perlustratis, quæ Autores modo laudati tradiderunt, & ex Autoribus superioribus aliisque peti possunt.

FINIS

Commentationis de præcipuis scriptis mathematicis.



PRÆFATIO



COMMENTATIO
DE
STUDIO MATHESEOS
RECTE INSTITUENDO.

PRÆFATIO.



UI Mathesi addiscendæ operam navant, non eundem sibi scopum præfigunt. Elementa nostra Matheseos universæ ita conscripsimus, ut pro multiplici discentium scopo satisfaciant omnibus. Quoniam vero non omnes eadem industria eidem incumbere tenentur, nec omnia addiscenda omnibus; igitur nobis propositum est docere, quid unicuique conveniat.

Multum omnino intereſt, ut ſtudium Matheſeos rite tractetur, ſiquidem ſine moleſtia ac temporis diſpendio feliciter progredi volueris. Quamobrem noſtrum eſſe duximus, monſtrare viam, qua ſit eundum, ne ad devia declinemus: id quod facillime accidit. Eam igitur, quam in nos ſuſcepimus, de ſtudio mathematico rite inſtituendo tractationem utilitate ſua non deſtitutum iri confidimus. Quamobrem ſuademus, ut omni attentione eandem legat & relegat, qui Matheſeos addiſcendæ animo ad Elementa noſtra legenda accedit. Quodſi quis ſtudioſe obſervet, quæ præcipimus, eum participem futurum fructus, quem eidem pollicemur, nulli dubitamus. Inſignem vero percipiet voluptatem, ubi ſenſerit voto reſpondere eventum: quem ubi prævidet, eo ipſo accendetur ardor majore induſtria Matheſeos ſtudium continuandi, quam qua idem inchoavit. Noſtrum inprimis eſt amplificare Matheſeos ſtudium, nunquam ſatis commendandum, nunquam pro dignitate deprædicandum. Nihil igitur omittendum, quod huc quomodocunque facit. Alienam felicitatem qui noſtram exiſtimamus, id unice intendimus, ut dicamus, ut ſcribamus, quæ proſunt aliis. Quamobrem nec quicquam magis in votis habemus, quam ut omnes, qui ad Matheſin addiſcendam animum appellunt, participes fiant ejus fructus, qui ex ſtudio mathematico percipi poteſt.

COM-

COMMENTATIO
DE
STUDIO MATHESEOS
RECTE INSTITUENDO.

CAPUT PRIMUM.

De diversis cognitionis gradibus & quomodo iidem acquirantur.

§. 1. Tres dantur gradus cognitionis humanæ in omni veritatis genere, quos recto facultatum cognoscendi usu acquirere licet. Aut enim in eo acquiescimus, quod veritatem ab aliis propositam intelligamus; aut ulterius progressi id agimus, ut ejusdem etiam convincamur; aut denique operam damus, ut ex iis, quæ cognovimus, alia adhuc nobis incognita proprio marte eruere valeamus.

§. 2. Primus gradus acquisitu omnium facillimus & a ceteris præsupponitur: neque enim veritatis, nisi intellectæ, convincitur animus; sive eum a priori, sive a posteriori convincere volueris; multo minus autem ex iis, quæ cognovisti, alia incognita deducere potueris, nisi ea, quæ cognovisti, satis intellexeris. Gradus secundus difficilius comparatur primo, cum multo ampliorem requirat facultatum usum; nec ad tertium adspirandum, nisi ubi ad secundum ascenderis. Tertium denique omnium difficillime consequi licet, cum amplissimum omnium exigat facultatum usum. Qui in Logica & Psychologia satis fuerint versati veritatem dictorum abunde perspicient: ceteris satisfaciet experientia domestica, ubi diversis hisce gradibus acquirendis non sine successu operam dederint. Elucescet quoque quodammodo veritas ex iis, quæ mox de illis uberius dicentur.

§. 3. Cognitionem gradus primi

acquisiturus, definitiones, theoremata & problematum resolutiones sibi perspecta reddere tenetur, omissis demonstrationibus. Cognitionis secundi gradus compos futurus addere debet demonstrationes. Ad cognitionem tandem tertii gradus perventurus, in rem præsentem veniat necesse est, & ex iis, quæ ipsi cognita & perspecta sunt, acquisito cum secundo gradu facultatum usu, eruere studeat opus est sibi nondum nota: quod quomodo fiat, posthac indigitabimus, quantum præsentis instituti ratio permittit. Neque enim nobis jam propositum est explicare Artem inveniendi, quæ legitimum facultatum usum in eliciendis incognitis ex cognitis distincte docet.

§. 4. Theoremata & problemata eorumque resolutiones non intelliguntur nisi per definitiones terminorum, qui in iisdem occurrunt. Incipiendum igitur est a definitionibus, quæ ideo propositionibus præmittuntur; vel omnes simul, quemadmodum in Arithmetica & Geometria fecimus; vel eo saltem loco, ubi occurrunt propositiones, quæ per eas intelligendæ, quemadmodum in reliquis Matheseos partibus non sine ratione factum esse apparet.

§. 5. Ad definitiones intelligendas afferenda est attentio, sub initium præsertim molesta, adeoque omni modo excitanda & fovenda. Conducit huc, si definitiones exemplis, veluti in Arithmetica numeris, illustrentur, &, in Geometria, ad figuram oculis præsentem applicentur. Ita enim facilius intelliguntur; ut molestia vanescat, quæ attentionis conservandæ difficultatem parit. Ita definitio similitudinis illustratur exemplis duorum horologiorum, & duorum ædificiorum, quæ in scholio definitioni adjecto in medium attulimus (§. 27. *Arith.*). Definitionem partis aliquotæ illustramus exemplo lineæ in quatuor partes æquales divisæ, cum enim pars una quater sumta lineam integram adæquet, erit ea pars aliquota (§. 30. *Arithm.*). Ita, in ipsa Arithmetica, definitionem numeri quadrati & radicis quadratæ numeris adjectis illustravimus, ut tali exemplo non sit opus. Cum definitiones in Geometria retulerimus ad figuras; me tacente apparet, quomodo ad eas applicari possint, veluti dicendo in definitione trianguli æquilateri (§. 88. *Geom.*), quod sit AB=BC=CA (*Tab. I. Fig.* 16); perinde ac si ratiocinio ostendi deberet, figuram, quæ oculis subjicitur, esse triangulum æquicrurum. Sensus nimirum, aut imaginatio, quæ sensu antea percepta denuo præsentia sistit, attentionem in objectum trahit, cujus idea exhibet, quæ in definitione continentur; quo ipso & attentio excitatur & conservatur: cumque definitionem a nobis intelligi nobis jam conscii simus, molestia evanescit, quam termini non satis intellecti primum nobis objiciebant, immo in voluptatem abit, quæ

ardorem dicendi accendit & inflammat, prout casus tulerit.

§. *6.* Definitiones eo ordine collocantur, ut termini in anterioribus jam fuerint definiti, qui datam ingrediuntur. Ex. gr. Commensurabilia definiuntur, quod partem aliquotam communem habent, vel eorum unum sit pars aliquota alterius (§. 31. *Arithm.*). Pars vero aliquota jam fuit definita (§. 30. *Arithm.*), immo pars in genere (§. *9. Arithm.*). Similiter Quadratum definitur per figuram quadrilateram, æquilateram, rectangulam (§. *98 Geom.*). Sed figura jam ante (§. 34. *Geom.*), figura quadrilatera (§. 97. *Geom.*), figura æquilatera (§. 88. *Geom.*), figura rectangula (§. 97. *Geom.*) fuit definita. Unde consequitur, definitiones legendas esse eo ordine, quo in singulis disciplinis numerantur, & definitiones terminorum esse repetendas, qui datam ingrediuntur. Ita nimirum obtinetur, ut quælibet earum penitus intelligatur, & animo ingenerentur notiones adæquatæ, in quibus nihil latet obscuri, ut intellectus plena luce perfruatur. Ex. gr. ubi definitionem commensurabilium expendere volueris, illustranda primum est exemplis (§. 5), utrumque ejus casum repræsentando in numeris atque lineis. Ad exempla tam arithmetica, quam geometrica applicanda est definitio; ita ut primum contentus sis notionibus confusis, quas conspectus numerorum & figurarum suggerit. Deinde applicandæ ad eadem exempla sunt definitiones partis & partis aliquotæ; ita enim futurum, ut definitionem commensurabilium in utroque quantitatum genere penitus intelligas, nec quicquam relinquatur obscuri, ubi eadem industria in definitionibus anterioribus fueris versatus. Sint ex. gr. duo numeri 3 & 12. Quoniam 3, sive ternarius, quater sumtus, numerum 12, sive duodenarium adæquat, erit ille hujus pars aliquota (§. 30. *Arithm.*); adeoque numerus unus est pars aliquota alterius. Numeri igitur hi 3 & 12 commensurabiles sunt. Et quoniam 3, 3, 3 & 3 simul conficiunt unum numerum, nempe 12 sive duodenarium, adeoque idem sunt cum duodenario; 12 est totum, 3, 3, 3 & 3 sunt ejus partes, consequenter 3 pars una (§. *9. Arithm.*). Similiter sint duo numeri alii *6* & 8, quorum primus componitur ex 2, 2, & 2, seu binario ter sumto, alter ex 2, 2, 2 & 2, seu binario quater sumto. Habent igitur partem aliquotam communem 2 (§. 30. *Arithm.*), adeoque commensurabiles sunt. Et quia 2, 2 & 2 simul sumti idem sunt cum *6*, & 2, 2, 2 & 2 simul sumti idem cum 8; in genere etiam patet, esse 2 sive binarium partem ipsorum *6* & 8 (§. *9. Arithm.*), adeoque communem. Idem etiam in lineis repræsentatur, si linea AB ter transferatur in CD, ita ut sit CE=EF=FD=AB. Erit enim AB pars aliquota ipsius CD Tab. I. Fig. 1.

 (§. 30.

(§. 30 *Arithm.*). Unde lineæ AB & CD commensurabiles sunt, & CE =AB intelligitur pars ipsius CD (§. 9. *Arithm.*). Eodem modo patet casus alter, si recta AB concipitur divisa in tres partes æquales, ut sit AC =CD=DB, & EF in quatuor partes æquales EG, GH, HI & IF, ut sit EG=GH=HI=IF ac præterea EG =AC. Erit enim AC pars aliquota communis (§. 30 *Arithm.*), & eadem AC pars utriusque lineæ AB & EF intelligitur, quia AC+CD+DB & recta AB, itemque EG+GH+HI +IF & recta EF sunt una eademque linea (§. 9. *Arithm.*). Unde lineas AB & EF commensurabiles esse liquet.

Tab. I. Fig. 2.

§. 7. Ne evidentiæ quid desit, probe observandum est, intellectum lucem fœnerari debere a sensu, quatenus huic obvia sunt, quæ ille concipere debet; ut, dum sensus suo munere fungitur, intellectus sua veluti sponte fungatur itidem suo, atque ad cooperandum leniter trahatur; quatenus fieri nequit, ut operationes intellectus cessent, dum sensus facit quod suum est, &, attentione in hunc conversa, illarum ne quidem conscius esse videaris, operationibus intellectus cum sensuum actionibus perceptione confusa in unum confusis. Eo ipso obtinetur, ut ad rectum intellectus seu facultatis cognoscendi superioris usum adducaris; dum sensu tantummodo, concurrentibus ceteris sua veluti sponte facultatibus cognoscendi inferioribus, imaginatione scilicet atque memoria, tibi uti videris: id quod mirifice conducit tyronibus, ut usui intellectus recto absque ulla molestia adsuefiant. Tyrones enim non adsueti sunt nisi sensuum, imaginationis atque memoriæ usui, quatenus is hasce indivulsas comites habet. Eum vero, qui requiritur, intellectus usum hactenus non fecerunt. Quamobrem molestum accidit, si a sensu ad operationes intellectus per saltum adducantur.

§. 8. Quamvis adeo levia ac puerilia videantur, quæ de definitionibus rite expendendis inculcavimus (§. 6), ut eædem penitus intelligantur & notiones adæquatæ ab omni obscuritate liberatæ animo insinuentur; principiorum tamen psychologicorum gnarus, quæ in Psychologia præsertim empirica explicavimus, ex indubia experientia derivata, profunditatem in obviis, non sine voluptate, deprehendet. Et ubi attenta mente perlegerit, quæ de usu facultatum, in parte altera Philosophiæ practicæ universalis, ad recte vivendum requisito demonstravimus, fructum inde sperandum facile prævidebit: qui quod quantivis pretii sit, in dubium minime revocabit. Qui vero Logicam nostram perlustravit & inprimis sibi cognitum atque perspectum reddidit, quod de praxi ejus docetur; is abunde intelliget quam necessarius sit hic intellectus usus, de quo in præsenti nobis sermo est. Quodsi ergo in Philosophia veriori hospites contem-

contemnant, quæ nos maximi facimus, & ambages inutiles pronuncient, per quas incedere volumus animum ad Mathemata discenda appellentes; ii haud ægre ferant contradictionem, cum nos æquo animo, non indignabundo, feramus contemtum.

§. 9. Quamobrem non piget exemplo etiam geometrico docere, quomodo in perpendendis definitionibus sit procedendum. Sumamus v. gr. definitionem rhombi, quem definimus (§. 99 *Geom.*), quod sit figura quadrilatera, æquilatera, obliquangula.
Tab. I. fig. 3. Ut cum idea rhombi notio distincta animo insinuetur, nec quicquam in ea relinquatur obscuri; oculos convertamus necesse est in figuram L M N O. Numerentur latera LM, MN, NO & LO, quæ numero quatuor deprehenduntur; unde liquet figuram hanc esse quadrilateram (§. 97 *Geom.*). Circino capiatur intervallum LM, idemque successive transferatur ex M in N, ex N in O atque ex O in L; quo ipso patet, latera omnia esse inter se æqualia; atque hinc colligitur, figuram hanc esse æquilateram (§. 88 *Geom.*). Contemplemur jam angulos L, M, N & O, quos obliquos esse patet (§. 66 *Geom.*); unde infertur, figuram eandem esse obliquangulam (§. 97 *Geom.*). Sola attentio ad ea, quæ oculis usurpamus, omnem ex idea rhombi arcet obscuritatem, nec quicquam in notione distincta relinquit obscuri, quo minus penitus intelligatur. Quodsi definitiones anteriores, in quas definitio rhombi resolvitur, rite applices; iis suppositis familiaribus, notio evadit adæquata.

§. 10. Non ignoro in figuris non requiri veritatem, sed sufficere ea sumi, quæ per definitionem inesse debent, ut definitio intelligatur: neque enim demonstrandum esse, quod, in nostro exemplo, figura LMNO sit rhombus; sed docendum potius, qualis esse debeat, ut rhombus dici possit, ubi non intenditur, nisi ut definitio intelligatur. Ita, in casu nostro, sufficit dicere, si figura esse debeat rhombus, requiri ut latera LM, MN, NO & LO, quibus terminatur, sint numero quatuor; ut sit LM=MN=NO=LO, seu ut latera hæc singula sint inter se æqualia; ut denique anguli L, M, N & O sint obliqui. Hoc pacto enim constat, quænam figuræ cuidam datæ inesse debeant, ut rhombi nomen eidem tribui possit: id quod sufficit ad definitionem intelligendam. Et ubi hæc noveris atque memoriæ mandaveris, verendum non est, ne rhombum appelles figuram tibi obviam, quæ hoc nomen non meretur: quo sane fine definitio præmittitur. Immo patet, quænam de rhombo sumenda sint, aut sumere liceat, ubi alia de eodem demonstranda, quando ex definitione rhombi deducere volueris, quæ eidem conveniunt: quem alterum esse definitionum finem, non minus ex Logica, quam Geometrarum

rum & recta methodo philosophantium praxi constat. Ipsa etiam definitionum nominalium natura aliud non requirere videtur, quam ut intelligatur, quænam in ea sumantur de definito; cum nondum quæratur, utrum definitio sit possibilis, nec ne, seu utrum detur istiusmodi ens, cui ea insint, quæ in definitione sumuntur; sed de eo tantum quæstio sit, qualia requiramus, ut insint, siquidem id nominis convenire debeat, seu quidnam hoc nomine insignire velimus. Enimvero cum in Mathesi non proponantur definitiones, nisi quæ veræ sunt; ubi, sensuum ope, operationes intellectus elicere &, eorundem beneficio, eidem lucem affundere, atque ad rectam definitionum applicationem tyronem manuducere volueris, nil obstat, quo minus tacite supponas, quod deinceps demonstrandum, definitionibus inesse veritatem, hoc est, dari istiusmodi entia, quibus insunt, quæ in definitione nominali sumuntur. Absit itaque, ut tibi persuadeas, nos eorum, quæ in Logica docemus & in philosophando, non tantummodo in universa Mathesi, sancte observamus, oblitos tradere, quæ iisdem contraria sunt. Ecquis vero adeo vesanus erit, qui reprehendat, quod utilitatis insignis gratia, absque ullo præjudicio veritatis, tacite sumatur quod verum est, immo quod sumi necesse est, ubi in primo gradu cognitionis humanæ pedem sistere, nec ulterius progredi volueris (§. 1).

§. 11. Etsi itaque præcepta verioris Logicæ, quæ nos tradidisse certi sumus, inviolabilia existimemus, & methodi adeo simus tenaces, ut ab iis recedere nefas reputemus; tanta tamen religio minime obstat, quo minus in favorem ejus faciamus, quod eidem promovendæ conducit. Quamobrem, ut finem tam præclarum ex asse consequamur, quem intendimus (§. 7), & sensus omnes ferant suppetias intellectui, quæ ab eodem expectari possunt; id adhuc monendum esse duximus, in exemplis Arithmeticis non arbitrarium esse, quocunque modo numeri scribantur, quibus definitionem illustrare volueris, sed eos potius ita scribendos esse, ut sensui subjiciantur, quæ intellectus concipere tenetur, ut omnis arceatur obscuritas, & notio evadat tam adæquata, quantum per anteriores definitiones permittitur. Dedimus in superioribus exempla, quibus definitionem commensurabilium illustravimus (§. 6). Duo sunt commensurabilium casus. Aut enim numerus minor est pars aliquota majoris, aut uterque numerus partem aliquotam communem habet (§. 31 *Arithm.*). Exemplum casus primi præbent numeri 3 & 12, quorum prior quater sumtus posteriori fit æqualis. Repræsentandus igitur est ternarius tanquam pars duodenarii, definitioni partis convenienter (§. 9 *Arithm.*); & tanquam pars aliquota ejusdem, defi-

definitioni partis aliquotæ conformiter (§. 30 *Arithm.*). Quamobrem non sufficit, duodenarium, sive 12, resolvere in 3, 3, & 3, sed ipsis etiam oculis quasi spectandum exhiberi debet, quod ternarius sit pars duodenarii, & hic consideretur tanquam pars aliquota ejusdem, quatenus ea oculis usurpare licet, quæ definitiones partis, atque partis aliquotæ, tamquam notas continent. Exhibetur autem 3 tanquam pars ternarii, si scribatur $3+3+3+3=12$: etenim signum + ostendit quatuor istos ternarios simul sumtos constituere duodenarium, seu numerum, qui idem est cum duodenario. Unde unus intelligitur pars duodenarii (§. 9 *Arithm.*). Et dum apparet, eundem numerum 3 aliquoties, nimirum quater repetitum, numerum 12 adæquare; illum hujus partem aliquotam esse perspicitur (§. 30 *Arith.*). Nimirum, hoc modo, ipsis oculis exhibetur, quod plura, scilicet 3, 3, 3 & 3 sint idem cum uno, scilicet 12, & pars una 3 aliquoties, scilicet hic quater sumta, adæquet totum; quemadmodum volunt definitiones partis, atque totius, & partis aliquotæ. Sola igitur hac scriptione in conspectum adducuntur, quæ in oculos per se minime incurrunt, & definitiones partis, atque totius, & partis aliquotæ, instar rei visibilis exhibentur. Dum vero ternarius, sive 3, etiam solitarie scribitur, juxta duodenarium in partes suas aliquotas resolutum, quemadmodum hic factum esse apparet,

$$3 \qquad 3+3+3+3=12,$$

tum ipsis oculis exhibentur 3 & 12 tanquam duo numeri, qui ad se invicem referuntur, & primus 3 repræsentatur tanquam pars aliquota alterius 12; ut nihil insit in definitione commensurabilium, quoad casum primum, quod non pateat conspectui. Immo, hac ipsa scriptione, non minus manifestum est, quomodo, dato quocunque numero, prodeat alius ipsi commensurabilis; nimirum, si numerus quidam, semel positus, deinceps ponatur aliquoties, quoties nempe visum fuerit, & iterato positi sumantur simul tanquam unum: id quod clarius perspicitur, si duo vel tria exempla sibi invicem subscribantur, quemadmodum hic factum vides.

$$3 \qquad 3+3=6$$
$$3 \qquad 3+3+3=9$$
$$3 \qquad 3+3+3+3=12$$

&c. &c. in infinitum.

Ad illustrandum casum alterum, qui in definitione commensurabilium continetur, adduximus exemplum numerorum 6 & 8, qui partem aliquotam communem 2 habent. Quodsi ergo singula ut ante repræsentare volueris, numeri ita scribendi sunt

$$2+2+2=6 \qquad 2+2+2+2=8$$
$$2+2+2+2+2=10 \qquad 2+2+2+2+2+2+2=14$$

&c. &c.

in infinitum in infinitum.

Ita nimirum etiam conspicitur, quomodo

do numeri commenſurabiles in altero caſu procreentur, nimirum, ſi idem quicunque numerus, veluti hic 2, ponitur toties, quoties libuerit, veluti hic ter, quinquies &c. & deinceps adhuc pluries, veluti hic quater, ſepties &c. ac iterato poſiti ſumantur ſimul tanquam unum. Hoc pacto, definitio commenſurabilium nominalis reducitur ad geneticam, adeoque realem: id quod multiplicem habet uſum. Quodſi numeris ſubjiciantur lineæ in tot partes æquales diviſæ, quoties idem numerus repetitur ad conſtituendum numerum eundem; in continuo jam magis claret, quænam ſit vis ſigni +, quo indigitatur plura coaleſcere in unum, ut unum ſit idem cum multis, quemadmodum vult definitio partium, atque totius. (§. 9 *Arith.*)

§. 12. Quoniam in definitionibus partis, atque totius, relativis, quarum una abſque altera intelligi nequit, diverſa utique ſunt pluralitas eorum quæ ad totum conſtituendum concurrunt, plurium concretio qua fit unum ſeu totum conſtituitur, & inde reſultans identitas plurium cum uno; adeoque ubi definitionem penitus intelligere volueris, notionem diſtinctam formaturus, opus habes totidem actibus intellectus, quibus pars & totum concipitur, quot definitioni diverſa inſunt, tanquam totidem notæ. Siquidem ſenſus ſuppetias ferre debet intellectui; ſingulis intellectus operationibus reſpondere debent ſinguli actus externi, qui in ſenſus incurrunt & illas individuas comites habent: id quod in dato caſu obtinetur, ſi numeri, quibus ſimul ſumtis efficitur totum, primum ſcribantur juxta ſe invicem abſque ullo ſigno interpoſito, deinde autem ſignum + interponatur, tandemque iiſdem, hoc ſigno inter ſe connexis, adjiciatur ſignum æqualitatis =, cum nota numerica, qua indigitatur numerus ex iiſdem coaleſcens, veluti in exemplo primo 12, qui ex 3, 3, 3 & 3 in unum coaleſcentibus reſultat. Hac enim ſucceſſiva ſcriptione, eo, quem diximus, ordine facta; actu ſcriptionis primo determinatur intellectus ad concipiendam pluralitatem ad totum conſtituendum concurrentium; actu ſecundo exhibetur concretio in unum, quam cogitare tenemur; & tertio denique repræſentatur plurium cum uno identitas, in quam aciem mentis intendi neceſſe eſt. Hoc pacto efficitur, ut nihil ſit in intellectu, quod non etiam ſit in ſenſu, & ſenſus intellectum blande trahit ad cooperandum, dum operationes intellectus per actus in ſenſum incurrentes determinantur, adeoque, cum actibus ſenſus, una ponuntur; modo animo præſens ſis, attentione allata ad ſingula quæ fiunt. Quodſi ergo in illuſtrandis definitionibus eam, quam monſtramus, viam ingredi volueris; ſenſus ſuppetias omnes ferent intellectui, quas ab eo expectare licet.

§. 13. Si-

§. 13. Simile quid obtinet in exemplis geometricis; si singulas determinationes, quæ definitionem ingrediuntur, ita scribere volueris, ut ad figuram oculis subjectam referantur signa, quibus repræsentatur. Dedimus in superioribus exemplum rhombi, qui per definitionem est figura quadrilatera, æquilatera, obliquangula. Quamobrem si scribas, quemadmodum hic factum esse vides,

Tab. I. Fig. 3.

LM + MN + NO + LO = 4
LM = MN = NO = LO

L, M, N, O } angulus obliquus

LMNO rhombus;

ipsi sensui obvium est, quomodo ex determinationibus definitionem ingredientibus, seu notis in eadem contentis, colligatur figuram datam esse rhombum. Etenim LM+MN+NO+LO=4 indigitat, figuram datam LMNO quatuor habere latera; adeoque æquilateram esse: LM = MN = NO = LO significat, latera omnia esse inter se æqualia; consequenter figuram datam LMNO esse æquilateram: denique

L, M, N, O } angulus obliquus,

indigitat singulos figuræ datæ LMNO angulos esse obliquos; consequenter figuram ipsam obliquangulam. Linea his subducta signum est quo indigitatur, id quod eidem subscribitur, inde inferri, seu per supra scripta determinari; nimirum quod figura oculis subjecta LMNO sit rhombus. Evidens adeo est, ad quænam successive promovenda sit attentio, ubi rhombum agnoscere, atque ab aliis figuris distinguere volueris. Hoc pacto sensus distinguit, quæ intellectus distinguere tenetur, dum distincte rhombum concipit.

§. 14. Repræsentatio definitionum symbolica, qua oculis conspicienda exhibentur, quæ ab intellectu concipiuntur, eo quidem ordine, quo operationes intellectus eliciuntur, convenit regulis Artis characteristicæ; cujus theoria, hactenus desiderata, partem quandam Artis inveniendi absolvit, propterea quod in inveniendo usum multiplicem habet, quemadmodum suo tempore ostendemus, ubi, philosophia ad umbilicum perducta, Artem inveniendi ad eam formam redigemus, qua Logicam exhibuimus. Major enim est Artis characteristicæ usus, quam vulgo creditur; ut adeo consultum sit, quasi aliud agendo mature eidem adsuescere. Non loquimur nisi experta, & quæ ex ipsa animæ humanæ natura a priori demonstrare valemus; etsi a præsenti loco alienum sit ipsas demonstrationes afferri, ex principiis nostris psychologicis haud difficulter contexendas, sed Arti inveniendi reservandas.

 §. 15. Uni-

§. 15. Unicum est, quod hic monuisse sufficiat, silentio minime prætereundum; scilicet, quod ista definitionum symbolica repræsentatio mirifice conducat ad facilitandam repetitionem, qua eædem memoriæ, absque ulla molestia & mora, infiguntur, & memoria retinentur. Distincte nimirum oculis exhibentur, quæ intellectus distinguere tenetur in definito sibi repræsentando, & eo ordine, quo actus intellectus sese invicem excipere debent. Cognitio non modo symbolica ad intuitivam reducitur, sed ipsa etiam symbolica intuitivæ assimilatur. Nemo autem est qui nesciat, sensu percepta facilius & tenacius memoria retineri, quam quæ sola vi intellectus concipiuntur. Et convenit omnino omnem facere facultatum usum, qui natura nobis concessus est; ac mature adsuefieri juvat, ut eundem ubivis constanter faciamus. Quamobrem & nos per studium mathematicum plura intendimus, quam ut Mathesis sibi sola discatur; quemadmodum faciunt illi, qui contenti sunt ea, quæ docentur in Mathesi, cognita atque perspecta sibi habere.

§. 16. Erit forsan acutior, qui reprehendet, quod, in illustrandis definitionibus, in methodi leges injurii simus, quod in illustrandis definitionibus anterioribus præsupponamus, quæ demum per sequentes patent. Objiciet v. gr. nos, in symbolica partis aliquotæ repræsentatione (veluti quod $3+3+3+3=12$), supponere, quod perspectæ sint notæ numericæ, quod notum sit signum additionis, quod ipsam additionis notionem habeamus, cum tamen definitio partis aliquotæ præcedat (§. 30 *Arithm.*), definitio additionis demum sequatur (§. 61 *Arithm.*) & notæ numericæ in sequentibus demum (§ 49 *Arith.*), cum signo additionis (§. 63 *Arithm.*) explicentur. Immo forsan arguet ipsam additionem præsupponi, quæ demum docetur multo post (§. 96 *Arithm.*). Enimvero quicquid est hujus difficultatis, id protinus omne evanescit, modo attentionem nostram desiderari non patiamur. Etenim nemo ad studium Matheseos, præsertim ad legenda Arithmeticæ nostra Elementa Latina, accedit adeo rudis, ut notæ numericæ nondum ipsi sint perspectæ, & numerare nesciat. Neque lex numerandi & notæ numericæ explicantur eo fine, ut numerare discamus & notas numericas cognoscamus; sed ut appareat, cur ea numerandi lex sanciatur, & cur notis istis utamur, tum etiam quia hypothesibus istis opus habemus, tanquam principiis ad demonstrandum ea, quæ sequuntur. Signum additionis quodnam sit, anticipando doceri potest, ubi ejus usus requiritur. Neque hic opus est, ut notio additionis una explicetur: sufficit enim moneri, hoc signo indigitari, numeros simul sumi debere, ut constituatur per eos unus. Multo minus

nus autem præsupponenda est additio, cum nemo numerandi peritus nesciat, quomodo numeros exiguos, sive digitos in unitates, siquidem opus est, resolutos connumerare debeat. Accedit, quod nemo facile ad Matheseos studium, præsertim ad Elementa nostra Latina legenda sese conferat, qui Algorithmum numerorum integrorum, saltem additionem & subtractionem, non didicerit. Abunde igitur patet, non præsupponi quæ nondum cognita sunt, sed ex inferius traditis demum haurienda, in definitionibus illustrandis.

§. 17. Propositiones, sive theoremata fuerint, sive problemata, primum exponuntur, dum in Arithmetica ad numeros, in Geometria ad figuras delineatas applicantur: id quod ἔκθεσιν, sive expositionem, appellarunt veteres, quam propositionibus subjecerunt. Sit ex. gr. Theorema 21 Arithmeticæ (§. 181) exponendum, quod ita sese habet. *Si quantitates quascunque per eandem tertiam dividas; quoti sunt inter se ut quantitates, quæ dividuntur.* Theorematis hujus expositio hæc est: Sint duo numeri 24 & 12, qui dividuntur per eundem tertium 3; erunt quoti 8, & 4. Dico esse 8 ad 4, ut 24 ad 12. Continet enim 8 bis 4, & 24 itidem bis 12, adeoque numeri proportionales sunt (§. 155 *Arithm.*). Similiter sit pars prima theorematis 37, in Geometria (§. 233) exponenda, quæ ita se habet: *Si duas lineas parallelas secet transversa, erunt anguli alterni æquales.* Expositio talis est: Sint AB & CD duæ lineæ rectæ, sitque AB parallela ipsi CD; erunt anguli y & u alterni (§. 68 *Geom.*). Dico angulum y esse æqualem angulo u. Eodem modo exponuntur problemata. Sit ex gr. problema 20 Geometriæ (§. 258) cujus hic est tenor: *Per datum punctum parallelam rectæ datæ ducere.* Expositio hæc erit: Sit data linea recta RS; sitque datum punctum V ubicunque extra eandem lineam. Ducenda est recta quædam alia, quæ transit per punctum V, sitque rectæ alteri RS parallela.

Tab. I. Fig. 4.

Tab. I. Fig. 5.

§. 18. Nos, brevitatis gratia, in Arithmetica theoremata ita enunciavimus, ut expositionem una contineant; dum quantitates designavimus literis majoribus, tanquam numeros indeterminatos (§. 13 *Arith.*), in quorum locum facile surrogantur numeri determinati notis numericis expressi, quales etiam hinc inde exhibemus ad latus demonstrationis. Ita theorema 21, de quo modo diximus (§. 17), hoc modo proponitur (§. 181 *Arith.*). *Si quantitates quascunque* A *&* B *per eandem tertiam* C *dividas; quoti* F *&* G *sunt inter se ut* A *&* B. Constat ex paragrapho præcedente theorema hoc pure sic enunciari: *Si duas quantitates quascunque per eandem tertiam dividas, quoti per divisionem prodeuntes erunt inter se, ut quantitates, quæ dividuntur.* Atque adeo liquet, literas majores

S 3 A, B,

A, B, C, F, G nonnisi expositionis gratia esse adjectas, quæ ita sese habet: *Sint duæ quantitates quæcunque,* A *&* B; *dividatur quantitas* A *per quantitatem* C, *& prodeat quotus* F. *Dividatur etiam quantitas* B *per eandem quantitatem* C, *& prodeat quotus* G. *Dico esse quotum* F *ad quotum* G, *ut quantitatem* A *ad quantitatem* B. Quodsi jam pro literis substituantur numeri; nimirum 24 pro A, 12 pro B, 3 pro C, 8 pro F, & denique 4 pro G; habebis expositionem in numeris, quam ante dedimus (§. 17).

§. 19. Similiter in Geometria propositiones retulimus ad figuras æri incisas, ut expositionem una contineant. Ita theorematis 37 pars prima, quam exempli loco adduximus (§. 17), hoc modo proponitur in Tab. I. Fig. 1. Geometria (§. 233). *Si duas parallelas* AB *&* CD *secet transversa* EF, *in* G *&* H, *erunt anguli alterni* y *&* u *æquales.* Quodsi literas omittas, habebis theorema pure enunciatum. Ubi vero oculos in figuram iisdem subjectam convertens, idem ad eandem applices, adhibitis literis, quibus lineæ & anguli in schemate designantur, quemadmodum paulo ante factum est (§. 17); habebis expositionem. Similiter problema 20 (§. 258 *Geom.*) ita enunciatur: *Per datum punctum* V *parallelam rectæ* RS *ducere.* Omissis literis V & RS prodit propositio pure enunciata; quæ ad schema applicata, ut ante fecimus (§. 17), dat expositionem.

§. 20. Veteres Geometræ propositionem ab expositione, tanquam duo diversa, a se invicem distinxerunt; atque adeo illam pure enunciarunt, hanc eidem subjecerunt. Hunc morem secutus est CLAVIUS in Elementis EUCLIDIS. Nos expositionem cum propositione conjunximus, non tam quod in unum confundi velimus, quæ diversa sunt; quam ut, brevitatis gratia, quemadmodum jam monuimus (§. 18, 19), una exhiberemus, quæ a lectore separanda sunt; ne in nimiam molem excresceret opus, ac præter necessitatem evaderet sumtuosius.

§. 21. Necesse autem est propositionem pure enunciari, remotis iis, quæ ad expositionem spectant; cum pure enunciata in usum futurum memoriæ sit mandanda; expositio autem adhibenda, ut claritas affundatur notioni complexæ, quæ propositioni respondet, sine qua intelligi nequit, aut saltem non satis intelligitur; quemadmodum nil videmus absque lumine, aut absque lumine sufficiente non satis clare videmus visibile. Non tamen opus est expositionem una memoriæ mandari, cum in applicatione, ratiocinando facta, ejus nullam habeamus rationem; sed sufficiat propositioni per expositionem satis intellectæ adhærere, per naturam animæ, sensum claritatis, quatenus fieri potest, ut expositionem addamus, quando exigitur, vel e re esse videtur; qua actu affunditur claritas, cujus, dum nunc obscu-

obscure percipitur, antea clare perceptæ memoriam habemus.

§. 22. Resolutiones problematum arithmeticæ ad exempla, geometricæ ad figurarum constructiones statim sunt transferendæ. Singula, quæ fieri præcipuintur, suis numeris distinximus. Numerantur autem eo ordine singula, quo fieri debent. Quamobrem, cum qualibet resolutio tot contineat regulas, quot sunt numeri; lecta prima statim faciendum, quod eadem præcipitur, & progressus ordine fieri debet ad sequentes. Ita nimirum absque ullo negotio facies, quod fuerat faciendum; & dum hoc facis, regulis affundetur claritas, quæ ad totam resolutionem intelligendam sufficit. Quoniam vero in resolutionibus problematum sequentium præcipiuntur, quæ quomodo fieri debeant, docetur in anterioribus; igitur necesse est, ut eo ordine problematum resolutiones tibi familiares reddas, quo numerantur; ne facturus ea, quæ præcipiuntur, incidas in talia, quæ quomodo fieri debeant nondum nosti, nec unquam antea fecisti. Non est, quod excipias, citari in resolutionibus ea, quæ ex anterioribus præsupponuntur; veluti in resolutione problematis, de linea alteri parallela per datum punctum ducenda prima, quod paulo ante exempli loco adduximus (§. 19), problema 17 (§. 216 *Geom.*), de linea perpendiculari ex dato puncto in eam demittenda, & problema 16 (§. 212 *Geom.*), de linea perpendiculari ex dato in linea data puncto ad eandem erigenda: ita enim labor multiplicatus difficilis redditur, & molestiam parit; quæ, sublata difficultate, prorsus nulla est, ubi jam noveris, quomodo ex puncto dato ad lineam datam perpendicularis sit demittenda, & ex puncto in eadem dato perpendicularis excitanda, ac utrumque facere valeas.

§. 23. Quoniam vero non sufficit problematum resolutiones intelligere, verum etiam habitus comparandus est ea faciendi, quæ fieri debent; habitus autem omnis, nonnisi exercitio, adeoque idem iterato agendo, comparatur; a problemate uno non progrediendum ad alterum, nisi ubi ea, quæ in resolutione præcipiuntur, prompte facere potueris. Hoc enim pacto, nullam senties in difficilioribus difficultatem; nec verendum est, ne molestia fastidium creet; nec progressus destituetur voluptate individua comite, quæ ardorem continuo progrediendi ulterius accendit, alit, & auget. Merentur ea, quæ hic dicuntur, attentionem; hoc enim modo acquiruntur singulares animi dotes, ad præclara nitenti mirifice profuturæ. Sed de his dicemus nonnulla in sequentibus.

§. 24. Enimvero, si quis omnem usum Matheseos facere velit, quem potest, eumque magis præclarum, quam qui in cognitione veritatum mathematicarum consistit; in iis persistere non debet, quæ hactenus

nus docuimus. Superſunt alia adhuc obſervanda, de quibus ut dicamus, inſtituti noſtri ratio poſtulat. Nimirum primum, in ſymbolica repræſentatione theorematis, ſicuti in repræſentatione definitionum (§. 11), non perinde eſt, quocunque modo id fiat; ſed id omnino agendum eſt, ut ſenſui tanquam diverſa exhibeantur, quæ intellectus a ſe invicem diſtinguere tenetur, & ut ſingula ipſa ſcriptione a ſe invicem diſtinguantur, quæ in notione propoſitioni reſpondente diſtinguenda veniunt. Omne theorema in duas reſolvitur partes, hypotheſin atque theſin; quarum iſta exhibentur, quæ de ſubjecto ſumuntur, hac vero exhibetur prædicatum quod, vi illorum quæ ſumuntur, de eodem enunciandum, ſeu, propter ea quæ ſumuntur, ponendum. In ſymbolica igitur repræſentatione theorematis, hypotheſis ſcribenda eſt a ſiniſtra, theſis vero a dextra. Quodſi hypotheſis plura continet; ſingula quæ ſumuntur, ſigillatim ſcribi, & eo, quo ſequuntur, ordine ſibi invicem ſubſcribi debent; ita ut ipſa ſcriptione exprimantur eorum ad ſe invicem relationes, quæ ſupponuntur. Et idem obſervandum eſt in theſi, ſiquidem plura continet. Exemplis manifeſtum reddetur, quod obſcurius dictum videri poterat, deficiente idea, a qua claritatem ſuam haurit notio. Sit exempli loco theorema, ad quod ante provocavimus (§. 18). *Si duas quantitates quacunque per eandem tertiam dividas; quoti ſunt inter ſe ut quantitates diviſæ.* Hypotheſis theorematis eſt, quod duæ dentur quantitates; quod eædem dividantur per eandem tertiam; quo facto prodeunt duo quoti: theſis vero, quod hi ipſi quoti eam inter ſe habeant rationem, quam habent quantitates diviſæ. Quodſi (quemadmodum ſupra fecimus) quantitates dividendæ exponantur per A & B, dividens per C, quoti vero per F & G, theorema ita repræſentabitur.

Hypotheſis	*Theſis*
A & B quantitates dividendæ C dividens communis. F & G quoti ex diviſione prodeuntes	F : G = A : B.

Idem obſervandum eſt in numeris, per quos theorema exponitur.

24 & 12 Numeri dividendi 3 Diviſor commun. 8 & 4 Quoti ex diviſ. prodeuntes.	8 : 4 = 24 : 12

Immo, ſi ab expreſſione generali obſcuritatem arcere volueris, quæ per naturam ſuam eidem inhæret, non tollendam niſi claritate, quam affundunt ſingularia; numeros literis, quibus quantitates, numeri indeterminati (§. 13 *Arithm.*), deſignantur, ſubſcribi oportet, eo, quo hic factum eſſe vides, modo.

A &

A & B Quantitat.		F:G=A:B
24 12 dividendæ.		8:4=24:12
C Dividens		
3 communis.		
F & G Quoti ex		
8 4 divis. prod.		

Quodsi meris signis repræsentatio symbolica theorematis constare debeat; hoc modo quod intendis assequeris.

A (F	24 (8	F : G=A : B
C	3	
B (G	12 (4	8 : 4=24 : 12
C	3	

Idem fiet hoc modo:

$\frac{A}{c} = F$, $\frac{24}{3} = 8$ F : G=A : B

$\frac{B}{c} = G$, $\frac{12}{3} = 4$ 8 : 4=24 : 12

§. 25. Demus etiam exemplum unum alterumve geometricum. Theorema 37 (§. 233 *Geom.*) hoc est: *Si duas parallelas secet transversa, qui prodeunt* 1°. *anguli alterni æquales sunt*, 2°. *angulus externus æquatur interno opposito*, 3°. *duo interni oppositi sunt æquales duobus rectis.* Hypothesis hæc est, quod duæ lineæ sint parallelæ, & quod eædem secentur linea alia transversa: Thesis autem, quod anguli alterni sint æquales; quod angulus oppositus externus æquetur interno opposito; quod denique duo oppositi interni sint æquales duobus rectis. Illa adeo duas habet partes, quæ junctim sumtæ eandem constituunt; hæc autem tria membra, quæ singula ex eadem hypothesi sequuntur; ita ut propositio sit composita ex tribus, eandem hypothesin habentibus, & ad tres hasce categoricas revocetur: 1°. Anguli alterni intra lineas parallelas sunt æquales; 2°. Angulus externus, ex lineis parallelis per transversam sectis ortus, æqualis est opposito interno; 3°. Duo anguli intra lineas parallelas transversa sectas orti sunt æquales duobus rectis. Quodsi hoc theorema eo, quem supra diximus (§. 19), modo explices; symbolice distincte ita repræsentatur:

Tab. I. Fig. 4.

Hypothesis.	*Thesis.*
AB parall. CD	1. $y = u$
EF secat AB & CD	2. $x = u$
in G & H	3. $o + u = 2$ R.

Theorema 18 (§. 179) pure ita enunciatur: *Si in duobus triangulis fuerit angulus unus unius æqualis angulo uni alterius, & duo latera comprehendentia angulum in uno triangulo fuerint sigillatim æqualia duobus lateribus comprehendentibus angulum in altero triangulo; erit etiam latus tertium unius æquale lateri tertio alterius, & duo ad idem anguli reliqui in uno erunt sigillatim æquales duobus ad idem angulis reliquis in altero triangulo, & tota triangula æqualia & similia erunt.* Hypothesis hæc est, accedente expositione, quod in duobus triangulis A C B & *a c b*, angulus unus unius A sit æqualis angulo uni alterius *a*, quod duo latera A C & A B comprehendentia angulum A in uno triangulo, sint Tab. I. Fig. 6.

ſigillatim æqualia duobus lateribus *ac* & *ab* comprehendentibus angulum *a* in altero triangulo: theſis vero, quod 1°. latus tertium BC unius ſit æquale lateri tertio *b c* alterius, 2°. quod angulus C in uno ſit æqualis angulo *c* in altero, 3°. quod angulus B in uno ſit æqualis angulo *b* in altero, 4°. quod triangulum ACB ſit æquale & ſimile triangulo *a c b*. Propoſitio adeo denuo compoſita eſt, in qua eidem ſubjecto ſub eadem conditione tribuitur multiplex prædicatum. Quodſi theorema hoc ſymbolice repræſentare volueris, ita diſtincte exhibetur ſcriptum:

Hypotheſis	*Theſis.*
ang. $A = a$	1. $BC = bc$
$AB = ab$	2. ang. $A = c$
$AC = ac$	3. $B = b$
	4. $\triangle ACB \cong \triangle acb$

Hoc nimirum pacto diſtincte exhibentur ſingula, quæ in hypotheſi ſumuntur, ut ſenſus præſto ſit in formanda notione diſtincta intellectui, quæ eidem reſpondet, nec minus diſtincte in ſenſum incurrunt ſingula, quæ iſtis poſitis una ponuntur: id quod egregium habet uſum, ſive in primo gradu cognitionis ſubſiſtere, ſive ad ſecundum progredi volueris, quemadmodum ex deinceps dicendis plenius conſtabit. Quodſi Ars characteriſtica foret ſatis exculta; ab omnibus vocabulis in ſymbolica repræſentatione theorematum abſtinere poteramus. Quoniam tamen ſignorum numerus multiplicaretur, quorum uſus tyronibus moleſtior; conſultius eſt ut paucis ſimus contenti, & ſubinde vocabulis nonnullis abbreviata ſcriptione locum concedamus.

§. 26. In problematis quædam dantur; quædam fieri, vel inveniri jubentur. Ita in problemate 20 (§. 258 *Geom.*), ad quod ſupra provocavimus (§. 19), datur recta RS, & punctum extra eam V; jubemur autem per punctum V ducere lineam rectam, quæ ſit ipſi RS parallela. Quodſi ergo problema diſtincte concipere volueris; quæ dantur, ab eo quod quæritur, hoc eſt, quod vel fieri, vel inveniri jubetur, diſtinguenda, conſequenter ubi problema ſenſui diſtincte repræſentare volueris, verſus ſiniſtram ſcribenda ſunt data, eo modo quo ſingulæ determinationes in hypotheſi theorematis exprimuntur; verſus dextram vero quæſitum, quemadmodum hic factum eſſe apparet: Tab. I. Fig. 5.

Data	*Quæſitum*
Recta AB,	Recta tranſiens
punctum V extra	per V
eam	&
	paral. ipſi AB.

Ita nimirum non modo quæſitum a datis ſeparatur; verum etiam data ſingula diſtincte exhibentur, non minus quam ſingulæ determinationes quæſiti; conſequenter ſi hæc figuræ ſubſcribantur, idea ſingula a ſe invicem ſeparata exhibet, quæ in notione problemati reſpondente totidem operationibus

tionibus intellectus discernenda sunt, ut notio evadat distincta.

§. 27. Simile quid imitari licet in ipsa resolutione: id quod inprimis usui est, ubi ad gradum secundum cognitionis progredi, nec in primo acquiescere volueris. Exempli loco sit resolutio prima problematis 20 Geometriæ, cum quo nobis jam negotium est (§. 26). Ea nimirum ita repræsentatur:

VK perpendicularis ad RS.
T punctum pro arbitrio assumtum.
TA perpendicularis ad RS.
TA = VK
MN per V & A transiens.

MN parallela RS.

Notandum vero, in denominandis rectis, præponi literam quæ designat terminum a quo, unde ducenda est recta, quam ducere jubet resolutio; & singula fieri debere eo ordine, quo sibi invicem subscribuntur. Ita VK indigitat, perpendicularem VK ad RS duci ex puncto V, consequenter ad rectam RS ex puncto V demitti; TA vero indicat, perpendicularem TA ad RS ducendam esse ex puncto T tanquam termino a quo: TA=VK significat, perpendicularem TA æqualem fieri debere antea ductæ VK: Denique MN per VA indicat, rectam MN ducendam esse per puncta V & A, quibus datis determinatur situs rectæ MN per superius in Geometria ostensa. Linea recta separat ea, quæ fieri præcipiuntur, ab iis determinationibus, quas qua situm habere debet, & quæ infra lineam exhibentur; scilicet quod hic linea MN sit datæ RS parallela. Quod enim transeat per punctum V, per se manifestum est, aut si mavis per ea, quæ vi resolutionis facta sunt, attenta mente considerata. Ubi nimirum ad secundum cognitionis gradum progredi libuerit, ea, quæ ex resolutione problematis per se manifesta sunt quoad quæsitum, probe distinguenda ab iis, quæ esse dicuntur.

§. 28. Non nego, si quis idem facere velit in aliis problematis, quod hic præstitimus in uno eorum, eoque haud difficili, ut facilius intelligeretur; eidem plura notanda esse, quam quæ hic docemus: sed instituti nostri ratio non fert, ut simus prolixiores. Sufficit generalem quandam ideam eorum, quæ facienda sunt, insinuasse animo lectoris. Quodsi enim hæc probe perpenderit, quæ hic inculcantur; plura suo marte assequetur, quæ hinc inde præterea requiruntur. Et sic ubi subinde cespitat; in progressu, ipsemet errores a se admissos, & quæ melius fieri poterant, animadvertet. Quamobrem diutius hisce non immoramur.

§. 29. In resolutionibus numericis problematum, typus calculi ad figuram relatus exhibendus est, qui problema cum resolutione distincte repræsentat, & ideam operatricem animo insinuat, quæ firmior ei-

dem inhæret, quam resolutio memoriæ mandata, ita ut hæc non tam facile te fallat. Immo si hæc eidem nondum fuerit infixa; ubi ad librum recurrendum, quando resolutione ista in praxi opus habes, in typum solum exempli oculos convertere sufficit, quod vi ideæ operatricis, quam repræsentat, totam operationem docet ac dirigit. Quoniam in ipsis Elementis nostris exempla hoc modo exhibuimus, non opus est, nisi ut unum lucis affundendæ gratia huc transcribamus. Sistimus adeo illud, quod ad illustrandum problema 13 Trigonometriæ planæ (§. 36 *Trigon.*) in medium adduximus. Problema hoc est: ***Datis duobus angulis una cum latere uni eorum opposito invenire latus alteri oppositum.*** Typus vero exempli problema cum resolutione repræsentans talis est:

Tab. I. Fig. 6.

Data	*Quæsitum.*
C = 48° 35′	BC
A = 57° 28′	
AB = 74′	

Calculus.

Log. Sin. C	9. 8750142
Log. AB	1. 8692317
Log. Sin. A	9. 9258681
Log. AB + Log. sin. A	11. 7950998
Log. BC	1. 9200856

= Log. AB + Log. Sin. A − Log. Sin. C.

Quodsi enim oculos in exemplum hoc modo repræsentatum convertas; statim liquet dari duos angulos A & C, una cum latere AB uni eorum C opposito; & quæri latus BC, quod opponitur alteri A. Typus calculi ostendit, ex tabulis excerpendos esse logarithmos sinus anguli C, lateris AB & sinus anguli A. Logarithmos lateris AB & sinus anguli A addendos, & a summa subtrahendum esse logarithmum sinus anguli C, ut relinquatur logarithmus lateris quæsiti BC, in Canone Logarithmorum evolvendus, ut pateat numerus lateri quæsito respondens.

§. 30. Abunde hactenus docuimus, quomodo ad gradum primum cognitionis perveniatur, ut nihil supersit in notionibus obscuri, sed omnia penitus intelligantur. Agedum itaque! progrediamur ad secundum, cui acquirendo inserviunt demonstrationes. Quoniam ad demonstrationem accedere non licet, nisi propositione rite intellecta; gradus secundus primum supponit; consequenter, quæ in antecedentibus præcepimus, ea ante fieri debent, quam ad demonstrationem distincte percipiendam animum appellas. Quamobrem, qui utrumque gradum una eademque opera acquirere studet; & ea observare tenetur, quæ de primo inculcavimus, & facere ea, quæ de secundo jam addemus.

§. 31. De-

§. 31. Demonſtrationes ex ratiociniis contextæ ſunt eo modo inter ſe concatenatis, quem in Logica (§. 551 & ſeqq.) ſatis perſpicue explicavimus, & mox uberius dicenda reddent manifeſtum. Ratiocinatio, tertia mentis ſeu intellectus operatio, involvit duas priores, primam atque ſecundam, notionem ſcilicet atque judicium, una cum uſu facultatum inferiorum, ſenſus ſcilicet, imaginationis atque memoriæ, & iis animæ actibus, per quos fit tranſitus ab uſu facultatum inferiorum ad uſum ſuperiorum, attentione nimirum atque reflexione: quæ denuo parumper attentis ad ſequentia manifeſta evadent, modo facultatum animæ notiones ex Pſychologia habuerint perſpectas. Quodſi ergo a primo cognitionis gradu ad ſecundum per ſaltum aſcendere nolueris; demonſtrationibus ante utendum eſt mechanicis, quam ad eas progrediaris, quæ vi intellectus concipiuntur, ſeu ejus operationibus abſolvuntur.

§. 32. Quid ſit demonſtratio mechanica, in Lexico Mathematico docuimus. Nimirum, juxta hypotheſin theorematis conſtruuntur figuræ; quo facto, ea una determinantur, quæ in theſi continentur, ſeu vi illorum, quæ in hypotheſi ſumuntur de ſubjecto, eidem attribuuntur. Quamobrem, num ea, quæ una determinantur, talia ſint, ope inſtrumentorum examinanda. Sit exempli loco theorema 18 Geometriæ (§. 179 *Geom.*), ad quod ſupra provocavimus (§. 25), ſcilicet, *Si angulus unus trianguli unius ſit æqualis angulo uni trianguli alterius, & latera comprehendentia angulum iſtum in uno triangulo ſint ſigillatim æqualia lateribus comprehendentibus angulum in altero triangulo; quod etiam latus tertium unius trianguli ſit æquale lateri tertio alterius, quod duo anguli reliqui unius ſint ſigillatim æquales duobus angulis alterius, quod tota triangula æqualia & denique ſimilia ſint.* Conſtrue triangulum ABC, prout viſum fuerit; deinde ducatur recta *a b*, & ex *a* in *b* transferatur intervallum AB; in *a* excitetur angulus ipſi A æqualis; & in crus *a c* transferatur intervallum AC. Quodſi jam puncta *c* & *b* connectantur recta *b c*, prodit triangulum alterum *a b c*. Jam ubi circino capis intervallum BC, & circini crus unum colloces in *b*, crus alterum attinget punctum *c*. Vides itaque latus trianguli *a b c* tertium *b c* eſſe æquale lateri tertio BC alterius trianguli ABC. Ex punctis C, B, *c* & *b*, arbitraria circini apertura, ſed eadem, deſcribantur arcus, angulorum iſtorum menſuræ (§. 57 *Geom.*). Quodſi ope circini examines arcus ex centris C & *c*, itemque ex centris B & *b* deſcriptos; bini ſinguli deprehenduntur æquales (289 *Geom.*), atque hinc angulorum C & *c*, itemque B & *b* æqualitas colligitur (§. 141 *Geom.*). Exſcindantur ex charta, in qua delineata ſunt,

Tab. I. Fig. 6.

sunt, triangula ACB & *a c b*; & triangulum *a c b* ponatur super altero ACB, ea quidem lege, ut punctum *a* in A, & recta *a b* super AB cadat; videbis triangulum *a c b* coincidere cum triangulo ACB, seu illud huic congruere (§. 3 *Geom.*). Atque, ex congruentia, triangula ACB & *a c b* æqualia esse intelliguntur (§. 161 *Geom.*), vi notionis etiam communis: communiter enim ex congruentia æqualitatem æstimant omnes. Immo quia non minus laterum *b c* & BC, itemque angulorum *b* & B, *c* & C congruentia oculis obvia est; vi notionis etiam communis, colligitur eorundem æqualitas, nempe quod sit $bc = BC$, $b = B$ & $c = C$; ita ut examinibus anterioribus ope circini factis non sit opus. Denique ubi ad animum revocas, esse $a = A$, $ab = AB$ & $ac = AC$ per hypothesin, ast $b = B$, $c = C$ & $bc = BC$ per examen, quod instituisti; cum præter angulos & latera nihil reperias in triangulis istis, per quæ a se invicem discerni possint; eadem quoque triangula *a c b* & ACB similia deprehendis (§. 24 *Arithm.*). Similiter ubi theorema 37 (§. 233 *Geom.*) demonstrare volueris: *Si duas parallelas secet transversa, erunt anguli alterni æquales, angulus externus æquatur interno opposito & duo interni oppositi sunt æquales duobus rectis*; ducenda est 1°. linea CD; deinde 2°. altera AB eidem parallela, ad quamcunque distantiam, cum ea non determinetur in hypothesi; & 3°. pro arbitrio recta EF, quæ oblique secat parallelam utramque in G & H. 4°. Ex puncto intersectionis G ducatur arcus intra crura ipsius anguli *y*, & eodem radio ex puncto intersectionis altero arcus intra crura anguli *u*; quo facto, ut ante, ex æqualitate mensurarum colligis æqualitatem angulorum. Quodsi 5°. ex centro G eodem radio ducas arcum intra crura anguli *x*; ex æqualitate mensurarum anguli *x* & *u* colligis æqualitatem horum angulorum. Denique 6°. duc etiam ex centro G eodem adhuc radio anguli *o* mensuram; videbisque mensuras angulorum *o* & *u*, quarum hæc eadem deprehenditur cum mensura anguli *x*, semicirculum complere: unde colligis eos esse duobus rectis æquales.

Tab. I. Fig. 8.

§. 33. Absit autem, ut tibi persuadeas, demonstrationes hasce mechanicas in locum ceterarum surrogari posse, quas scientificas appellare libet in oppositione ad mechanicas. Etenim quod per mechanicas patet, nonnisi verum esse intelligitur de figura, quam descripsisti & præ manibus habes; adeoque theorematis veritas perspicitur nonnisi in casu singulari. Enimvero demonstratio, ex hypothesi theorematis ratiocinando, veritatem theorematis manifestat universaliter. Demonstratio tamen mechanica universalitatem loquitur, quatenus patet, ea, quæ ex assumtis inferuntur in theoremate,

te, per constructionem semper talia determinari debere. Nolo tamen de his dicere disertius, propterea quod vix conveniunt illorum captui, quibus demonstrationes mechanicæ satisfaciunt. Consultum etiam est, ut demonstrationes mechanicæ ad formam scientificarum reducantur, quantum datur, ut ad hasce quasi manuducant. Sed talia relinquenda sunt circumspectioni illorum, qui erudiendis aliis præficiuntur. Ceterum exemplum præbet demonstratio theorematis geometrici mechanica de congruentia triangulorum, quam modo dedimus (§. 31), ubi ex congruentia laterum *b c* & BC, angulorum *b* & B, itemque *c* & C, atque triangulorum *a c b* & ACB colligitur eorundem æqualitas, quemadmodum in demonstratione scientifica.

§. 34. Demonstrationes mechanicæ æquipollent exemplis numericis, quæ veritatem theorematum & problematum in casu singulari perspiciendam præbent. Atque adeo facile patet, quid fieri debeat, si simile quid circa theoremata arithmetica tentes. Quod vero etiam hic formæ demonstrationis scientificæ ratio haberi possit, manifestis speciminibus docuimus in Arithmetica de genesi numerorum quadratorum (§. 262 *Arithm.*), de genesi numerorum cubicorum (§. 277, 280 *Arithm.*), de numeris æquidifferentibus (§. 327, 329 *Arithm.*). Quoniam vero hisce speciminibus profundiora insunt, quæ ad tertium cognitionis gradum viam sternunt; de iis plura nobis dicenda sunt in sequentibus. Diximus istiusmodi demonstrationes in Arithmetica oculares; quia oculis conspicienda sistunt, quæ in scientifica intellectus concipere debet. Et loquuntur universalitatem ex eadem ratione, quam modo dedimus de mechanicis theorematum geometricorum demonstrationibus (§. 32). Vix tamen ratio satis manifesta erit iis, qui, in Ontologia nondum versati, non capiunt quomodo, positis determinantibus, ponatur determinatum. Sane memini, Mathematicos primi ordinis hæsitasse in talibus, quæ principio isti superstruuntur. Nec mirum: ignoratis enim, vel saltem non distincte expensis principiis, a quibus principiata pendent, horum veritas non perspicitur.

§. 35. Exempla, quibus veritas propositionis perspicitur in numeris, qualia sunt, quæ in Arithmetica subinde adduximus, & quibus propositiones illustrari debere supra præcepimus (§. 17), si coacerventur, pluribus in medium allatis, parere inductionem, quam dicunt Logici (§. 478 *Logarith.*), nemo est qui nesciat. Quoniam figuræ in charta delineatæ non minus singularia repræsentant, quam notæ numericæ; quilibet concedere tenetur, si demonstratio mechanica in pluribus figuris instituatur, similiter prodire inductionem. In utroque igitur casu certitudo major non est,

quam

quam quæ ab inductione expectari potest. Non est quod excipias, hoc pacto, etiam in demonstrationibus scientificis, a singulari ad universale argumentari, cum eædem ad figuras in charta delineatas referantur. Etenim quod demonstratur, non de figura in charta delineata demonstratur; sed ex assumtis, universaliter ratiocinando, colligitur quod erat demonstrandum: demonstratio autem refertur ad figuram in charta delineatam, ut notionibus affundatur claritas, ne in demonstratione intelligenda hæsitemus. Inde est, quod schematismorum in Geometria non requiratur veritas, quæ in usum demonstrationum delineantur: sufficit enim talia supponi, qualia in hypothesi sumuntur, neque enim ex iis, quæ figuræ delineatæ revera insunt, sed potius ex illis, quæ in hypothesi sumuntur & figuræ inesse supponuntur, procedit ratiocinatio.

§. 36. Demonstrationes istæ mechanicæ satisfaciunt iis, qui in primo cognitionis gradu acquiescunt. Faciunt enim ad perspiciendum veritatem in singulari. Eo autem contenti sunt, qui ulterius progredi nolunt; utpote nullum habentes sensum ejus convictionis, qui per demonstrationes genuinas, quas scientificas dicere libuit, demum producitur. Non tamen nullius prorsus usus sunt ceteris. Quoniam enim veritatem in singulari perspiciendam præbent; ad nexum prædicati cum subjecto, seu ejus, quod ex assumptis in hypothesi colligendum, cum iisdem, pervidendum conducunt; ut clarius intelligatur, quid demonstrari debeat, seu quomodo thesis ab hypothesi pendeat. Immo cum veritas, quamprimum perspicitur, delectet; voluptate quadam perfunditur animus tyronis, ubi videt, posita hypothesi, poni thesin, seu per assumta determinari, quæ de subjecto prædicanda sunt. Hac voluptate non modo tollitur tædium, ex prævisa difficultate percipiendæ demonstrationis, sive vera, sive imaginaria oriundum; verum etiam ardor accenditur demonstrationis percipiendæ, & ad eam percipiendam animus redditur attentus. Novi equidem exercitatioribus molestum accidere, ubi animum ante ad demonstrationem mechanicam advertere jubentur, quam ad scientificam accedant, & hac molestia effici impatientes, quod per inutiles ambages incedere debeant: id quod inprimis accidit iis, qui animum sciendi cupidum possident. Enimvero, quæ initio studii mathematici commendantur, ea in progressu prætermittuntur, quando iisdem non amplius opus habemus. A syllabizatione incipimus, quando legere discimus: ab ea abstinemus, quamprimum eadem non amplius habemus opus. Ecquis vero damnet syllabizationem, quod exercitatiores eadem in legendo non habent opus? Quamobrem velim ut de iis, quæ hic inculcantur,

non

non feratur judicium, nisi singulis rite expensis. Notandum quoque non omnia ingenia esse velocia; sed dari etiam tarda; & tarda effici studii utilissimi desertores, nisi molestiæ, qua deterrentur, tempestive afferatur medela. Sunt vero subinde tarda ingenia optima, quando nimirum naturali quodam veritatis intime perspiciendæ impetu feruntur, ut alia taceamus.

§. 37. Demonstrationes continua ratiocinatione absolvuntur, & ex assumtis procedunt. Assumta continentur in hypothesi, quæ singula demonstrationem ingredi debent. Ab his igitur exordiendum; redigendo in propositiones assumta, & ex anterioribus sumendo principia, quæ vel in definitionum, vel axiomatum, & postulatorum, vel propositionum jam demonstratarum numero sunt, terminum communem cum istis habentia, qui ipse principium istud veluti sponte sua in memoriam revocat, ubi anteriora eidem firmiter infixa tenueris. Quæ prodeunt conclusiones sumuntur deinceps eodem modo, quo ea, quæ hypothesis continebat; eodemque modo ratiocinando progrediendum, donec inferantur ea, quæ thesis sistit. Unde facile apparet, apprime opus esse, ut conclusiones per singula ratiocinia elicitæ probe notentur, & ad tollendam omnem molestiam oculis subjiciantur: id quod ope symbolicæ repræsentationis fieri posse dudum docuimus, non minus in Ratione Prælectionum Sect. 1, c. 2, §. 38, 50, quam in Logica tam minori c. §. quam majori (*not.* §. 551 *& seqq.*). Consultum vero est, ut hic exemplo uno alteroque illustrentur, quæ modo diximus, cum amplissimum habeant usum, deinceps disertius exponendum. Hic tantum modo observamus, quod neglecta hac demonstrationum resolutione, & symbolica earundem repræsentatione, studium mathematicum reddatur difficile, & plurimis idem deserendi causa detur.

§. 38. Exemplum facillimum præbet theorema sextum Geometriæ (§. 156 *Geom.*), cujus hic est tenor: ***Si recta quædam secet rectam aliam, anguli verticales ad punctum intersectionis æquales sunt.*** Theorema symbolice ita repræsentatur:

Tab. I. Fig. 9.

Hypothesis.	*Thesis.*
CD recta data,	$o = x$
AB recta eam secans,	
E punctum intersectionis, adeoque	
o & x anguli verticales (§. 67 *Geom.*).	

Patet itaque æqualitatem angulorum verticalium o & x demonstrandam esse ex eo, quod oriantur intersectione rectarum CD & AB ad punctum intersectionis E. Quodsi ergo omnia minutissime persequi volueris, convenienter definitionibus, quæ in Elementis nostris præmisimus, ut in tota demonstratione nihil admit-

admittatur, quod confuse saltem percipitur, ratiocinatio ita instituenda. In hypothesin ad figuram oculis præsentem relatam, qualem exhibet symbolica ejus repræsentatio eidem subjicienda, non minus oculos conjiciens, quam animum advertens, vides CD esse rectam, quam in E secat recta alia AB, adeoque angulos *o* & *y* habere crus unum AE commune, & crus alterum CE anguli *o* in directum situm esse cruri alteri ED anguli *y*; adeoque definitio nominalis angulorum deinceps positorum, quam ex reali, instar corollarii, deduximus (§. 63 *Geom.*), tibi suggerit hoc principium: Anguli, qui crus unum commune habent & quorum duo crura reliqua in directum jacent, sunt anguli deinceps positi. Unde infertur: Angulos *o* & *y* esse deinceps positos. Quodsi primam hanc conclusionem sumas tanquam præmissam syllogismi, & tam subjectum, quam prædicatum perpendis, memoriam subit theorema Geometriæ quintum (§. 147 *Geom.*): Duo anguli deinceps positi sunt æquales duobus rectis; quod præbet majorem novi syllogismi. Ex his præmissis colligis conclusionem: Ergo anguli *o* & *y* sunt æquales duobus rectis, quæ probe notanda in usum sequentem. Quodsi jam porro oculos in hypothesin ad figuram oculis præsentem conjicis, & animum ad eandem advertis; denuo vides, AB esse rectam, quæ secat alteram CD, adeoque angulos *y* & *x* habere crus commune ED, & crura reliqua AE & EB in directum sita esse; atque hoc formas judicium intuitivum: Anguli *y* & *x* habent crus commune & eorum crura reliqua in directum jacent. Ad hoc si animum attendis, memoria suggerit denuo definitionem nominalem angulorum deinceps positorum, quam, corollarii instar, ex reali deduximus (§. 63 *Geom.*) & hoc suppeditat principium, quod ad conclusionem modo elicitam, tanquam præmissam novi syllogismi assumtum, vicem alterius præmissæ tuetur: Anguli, qui crus unum commune habent & quorum crura reliqua in directum jacent, sunt anguli deinceps positi. Ex his igitur præmissis infers conclusionem: Anguli *y* & *x* sunt anguli deinceps positi. Quodsi porro hanc conclusionem sumas præmissam syllogismi novi, animum ad eam advertenti succurrit theorema (§. 147 *Geom.*): Anguli deinceps positi sunt æquales duobus rectis. Ex his itaque præmissis infers conclusionem: Ergo anguli *y* & *x* sunt æquales duobus rectis. Quodsi jam in duas conclusiones, *o* & *y* sunt æquales duobus rectis, *x* & *y* sunt æquales duobus rectis, oculos conjicis, & super iisdem reflectis; attendenti manifestum est: angulos *y* & *x* atque angulos *o* & *y* esse duo æqualia eidem tertio, quod hic sunt duo recti. Quamobrem si judi-

judicium hoc quasi intuitivum sumas, instar præmissæ novi syllogismi; memoria suggerit principium, quod antea didicisti (§. 87 *Arithm.*): Æqualia eidem tertio sunt æqualia inter se. Ex his adeo præmissis infers: Anguli *o* & *y* simul sumti sunt æquales angulis *y* & *x* simul sumtis. Enimvero thesis, ubi in eam oculos conjicis, attendenti loquitur demonstrandum esse, quod angulus *o* sit æqualis angulo *x*. Quamobrem vides angulum *y* utrinque esse auferendum, ut anguli *o* & *x* relinquantur: quod dum fieri supponitur, patet, quod idem ab æqualibus auferatur. Hoc igitur si sumis, succurrit denuo principium, quod in Arithmetica didicisti (§. 91 *Arithm.*): Si æqualia ab æqualibus auferas, vel idem ab æqualibus, quæ relinquuntur æqualia sunt. Unde porro concludis: Anguli *o* & *x*, qui hic relinquuntur, æquales sunt. Atque sic patet, demonstratum esse, quod demonstrandum fuisse thesis insinuat.

§. 39. Distinctissime adeo docuimus, quomodo concipienda sit demonstratio, ut omnem consequatur evidentiam, quam habere potest. Quodsi jam eandem symbolice repræsentare volueris, ut omnem quoque consequatur claritatem, quam habere potest, omnisque in ea concipienda tollatur difficultas; hoc modo ipsum fieri debet:

I.

AE crus commune ang. *o* & *y*.
CE in directum situm ipsi ED

---

o & *y* anguli deinceps positi

---

1. $o + y = 2$ R.

II.

ED crus commune ang. *y* & *x*
AE in directum situm ipsi EB

---

y & *x* anguli deinceps positi

---

2. $y + x = 2$ R.

III.

$o + y = 2$ R. *vi num.* 1.
$y + x = 2$ R. *vi num.* 2.

$y + o = y + x$

$o = x$ *Q. E. D.*

Notandum hic, lineam a se invicem separare, quæ sumuntur, & quod ex iis concluditur. Illa supra lineam collocantur, hoc infra eandem constituitur. Quod intra duas lineas deprehenditur, duplici modo considerari, nimirum 1°. tanquam conclusionem, quæ ex assumtis colligitur, & 2°. tanquam assumtum, unde ulterius infertur, quod infra lineam alteram scribitur. Vides autem porro, primo loco *num. I*, & *num. II*, assumta ex hypothesi peti, ac inde duplici ratiocinio elici conclusionem *num.* 1, & alteram *num.* 2. Exhausta sic

ſic hypotheſi, *num. III* ſumuntur concluſiones *num.* 1 *&* 2 ex hypotheſi elicitæ; ac inde inde porro duplici ratiocinio tandem elicitur, quod in theſi continetur, eſſe $o=x$, ſeu angulos verticales eſſe æquales. Repræſentatio hæc demonſtrationis ſymbolica tantummodo propoſitionem minorem & concluſionem uniuscujusque ſyllogiſmi exhibet, qui demonſtrationem ingreditur; adeoque ſyllogiſmos ad enthymemata reducit; omiſſis principiis, quæ unicuique ſyllogiſmo majorem præbent, ac facile ſupplentur ex regulis logicis; immo ſua veluti ſponte memoriam ſubeunt, ubi ea familiaria experiris; vel per citationem in contextu poſitam reperiri poſſunt, ubi memoriæ nondum fuerint infixa. Atque adeo abunde patet, nihil hic deſiderari, quod ad demonſtrationem diſtincte concipiendam requiritur, & non minus ad evidentiam quoad illationem demonſtrationi conciliandam, quam ad claritatem omnem eidem affundendam, ne quicquam obſcuri ſuperſit, ſed ut penitus intelligatur, deſideratur.

§. 40. Demus adhuc exemplum aliud. Sit demonſtrandum theorema 18 Geometriæ, de quo diximus ſuperius (§. 25). *Si duo triangula habuerint angulum unum æqualem, & latera eundem comprehendentia ſigillatim æqualia; erit etiam latus tertium unius æquale lateri tertio alterius, duo anguli reliqui erunt ſigillatim æquales, & tota triangula æqualia atque ſimilia.* Quoniam ex hypotheſi ratiocinatio nondum procedit, quemadmodum in caſu anteriore (§. 38, 39); præterea in uſum demonſtrationis quædam adhuc alia ſumuntur, quæ ſumi poſſe patet. Ubi vero hoc fieri ſolet, tum quæ ulterius ſupponuntur, præparationem conſtituere dicuntur. Eſt itaque hoc in caſu, ubi æqualitatem & ſimilitudinem ex principio congruentiæ demonſtraturi ſumus, præparatio hæc (§. 3 *Geom.*). Triangulum unum ponatur ſuper altero, ita ut vertex angulorum æqualium unius ponatur ſuper vertice alterius & crus illius unum cadat ſuper crure uno alterius. Quæ in præparatione ſumuntur, ea tanquam ad hypotheſin ſpectantia conſiderantur, nullo inter hypotheſin & præparationem, quoad uſum aſſumtorum in demonſtrando, facto diſcrimine. Dico quoad uſum aſſumtorum in demonſtrando: alias enim manifeſtum eſt diſcrimen inter ea, quæ in hypotheſi, & ea, quæ in præparatione ſumuntur. Etenim per ea ſola, quæ in hypotheſi ſumuntur, determinantur ea, quæ ſubjecto tribuenda & de eodem adeo demonſtranda veniunt: quæ vero in præparatione ſumuntur, non alium habent uſum, quam ut ex ſumtis in hypotheſi procedat ratiocinatio. Nimirum quæ in præparatione ſumuntur, per ea, quæ ſumuntur in hypotheſi non determinantur; alias enim ratio-

ratiocinando ex iisdem colligi poterant, nec ulla foret ratio, cur sumerentur. Sumi autem possunt non invito principio contradictionis, quatenus hypothesi non repugnant, sed cum iis, quæ in eadem continentur, una consistunt. Absoluta itaque præparatione demonstratio ordine naturali, qualem requirit usus facultatum animæ, ita procedit.

Tab. I. fig. 6. §. 41. Vertex anguli *a* cadit in verticem anguli A, & crus illius *a b* in crus alterius AB, per præparationem, estque angulus *a* æqualis ipsi *A*, per hypothesin. Hæc ubi perpendis, succurrit theorema 12 (§. 166 *Geom.*). Si fuerint duo anguli æquales, & vertex unius ponatur super verticem alterius, ac præterea crus unum illius super crure uno hujus; etiam crus alterum illius super crus alterum hujus cadit. Unde infertur: 1°. crus *a c* anguli *a* super crure AC anguli A cadit. Jam porro *a* cadit in A & *a b* super AB, per præparationem, & *a b*=AB, per hypothesin. Ad hæc animum advertenti succurrit: Si recta quædam alteri æqualis ita applicetur, ut terminus ejus unus cadat super terminum unum alterius, ac ipsa cadat in alteram; etiam alter ejus terminus in terminum alterum alterius cadit (§. 169 *Geom.*). Unde infertur 2°. rectæ *a b* punctum *b* cadere in punctum B rectæ alterius AB. Similiter punctum *a* cadit in A, per præparationem, & *a c* super A C per demonstrata *num.* 1, estque *a c* =AC, per hypothesin. Succurrit igitur denuo principium modo commemoratum, indeque infertur: 3°. punctum *c* cadere in C. Atque hæc sunt, quæ ex hypothesi, accedente præparatione, ratiocinando colliguntur. Enimvero quoniam in hisce conclusionibus nondum continentur, quæ demonstranda loquitur thesis; hæc ex illis continuata ratiocinatione colligenda. Ad conclusiones modo elicitas perspicienti manifestum est, quod punctum *c* in C per demonstrata *num.* 3, & punctum *b* in B per demonstrata *num.* 2 cadere; unde formatur hoc judicium quasi intuitivum: Rectæ *b c* & BC intra eosdem terminos continentur (§. 11 *Geom.*). Vi definitionis congruentiæ (§. 3 *Geom.*), memoria suggerit hoc principium. Quæ intra eosdem terminos continentur, ea sibi mutuo congruunt. Hinc infertur conclusio: Recta *b c* congruit rectæ BC. Hanc conclusionem si sumas instar præmissæ novi syllogismi; memoria suggerit hoc principium (§ 161 *Geom.*): Quæ sibi mutuo congruunt, ea sunt æqualia. Unde infertur: I. recta *b c* æqualis est rectæ BC; quod erat primum, eorum scilicet, quæ vi theseos demonstranda. Porro *b* cadit in B, per demonstrata *num.* 2, *b a* in BA, per præparationem, & *b c* in BC, per demonstrata *num.* 2 & *n.* 3, atque §. 170. *Geom.* Habemus adeo duos angulos *b* & B, quorum vertices *b* & B

atque crura *bc* & BC, itemque *ba* & BA coincidunt. Enimvero si vertex & crura angulorum duorum coincidunt, anguli æquales sunt (§. 167 *Geom.*). Ergo II, angulus *b* æqualis est ipsi B; quod erat secundum, eorum scilicet, quæ vi theseos demonstranda. Similiter punctum *c* in C cadit per demonstrata *num.* 3, & *ca* in CA per demonstrata *num.* 1, item *cb* in CB per demonstrata *num.* 2 & *num.* 3, atque §. 170 *Geom.* Habemus igitur denuo duos angulos *c* & C, quorum vertices & crura coincidunt. Denuo ad hoc animum advertenti succurrit principium: Si duorum angulorum vertices & crura coincidunt, anguli æquales sunt. Unde infertur conclusio III, anguli *c* & C æquales sunt; quod erat tertium. Denique *a* cadit in A, per præparationem, *b* in B, per demonstrata *num.* 2, & *c* in C per demonstrata *num.* 3, adeoque patet triangula *acb* & ACB intra eosdem terminos contineri (§. 11, 170 *Geom.*). Hoc ipsum perpendenti succurrit; Quæ intra eosdem terminos continentur, ea sibi mutuo congruunt (§. 3 *Geom.*). Unde colligitur: Triangula *acb* & ACB sibi mutuo congruunt. Quodsi hanc conclusionem sumas tanquam præmissam novi syllogismi, memoriam subit principium (§. 161 *Geom.*): Quæ sibi mutuo congruunt, ea & æqualia, & similia sunt. Unde infertur IV, triangula *acb* & ACB æqualia & similia sunt; quod erat quartum. Integram adeo demonstrationem absolvimus, cum vi theseos nihil amplius demonstrandum restet.

§. 42. Quodsi symbolicam demonstrationis hujus repræsentationem desideres, qua singula veluti oculis conspicienda exhibentur; ea ita sese habet:

Hypothesis	*Thesis.*
ang. $a = A$	I. $bc = BC$
$ab = AB$	II. ang. $b = B$
$ac = AC$	III. $c = C$
	IV. $\triangle acb \cong \triangle ACB$

Tab. I. Fig. 6.

Præparatio.

a cadit in A

ab cadit in AB

Demonstratio.

I.

a cadit in A, *per præparat.*
ab cadit in AB, *per eandem.*
a = A, *per hypoth.*

1°. *ac* cadit in AC

II.

ab = AB, *per hypoth.*
a cadit in A, *per præparat.*
ab cadit in AB, *per eandem.*

2°. *b* cadit in B

III.

a cadit in A, *per præparat.*
ac cadit in AC, *per demonstr. num.* 1.
ac = AC, *per hypoth.*

3°. *c* cadit in C

IV.

c cadit in C, *per demonstr. num.* 3.
b cadit in B, *per demonstr. num.* 2.

adeo-

adeoque
b c & BC intra eosdem terminos continentur.

Recta *b c* congruit ipsi BC

I. *b c*=BC
V.
b cadit in B, *per demonstr. num.* 2.
b a cadit in BA, *per præparat.*
b c cadit in BC, *per demonstr. num.* 2. & *num.* 3 & §. 170 *Geom.*

II angulus *b*=B
VI.
c cadit in C, *per demonstr. num.* 3.
c a cadit in CA, *per demonstr. num.* 1.
c b cadit in CB, *per demonstr. num.* 2. & *num.* 3. & §. 170 *Geom.*

III. angulus *c*=C
VII.
a cadit in A, *per præparat.*
b cadit in B, *per demonstr. num.* 2.
c cadit in C, *per demonstr. num.* 3.
adeoque
△△*a c b* & ACB intra eosdem terminos continentur (§. 11, 170 *Geom.*)

△*a c b* congruit △ ACB

IV. △*a c b* ≌ △ ACB

§. 43. Atque ita totam demonstrationem in sua prima principia resolvimus, ex quibus facultatum nostrarum usu deducitur, non admissis notionibus confusis, quæ obscuritatem quandam relinquere poterant, & ratiociniis distincte atque naturali ordine expressis, ac inter se concatenatis, ut nihil desit evidentiæ (§. 41). Singula hæc ipsis oculis spectanda exhibet repræsentatio demonstrationis resolutæ symbolica (§. 42). Etenim conspicitur, quomodo demonstratio ex hypothesi & præparatione, tanquam ex assumtis procedat; quemnam utriusque usum faciamus in demonstrando; & cur præparatione opus sit; nec non quomodo sese habeant ea, quæ præparatio superaddit, ad ea quæ in hypothesi continentur. Videmus porro, quomodo omnes determinationes in hypothesi contentæ invehantur in demonstrationem; ut tandem, ex omnibus simul sumtis, concludatur unumquodque eorum, quod in thesi continetur, tanquam determinatum ex determinantibus. Videmus quoque, quomodo ratiocinia concatenentur, introductis conclusionibus præcedentium in sequentia. Videmus denique, quomodo ratiocinia ultima terminentur in iis, quæ demonstranda loquitur thesis, ut manifestum sit demonstrationem esse absolutam.

§. 44. Habet autem repræsentatio demonstrationis symbolica hunc usum, ut eandem facilitet & omnem difficultatem arceat. Oritur difficultas ex ratiociniorum continuandorum longa serie, & conclusiones, quæ in præcedentibus ratiociniis fuerant elicitæ, memoria retinendæ, ut eas intro-

introducere liceat in sequentes per modum præmissarum, ubi non statim, quando illatæ fuerunt, in locum præmissæ assumuntur in syllogismo proxime sequente, quemadmodum in exemplo primo factum esse apparet *num.* I, & II, (§. 39) & in præsenti *num.* IV, & VII. Enimvero, si demonstratio symbolice repræsentetur, gradum sistere licet in singulis, quæ sigillatim expressa exhibentur, & quacunque mora interposita redeunti progredi datur, ac si nulla interposita fuisset. Quantacunque igitur fuerit ratiociniorum eo usque continuandorum series, donec perveniatur ad ea, quæ demonstranda fuerant; non tamen defatigabitur animus ratiocinationi in longa serie continuandæ minus adsuetus. Nec distrahitur animus, quocunque, durante illa quam interponere visum est mora, cogitationes tuas convertas. Non interrumpitur eadem attentio, quæ ad demonstrationem afferenda, ne desit sensus evidentiæ ad convictionem plenariam requisitus. Immo dum omnia, ad quæ animus advertendus, oculis spectanda subjicit, attentionem mirifice juvat, sive ea excitanda, sive conservanda fuerit. Neque defatigatur imaginatio, atque memoria; quatenus conclusiones syllogismorum anteriorum retinendæ, ut earum prompte meminerimus, dum in syllogismos sequentes introducendæ; cum oculis in ea, quæ distincte scripta cernuntur, conversis, sua sese sponte sistant, quamprimum earundem meminisse debemus. Neque etiam hæsitas in eo, quomodo progrediendum sit in demonstratione, donec absolvatur. Etenim clarissime vides, primum formari propositiones ex iis, quæ in hypothesi &, ubi ea non sufficit sola, in præparatione sumuntur, ut, adscitis principiis, ex anterioribus inferantur conclusiones, donec hypothesis & præparatio fuerit exhausta. In locum hypotheseos & præparationis, deinde succedunt conclusiones hoc pacto elicitæ, & quomodo introducendæ sint in novos syllogismos, tum thesis, quæ demonstranda oculis objicit, tum memoria principiorum, quæ conspectus conclusionum & in thesi contentorum offert, ostendit. Quodsi adeo principia anteriora familiaria experiris, in distincte concipienda demonstratione nihil prorsus difficultatis percipitur. Redduntur autem familiaria, si eo, quem præscripsimus, modo expendantur, & symbolicæ repræsentationes, quas explicavimus, aliquoties animo recolantur.

§. 45. Qui principia, quibus opus habet, nondum adeo familiaria experitur, ut sponte sua memoriam subeant, quoties iisdem opus est; ei inserviunt citationes demonstrationibus in contextu insertæ. Hæ enim ostendunt paragraphum, in quo principium continetur, quod ad propositionem, vel ex hypothesi ac præparatione formatam, vel ex conclusionibus

nibus jam elicitis assumtam aut derivatam, applicatum conclusioni eliciendæ inservit. Patebit hoc, demonstrationis symbolicam repræsentationem cum contextu conferenti, ut adeo opus non sit plura in hanc rem afferri.

§. 46. Notandum nimirum, in contextu demonstrationem concisius proponi; quantum sufficit, ut singula suggerantur, quæ animum subire debent, ubi illam distincte concipere volueris. Quodsi tamen contextum cum resolutione, qualem hic præcepimus, & repræsentatione symbolica, qualem exhibuimus, conferre volueris; facile observabis, demonstrationem in contextu positam esse utriusque directorium, ne hæsites in eo, quid fieri debeat. Facile adeo animadvertes, demonstrationes ita a nobis fuisse expressas, ut huic instituto maxime conveniant. Disces etiam, resolvendo demonstrationes eo, quem præcepimus, modo, & symbolice repræsentando, easdem minime effici prolixiores: cum supplendo ea, quæ conspectus schematismi suggerit & quæ citationes insinuant, eodem prorsus ordine prodeant singula ratiocinia, quo eadem posuimus. Immo, si sufficiente attentione uti volueris, in te ipso experieris, deesse adhuc aliquid sensui evidentiæ, quamdiu singula ratiocinia non formaveris; præsertim ubi uno vel altero exemplo eundem acquisiveris, ut ne ignores differentiam, quæ inter distinctam & confusam perceptionem intercedit. Absit itaque ut tibi persuadeas, hic a nobis præcipi, quæ a contextu abhorrent, ac per inutiles ambages ad scopum tendi.

§. 47. Enimvero non inconsultum esse videtur, ut exemplum quoque demonstrationis theorematis arithmetici in medium afferamus. Sumamus itaque theorema 21 (§. 181 *Arithm.*), quo superius usi sumus (§. 24) & quod ita habet: *Si duas quascunque quantitates per eandem tertiam dividas; quoti sunt inter se ut quantitates divisæ.* Theorema hoc symbolice ita repræsentatur:

Hypothesis.	*Thesis.*
A & B quantitates dividendæ,	F : G = A : B.
C dividens communis,	
F & G quoti ex divisione prodeuntes	

Patet itaque demonstrandum esse, quotos F & G esse quantitatibus A & B proportionales, ex eo, quod prodeant ex divisione quantitatum A & B per eandem tertiam C. Quodsi ergo ex hypothesi sumis: Quotus F prodit ex divisione quantitatis A per quantitatem C; ex anterioribus (§. 174 *Arithm.*) succurrit principium: In divisione unitas est ad divisorem, ut quotus ad dividendum. Unde infertur: 1, sive unitas, est ad C ut F ad A. Quodsi porro ex hypothesi sumis: Quotus G prodit ex divisione quantitatis B per quantitatem

titatem C; vi ejusdem principii infertur: unitas, sive 1, est ad C ut G ad B. Exhausta hypothesi, ut inde nihil amplius concludi possit, ubi conclusiones modo elicitas inter se confers, patebit rationes F ad A, & G ad B, esse duas rationes eidem tertiæ 1 ad C æquales. Succurrit itaque theorema (§. 167 *Arithm.*): Rationes æquales eidem tertiæ sunt æquales inter se. Atque hinc infertur: Rationes F ad A & G ad B esse æquales, seu esse F : A = G : B. Enimvero thesis ostendit, quæri quomodo sese habeat A ad B. Huc si animum advertas, succurrit theorema 18 (§. 173 *Arithm.*): Quantitates proportionales etiam alternando proportionales sunt. Atque adeo tandem infertur, esse F: G = A : B, quod erat demonstrandum.

§. 48. Symbolica demonstrationis hujus repræsentatio hæc est:

Hypothesis.	*Thesis.*
$\frac{A}{C} = F$	$F : G = A : B$.
$\frac{B}{C} = G$	

Demonstratio.

I.

$\frac{A}{C} = F$, *per hypothesin.*

1°. $1 : C = F : A$

II.

$\frac{B}{C} = G$, *per hypothesin.*

2°. $1 : C = G : B$

III.

$1 : C = F : A$, *per demonstrata n.* 1.

$1 : C = G : B$, *per demonstrata n.* 2.

$F : A = G : B$

$F : G = A : B$ *Q. E. D.*

Nulla hic opus est præparatione, cum sola hypothesis ea contineat, unde vi principiorum anteriorum tandem infertur conclusio, quæ vi theseos inde elicienda. Quodsi majoris perspicuitatis gratia in numeris demonstrationem repræsentare volueris, non alia re opus est, quam ut literis substituantur numeri; eo modo, quo hic factum esse vides:

Hypothesis.	*Thesis.*
$\frac{24}{3} = 8$	$8 : 4 = 24 : 12$.
$\frac{12}{3} = 4$	

Demonstratio.

I.

$\frac{24}{3} = 8$, *per hypothesin.*

1°. $1 : 3 = 8 : 24$

II.

II.

$\frac{12}{3} = 4$, *per hypothesin.*

2°. $1 : 3 = 4 : 12$

III.

$1 : 3 = 8 : 24$, *per demonstrata n.* 1.
$1 : 3 = 4 : 12$, *per demonstrata n.* 2.

$8 : 24 = 4 : 12$

$8 : 4 = 24 : 12$ *Q. E. D.*

Possunt etiam numeri quantitatibus per literas designatis subscribi, vel ad latus adjici, prout supra factum esse apparet (§. 24), ut claritate sua dispellant obscuritatem, quæ signis istis universalibus adhærere videtur, quamdiu iisdem nondum satis fueris adsuetus. Ceterum si demonstrationem in numeris exhibere volueris, eadem demonstratione ad plura exempla applicata, absque ulla molestia fit repetitio, quod idem agendo semper aliud agere tibi videris, quatenus numerorum diversitas varietatem quandam inducit.

§. 49. Cum repræsentatio demonstrationis in numeris non sit nisi ipsa demonstratio scientifica, seu generalis, ad exemplum aliquod, majoris perspicuitatis gratia, applicata; quemadmodum in Geometria demonstratio applicatur ad figuram in charta delineatam, quæ singulare exemplum præbet; ideo in eadem acquiescere licet, nec opus est, ut iisdem signa universalia substituas; modo tibi caveas, ne in ratiocinia tacite invehas determinationes nonnullas, quæ insunt numeris assumtis, non vero hypothesi. Etenim tum demonstratio non succedit, nisi in eo casu, ubi istæ determinationes adsunt; consequenter tantummodo casum quendam particularem attingit, nec universaliter demonstratur, quod erat demonstrandum. Atque adeo contingere potest, ut, dum conclusio in casu particulari elicita habetur pro universali, in errorem incidas. Enimvero error hic præcavetur, modo probe consideres, num quod assumis, conclusionis inferendæ gratia, totum in hypothesi contineatur, aut per præparationem superaccedat, si prætera aliud quid sumitur, nulla habita ratione eorum, quæ numeris qua talibus insunt. Ita enim certum est, in omni exemplo alio ratiocinationem eodem modo procedere, nec argumentationem fieri ab eo, quod huic exemplo inest singulare, sed ab eo, quod cum omnibus aliis sub hypothesi contentis commune habet. Ex. gr. in exemplo nostro (§. 48), quoti 8 & 4, *num. I & II*, sunt numeri integri rationales. Ast principium, quo mediante hinc inferimus conclusiones, scilicet quod in omni divisione sit ut unitas ad divisorem, ita quotus ad dividendum, satis ostendit, conclusionem inferri ex eo, quod 8 & 4 sint quoti

per divisionem duorum numerorum 24 & 12, per eundem tertium 3 prodeuntes, nec supponi quotum esse numerum integrum rationalem; consequenter nihil hypothesi superaddi, dum demonstratio ad exemplum aliquod singulare applicatur. Ceterum, quæ hic dicuntur probe notanda sunt, cum usum habeant etiam extra Mathesin, atque in partibus Matheseos mixtis, & in cognitione Naturæ mathematica, ubi majore circumspectione opus est, quam in Arithmetica: præsertim si theoria accurata nondum prostat, unde haurienda sunt principia demonstrandi; nec distinctis ratiociniis in demonstrando fueris adsuetus; qualia requirit nostra demonstrationum resolutio, earundemque symbolica repræsentatio, secundum leges animæ, naturali ordine ex hypothesi &, quæ subinde eidem superaccedere debet, præparatione, tanquam ex fonte suo, profluentia, quemadmodum ex principiis Psychologiæ empiricæ demonstrari potest nullo negotio, modo ea habueris perspecta.

§. 50. Quoniam demonstrationis universalitati nil quicquam decedit, dum ad exemplum aliquod applicatur (§. 49); ab ejus repræsentatione in numeris facile abstrahitur demonstratio, qualem libro inseri convenit; si quæ assumuntur, & conclusiones quæ hinc inferuntur, verbis enuncientur, & conclusionibus adjiciantur citationes principiorum, quorum vi hæ inferuntur. Ita in casu dato (§. 48) talis prodit demonstratio: Quoniam quoti ex divisione duarum quantitatum per eandem tertiam resultant, per hypothesin; quilibet eorum est ad quantitatem divisam ut unitas ad tertiam, quæ utramque dividit (§. 174 *Arithm.*); consequenter quoti ad quantitates divisas eandem habent rationem (§. 167 *Arithm.*). Sunt igitur inter se ut quantitates divisæ (§. 173 *Arithm.*). *Q. e. d.*

§. 51. Quodsi problema aliquod demonstrandum est; notandum idem converti in theorema, sumta resolutione cum datis tanquam hypothesi, & eo, quod fieri debet, tanquam thesi. Ex. gr. Problema de ducenda linea alteri parallela, per punctum extra ipsam datum, adhibita resolutione prima, quam superius exempli loco produximus (§. 27), in hoc theorema convertitur: Si ex puncto, extra lineam dato, demittatur ad lineam datam perpendicularis; & ex puncto alio intra eandem pro arbitrio assumto, erigatur perpendicularis altera eidem æqualis: recta per punctum datum & extremum perpendicularis alterius transiens est lineæ datæ parallela.

§. 52. Ubi problema in theorema fuerit conversum, resolutio demonstrationis eodem modo absolvitur, quo in demonstrationibus theorematum resolvendis usi sumus (§. 38, 41 & 47). Sit ex. gr. resolvenda demonstratio problematis, quod modo ad theorema revoca-

revocavimus (§. 51); demonstratio ita procedit. Recta VK, ex puncto V extra lineam RS dato, ducta est ad eandem perpendicularis; recta TA, ex puncto T intra rectam RS pro arbitrio assumta, est itidem ad eandem perpendicularis, alterique perpendiculari VK æqualis, per constructionem seu resolutionem; adeoque perpendicula, inter rectam datam RS & rectam per punctum V & A ductam intercepta, VK & TA æqualia sunt. Enimvero si perpendicula inter duas lineas intercepta æqualia sunt, lineæ istæ sunt parallelæ (§. 226 *Geom.*). Linea igitur, ducta per punctum datum V & extremum A alterius perpendicularis TA, est parallela lineæ datæ RS. *Q. e. d.* Videmus adeo ex iis, quæ constructio, juxta resolutionem problematis facta suggerit, unico syllogismo inferri, quod demonstrandum erat: quæ ratio est, cur nullam in contextu demonstrationem adjecerimus, sed tantummodo citationem principii, vi cujus ex constructione infertur, quod erat demonstrandum, nempe parallelismus linearum RS & MN.

Tab. I. Fig. 5.

§. 53. Symbolica demonstrationis hujus repræsentatio nihil prorsus difficultatis habet. Etenim non alia re opus est, quam ut repræsentationi symbolicæ resolutionis supra datæ (§. 27) adscribas data ex repræsentatione problematis symbolica, & ad summum adjicias propositionem ex iisdem formatam; prouti hic factum esse vides:

Hypothesis.	*Thesis.*
Recta RS data,	MN paral. RS.
Punctum V extra eam datum,	
VK perpendicularis ad RS,	
T punctum pro arbitrio assumtum,	
TA=VK,	
MN transiens per V & A.	

Demonstratio.

VK & TA perpendicula inter MN & RS, atque VK=TA.

MN parallela ipsi RS. *Q. e. d.*

§. 54. Quoniam demonstratio problematis, quod exempli loco in medium protulimus (§. 51 & seqq.), perbrevis est, utpote quæ nonnisi unico syllogismo constat; non inconsultum videtur addere exemplum adhuc aliud. Sumamus itaque problema 33 Geometriæ de invenienda linea media proportionali inter duas datas. Sunt itaque datæ rectæ duæ AB & BE; quæsitum est recta BD media proportionalis inter AB & BE. Resolutio jubet rectas AB & BE jungi in directum, ut prodeat recta AE; super AE describi semicirculum ADE: & ex B erigi perpendicularem BD semicirculo in D occurrentem; quæ esse dicitur media proportionalis inter AB & BE. Quodsi ergo problema demonstrare volueris, resolutione in hypothesin versa & propositione pro thesi sumta; sequens prodit theorema. Si super recta AE describatur

Tab. I. Fig. 10.

 semi-

ſemicirculus, & ex puncto quocunque diametri B erigatur perpendicularis BD ſemicirculo in D occurrens; erit ea inter ſegmenta diametri AB & BE media proportionalis.

§. 55. Quodſi jam hoc theorema demonſtrare volueris, præparatio accedere debet. Ducantur itaque rectæ AD & DE, chordæ arcus ſemicirculi cognomines ſubtendentes, ut prodeant triangula ADB, BDE & ADE. Quo facto demonſtratio ita reſolvitur. Sumimus ex conſtructione: Recta BD perpendicularis eſt ad AE. Hoc ubi perpendis, definitio perpendicularis lineæ ſuggerit hoc principium (§. 78 *Geom.*): Si linea recta fuerit ad alteram perpendicularis, anguli, quos cum ea efficit, recti ſunt & æquales (§. 79 *Geom.*). Unde infertur angulos *m* & *n* eſſe rectos & æquales. Porro rectæ AD & DE ſemicirculum ſubtendunt, vi præparationis & AE diameter circuli eſt, per conſtructionem. Unde patet, quod ADE ſit angulus in ſemicirculo. Huc ſi animum advertis ſuccurrit theorema (§. 317 *Geom.*): Angulus in ſemicirculo rectus eſt. Unde infertur: angulus ADE ſeu $o + x$ rectus eſt. Eſt vero etiam angulus *m* rectus, per demonſtrata. Quamobrem, ſi angulum *m* ad angulum $o+x$ referas, ſuccurrit principium (§. 145 *Geom.*): omnes anguli recti inter ſe æquales ſunt. Unde infertur: angulus *m* trianguli ADB eſt æqualis angulo $o + x$ trianguli ADE. Enimvero angulus *y* utrique triangulo ADB & ADE communis eſt, atque adeo duo in hiſce triangulis anguli æquales ſunt. Memoria ſuggerit, ſiquidem anteriora eidem mandaveris, quemadmodum fieri debet, adeoque hic ſupponitur: Si duo anguli unius trianguli æquentur duobus alterius, etiam tertius unius æqualis eſt tertio alterius (§. 246 *Geom.*). Hinc itaque colligitur angulum *o* in triangulo ADB eſſe æqualem angulo *z* in triangulo ADE. Quodſi jam angulos in triangulis ADB & DBE inter ſe confers, tum patet duos angulos *m* & *o* trianguli ADB eſſe ſigillatim æquales duobus angulis *n* & *z* alterius trianguli DBE. Succurrit itaque, ex anterioribus memoriæ probe infixis, principium: ſi duo anguli unius trianguli fuerint ſigillatim æquales duobus angulis alterius, triangula latera æqualibus angulis oppoſita proportionalia habent (§. 267 *Geom.*). Hinc infertur, latera AB & BD in triangulo ABD eſſe proportionalia lateribus BD & BE in triangulo DBE, quorum ſcilicet illa opponuntur angulis *o* & *y*, hi vero angulis *z* & *x*, angulo *o* exiſtente æquali angulo *z* & angulo *y* æquali angulo *x*, per demonſtrata. Habemus adeo $AB : BD = BD : BE$. *Q. e. d.* Ita demonſtrationem reſolvimus, ut ſingula diſtincte enuncientur, quæ in notionibus continentur, quæ eandem abſolvunt, & præſentes animo

ejus

ejus esse debent, qui eadem convincitur.

Tab. I. Fig. 9. §. 56. Demonstratio problematis hujus symbolice ita repræsentatur.

Hypothesis.	*Thesis.*
AB recta data	BD recta quæsita.
BE recta data	AB: BD=BD:BE
AE diameter semicirculi	
ADE semicirculus	
AB, BE } Segmenta diametri	

Præparatio.

AD & DE chordæ semicirculum subtendentes.

Demonstratio.

I.

BD perpendicularis ad AE, *per constr.*

1°. m & n anguli recti
& $m=n$

II.

AD & DE semicirc. subtendunt, *per præparat.*
AE diameter circuli, *per construct.*
adeoque
ADE angulus in semicirculo.

2°. angulus $o+x$ rectus.

III.

ang. $o+x$ rectus, *per demonstr. num.* 2.
m rectus, *per demonstr. num.* 1.

3°. $o+x=m$

IV.

in △△ ADE & ABD
$o+x=m$, *per demonstr. num.* 3.
$y=y$

4. $z=o$.

V.

in △△ ADB & DBE
$m=n$, *per demonstrat. num.* 1.
$o=z$, *per demonstrat. num.* 4.

5°. $y=x$ &
AB: BD=BD: BE. *Q. e. d.*

§. 57. Atque adeo patet, inter demonstrationem theorematis & problematis nullam intercedere differentiam, modo problema in theorema convertatur, quemadmodum id fieri debere præcepimus (§. 51, 54). Et hoc pacto docuimus omnia, quæ observanda sunt ei, qui ad secundum cognitionis humanæ gradum adspirat. Unicum adhuc moneri consultum ducimus; scilicet quod ex resolutione demonstrationum pateat, cur propositiones pure enunciare debeamus, quas brevitatis gratia in contextu statim ad figuras retulimus, expositione cum propositione in unum confusa. Etenim ubi distincte ratiocinari volueris, quemadmodum exigit resolutio demonstrationis; necesse est ut propositiones singulæ pure enuncientur. Quamobrem etiam pure enunciatæ memoriæ mandandæ; cum alias applicatio, in casu dato, ob literarum figuris adscripta-

fcriptarum diverfitatem, confundat, ut difficilis ac molefta evadat. In addifcenda igitur Mathefi morem veterum fequi tenemur, ut primum propofitionem unamquamque pure enunciemus, ac deinde eandem exponamus, feparata expofitione a propofitione, quando eidem immixta.

§. 58. Quodfi objicias, nos nihil dixiffe de corollariis, quorum tamen bene multa in Elementis noftris occurrunt: facilis eft refponfio. Corollaria enim funt propofitiones, quarum veritas perfpicitur per definitionem, vel propofitionem, cui fubjiciuntur. Quoniam pleraque eorum demonftratione indigent, quam per modum principii ingreditur definitio, vel propofitio, cui fubjiciuntur; quæ de refolutione & fymbolica repræfentatione propofitionum diximus, ea quoque de corollariis tenenda. Nimirum propofitio pure enuncianda, deinde exponenda, expofita in hypothefin & thefin refolvenda, quarum utraque confueto more fymbolice repræfentata. Demonftratio deinde, eodem modo refolvenda, quo eandem in anterioribus refolvimus, eodem etiam modo fymbolice repræfentanda, quo eandem in anterioribus repræfentavimus. Nullis igitur peculiaribus præceptis hic opus.

§. 59. Ne quicquam in dictis fuperfit obfcuri, exemplum aliquod fuperaddere lubet. Sumamus itaque corollarium quartum theorematis 34 (§. 228 *Geom.*), quod revera eft corollarium præcedentis tertii; cum non theorema ipfum, fed ejus corollarium tertium ingrediatur demonftrationem tanquam principium. Propofitio in eodem contenta hæc eft: *Si in triangulo rectangulo cathetus unus fumatur pro bafi, erit alter altitudo.* Hæc propofitio ita exponitur. Sit MKL triangulum, MK & KL catheti ejus. Dico fi KL fumatur pro bafi, fore MK altitudinem ejus. Hypothefis adeo eft quod triangulum MKL fit rectangulum, MK & KL fint catheti, & KL fumatur pro bafi; thefis autem, quod cathetus MK fit altitudo trianguli. Demonftratio ita refolvitur, fi nihil perceptioni confufæ tribuere, fed fingula ad notionem diftinctam reducere volueris. Figura MKL triangulum rectangulum eft, per hypothefin. Succurrit definitio 52 (§. 91 *Geom.*): In triangulo rectangulo angulus unus rectus eft. Unde concluditur: In figura MKL angulus unus rectus eft: Porro latera MK & KL funt catheti, per hypothefin. Succurrit definitio 57 (§. 96 *Geom.*). Catheti trianguli rectanguli angulum rectum intercipiunt. Unde infertur. Angulus K rectus eft. Studio utor fyllogifmo cryptico, quem a crypfi facile liberabit in Logica verfatus, tum quia fyllogifmi cryptici frequentiffime fua veluti fponte fefe offerunt in demonftrationibus, manifefti autem

Tab. I. Fig. 11.

tem

rem studio quærendi; tum ut crypsceos in ratiocinando idea animo sese insinuet profutura in Logica, ubi theoria syllogismorum crypticorum traditur. Ceterum hanc conclusionem, quam modo intulimus, unica etiam ratiocinatione colligere licet hoc modo: Angulum K in triangulo rectangulo MKL catheti intercipiunt, per hypothesin. Angulus in triangulo rectangulo, quem catheti intercipiunt, rectus est. Ergo angulus K rectus est. Ex eo, quod angulus K rectus sit, per immediatam consequentiam infertur: Cathetum MK cum altero KL efficere rectum. Quodsi hanc conclusionem sumas tanquam præmissam novi syllogismi, vi definitionis lineæ perpendicularis (§. 78 *Geom.*) succurrit principium: Linea recta cum altera efficiens angulum rectum ad eandem perpendicularis est. Unde colligitur: Cathetus MK ad alterum KL perpendicularis est. Quodsi perpendas ex puncto M ad rectam KL ductam esse perpendicularem MK, succurrit vi definitionis 47 (§. 85 *Geom.*) principium: punctum, ex quo perpendicularis ad rectam duci potest, eidem rectæ opponitur; quod scilicet ex definitione, animo obversante per consequentiam immediatam elicitur. Unde infertur: Punctum M catheto trianguli KL opponitur. Jam rectæ KM & LM in puncto M concurrunt ad formandum angulum KML, ut adeo M sit vertex hujus anguli, quod per definitionem 26 (§. 54 *Geom.*) patet, nec demum per ratiocinia distincta elicere lubet. Hoc ubi perpendis, ac præterea ex hypothesi sumis quod KL sit basis trianguli, succurrit definitio 74 (§. 114 *Geom.*): Vertex figuræ est vertex anguli basi oppositus. Unde infertur: Punctum M est vertex figuræ seu trianguli MKL. Recordatus quod MK sit ad KL perpendicularis, per demonstrationem, hoc formas judicium: Cathetus MK est perpendiculum ex vertice trianguli M in basin KL demissum. Quodsi denique huc animum advertis, succurrit principium (§. 227 *Geom*): Perpendiculum ex vertice figuræ in basin ejus demissum est altitudo figuræ. Atque hinc tandem concludis: Cathetum MK esse altitudinem trianguli rectanguli MKL.

§. 60. Quodsi hanc demonstrationem symbolice repræsentare volueris, hoc modo id fieri debere, ex anterioribus abunde liquet.

Hypothesis.	*Thesis.*
MKL △ rectangulum,	MK altitudo,
MK & KL catheti,	
KL basis,	

Demonstratio.

I.

MKL △ rectangulum, *per hypothesin.*

1°. In △ MKL angulus unus rectus

II.
MK & KL catheti △ rectanguli MKL, *per hypoth.*

---

2. Angulus K rectus.

III.
MK cum KL efficit rectum, *per demonstr. num.* 2.

---

3. MK ad KL perpendicularis.

IV.
MK ad KL perpendicularis, *per demonstr. num.* 3.

---

4. M opponitur ipsi KL.

V.
M vertex anguli KML, *quod patet intuitive.*

---

5. M vertex △ MKL

VI.
M vertex △ MKL, *per demonstr. num* 5.
MK perpendicularis ad KL, *per demonstr. num.* 3.
KL basis, *per hypothesin.*
adeoque
MK perpendiculum ex vertice M in basin KL demissum.

MK altitudo △ rectang. MKL.

§. 61. Insunt resolutioni demonstrationis praecedentis, quae attentionem merentur. Nimirum quando per notiones confusas clare perspicimus, quae distincte cognoscenda ratiociniis inferenda, saltum in ratiocinando committimus: qui quando admitti possit citra lapsus periculum, ex resolutione confuse perceptorum in ratiocinia patet. Quodsi integram Arithmeticam & Geometriam eo modo pertractare libuerit, quem praescripsimus & exemplis illustravimus, vix quicquam in theoria Logicae occurret, cui non lux affundatur. Ipsa quoque resolutio demonstrationis corollarii, quam modo in medium attulimus, clarissime docet, cur in definiendo fuerimus prolixiores, quam vulgo fieri solet, & cur multa demonstraverimus principia, quorum nullus in Elementis Geometriae locus esse solet. Etenim, omissis istis definitionibus atque principiis, in demonstrationibus saltus in demonstrando committuntur, nec distinctam hujus notionem consequi datur, ubi nunquam, quae per notiones confusas clara putantur, distinctis ratiociniis inferuntur. Equidem non nego tyronibus initio studii mathematici molestum esse hunc rigorem, immo superfluum videri, propterea quod demonstratione non indigere existimant ea, quae absque demonstratione vera intelliguntur; non tamen hinc sequitur, rigorem istum sua carere utilitate. Quamvis adeo, initio studii mathematici, in gratiam tyronum, ab eo tantisper sit recedendum, in progressu tamen non negligendus. Ea de causa in Elementis Germanicis multa non definivimus, quae in Latinis definiuntur

niuntur; multa ſine demonſtratione ſumimus in illis, quæ in hiſce demonſtrantur. Nec hoc fecimus ſine prægnantibus rationibus, quæ manifeſtæ evadent per ea, quæ capite ſequente dicentur. Non defuere, qui tantum definitionum & principiorum demonſtratorum apparatum improbarunt; immo autores nobis fuere, ut in nova editione reſecaremus, quæ ipſis ſuperflua videbantur, propterea quod evidentes ſint demonſtrationes, abſque illis definitionibus & abſque principiorum iſtorum demonſtrationibus. Enimvero ſi noſtram demonſtrationum reſolutionem viderint & ex ſequentibus conſilium intellexerint, quo id fecimus; non dubitamus fore, ut aliud ſit ipſorum judicium.

§. 62. Probe autem notandum eſt, tum demum demonſtrationes eſſe naturales, ſeu ordinatas, & completas, adeoque conſummatas, quales in Logica requirimus (§. 799, 854, 855 *Log.*), ſi eo modo reſolvantur, quem præſcripſimus, ut plenaria oriatur convictio, nec quicquam quoad evidentiam deſiderari poſſit. Et qui in Pſychologia empirica ſatis fuerit verſatus, ex principiis ibidem traditis, demonſtrabit, tum demum facultatum animæ in cognoſcendo rectum fieri uſum, ubi demonſtrationes eo modo expenduntur, quo eaſdem reſolvere docuimus. Nec minus patebit, in demonſtrando tum eum fieri facultatum cognoſcendi uſum, quem in communi cogitationum ſeſe mutuo excipientium ſerie obſervamus.

§. 63. Nos in Elementis noſtris demonſtrationes eo ordine digeſſimus, ut in ratiocinia ex hypotheſi & ſuperaccedente præparatione, ſi quando opus eſt, deducta & inter ſe concatenata facile reſolvi poſſint. Etenim concluſiones eo ordine ſeſe invicem excipiunt, quæ in repræſentatione ſymbolica exhibentur, & iis adjiciuntur citationes, quibus inſinuantur principia, quæ in reſolutione commemorantur. Sumuntur etiam, ex hypotheſi &, in demonſtrationibus problematum, ex conſtructione unde infertur concluſio, immo etiam ex demonſtratis, concluſiones; niſi immediate ingrediantur ratiocinium proxime ſequens, ut eandem bis poni inconſultum foret. Saltus ſi quos admittimus, quemadmodum in corollario, quod exempli loco modo adduximus, tales ſunt, ut, niſi acutior fueris in demonſtrando, eos non animadvertas, quod oculis in ſchema converſis per ſe clara videntur; veluti quod M ſit vertex trianguli, quod MK & KL intercipiant rectum K. Nullum vero in demonſtrationibus noſtris deprehendes hiatum, ut omitterentur quædam, quæ ad formanda ratiocinia ſunt neceſſaria, & ſine quibus ſingula, quæ ad demonſtrationem requiruntur, formari nequeunt: qui ipſe hiatus demonſtrationem reddit incom-

pletam (§. 854 *Log.*). Enimvero exactam hanc formam logicam naturæ animæ convenientem, quemadmodum ex Psychologia constat, demonstrationibus vulgo non tribuunt autores: unde eadem facilitate non resolvuntur in ratiocinia, ex quibus constant, nec symbolice eo modo absque difficultate repræsentantur, quo nos easdem exhibere docuimus. Quamobrem, ex nostris quoque Elementis, Mathesis minore studio atque minore temporis intervallo addisci potest, quam ex aliorum scriptis; & si qua sphalmata, vel typographi incuria, vel festinante scribentis calamo, irrepsere, ea attentione adhibita haud difficulter corriguntur.

§. 64. Vulgo demonstrationes non eo modo expenduntur, quo nos eas resolvere docuimus. Immo ipse, cum Mathesi addiscendæ operam darem, aliam viam ingressus sum, donec tandem studium philosophicum cum mathematico conjungens & in rationem evidentiæ anxius inquirens, in veram inciderem. Nimirum vulgo animum primo convertimus in conclusionem quam contextus suggerit, & deinde inquiritur in rationem, cur ea tanquam vera sit admittenda, quæ vel ex hypothesi, vel ex definitione, aut propositione quadam anteriore petita, & cum schemate oculis subjecto collata, attento vim consequentiæ confuse percipiendam exhibet, nullo ratiocinio distincte formato. Ex. gr. Si quis demonstrationem theorematis 6 (§. 156 *Geom.*) expendere voluerit, is conclusiones $x+y$ & $y+o=180$ confert cum figura, ut intelligat, quid affirmetur. Tab. I. Fig. 9. Quærit deinde, cur hæc propositio sit vera; & §. 148, qui citatur, evolvens, ubi legit angulos deinceps positos junctim sumtos conficere 180 grad., recurrit ad figuram, ex qua ubi confuse percipit, angulos y & x, itemque o & y esse deinceps positos, duas istas conclusiones admittit tanquam veras. Deinde recordatur, quod demonstrandum sit, angulos o & x esse æquales, hanc conclusionem cum illis confert, oculis in figuram conjectis. Et ubi videt, eos relinqui, si angulus communis y auferatur, theorematis veritatem admittit; cur hoc faciat quæsitus, respondens, quia ab æqualibus idem aufertur, seu particulariter, quia angulus communis y aufertur; axioma istud, quod eodem ab æqualibus ablato æqualia relinquantur, nonnisi confuse sibi repræsentans. Unde audias alios respondentes, hoc per se patere. Solenne enim est hominibus, ut per se liquere dicant id, quod per confusas perceptiones verum apparet, cur vero verum sit rationem reddere nequeunt. Admittuntur hinc saltus & hiatus in demonstrando, quæ, initio studii mathematici, subinde haud parum obstant evidentiæ ad plenariam convictionem requisitæ, antequam con-

fusis

fusis istis ratiocinationibus adsuescas, ut familiaritas suppleat defectum evidentiæ.

§. 65. Quid intersit discriminis inter nostram demonstrationum resolutionem, & communem eas expendendi morem; in seipso experietur, qui initio studii mathematici utramque viam ingreditur. Magis autem idem animadvertet, ubi in philosophia nostra versatus, utrumque modum expendendi demonstrationes inter se confert. Quam diversi autem sint fructus, quos hinc percipere datur, ex capite sequente elucescet. Dicta igitur de secundo cognitionis gradu acquirendo sufficiant.

§. 66. Restat ut dicamus de tertio cognitionis gradu, quomodo ad eum perveniatur, quantum hic datur. Tertius cognitionis gradus in eo consistit, ut ex iis, quæ cognovimus, alia adhuc nobis incognita proprio marte eruere valeamus (§. 1). Si quis demonstrationes nostra methodo resolvit; is modum colligendi ex assumtis quæsitum, continuo ratiociniorum nexu, inde perspicit (§. 38, 41, 47, 52, 54, 59). Quodsi ergo habitum resolvendi demonstrationes præscripto modo sibi comparaverit; habitu ratiocinandi pollet, quo in veritatibus sibi adhuc incognitis eruendis opus habet. Quamobrem ista demonstrationum resolutio maximopere quoque commendanda est, in usum tertii cognitionis gradus; ita ut ad tertium appropinquemus, dum secundo acquirendo studemus. Et qui ad tertium cognitionis gradum adspirat, is multus esse debet in demonstrationibus resolvendis; cum omnis habitus non modo acquiratur, verum etiam perficiatur, augeatur, & conservetur continuo exercitio (§. 430, 431 *Psych. empir.*). Quamobrem cui tertius cognitionis gradus curæ cordique est, is acquiescere non debet in Elementis Arithmeticæ & Geometriæ, sed ad alias quoque Matheseos partes progredi tenetur.

§. 67. Si ex assumtis ratiocinando, colligendum est quod in thesi continetur; ipsa resolutio demonstrationis, præscripto modo facta, loquitur, non opus esse ut hoc tanquam cognitum præsupponatur. Quamobrem, sub generali tantummodo determinatione supponi potest tanquam quærendum. Unde theoremata convertere licet in problemata, quæ, sub data in hypothesi conditione, investigari jubent, quod thesis continet. Ita theorema de æqualitate angulorum verticalium (§. 38) in hoc convertitur problema: Invenire rationem angulorum verticalium ex intersectione duarum linearum rectarum prodeuntium. Similiter theorema de congruentia triangulorum angulum æqualem cruribus æqualibus comprehensum habentium (§. 40) in sequens abit problema: Invenire rationem triangulo-

rum angulum unum æqualem æqualibus cruribus comprehensum habentium; & rationem, quam habent anguli duo reliqui unius ad duos reliquos alterius sigillatim; necnon latus tertium unius ad latus tertium alterius. Theorema arithmeticum, de quotis, ex divisione duarum quantitatum per eandem tertiam resultantibus, quantitatibus divisis proportionalibus (§. 47) in hoc problema transmutatur: Invenire rationem quotorum, qui prodeunt, si duæ quantitates per eandem tertiam dividuntur. Denique corollarium, quod, catheto uno trianguli rectanguli sumto pro basi, cathetus alter sit altitudo (§. 59) ad problema redigitur hoc modo: sumto catheto uno trianguli rectanguli pro basi; invenire, aut determinare altitudinem ipsius. Discere hinc licet, quomodo quod jam inventum est spectetur ut adhuc inveniendum, & instar problematis proponatur ad exercendam artem inveniendi. Sane omnia theoremata, non modo in Arithmetica atque Geometria, verum etiam in omni Mathesi reliqua, hoc modo ad problemata rediguntur, quæ tanquam inveniendum proponunt, quod jam cognitum est, dum exercitii gratia tanquam adhuc incognitum supponitur.

§. 68. Quodsi theoremata ad formam problematum fuerint reducta, quibus aliquid inveniendum proponitur; data a quæsitis sunt distinguenda. Quoniam in hac conversione aut, si mavis, reductione; quæ in hypothesi continentur, sumuntur tanquam data; quod vero in thesi continetur, sub determinatione quadam generali, exhibet quæsitum; data & quæsita eodem prorsus modo a se invicem distinguuntur, quo superius thesin ab hypothesi separavimus. Ita, in exemplo primo angulorum verticalium, dari supponimus duas lineas sese mutuo intersecantes, ex quarum intersectione necessario oriuntur anguli verticales; quæritur autem, quænam sit horum angulorum ratio ad se invicem. In thesi theorematis, determinatur ratio, quæ inter eos intercedit, nimirum quod sit ratio æqualitatis. Ast hic qualis ea sit, ignotum supponitur & investigari jubetur. In exemplo secundo de congruentia triangulorum, datur in duobus triangulis ratio, quam habet angulus unus unius a ad unum alterius A, ratio crurum ab ad AB & ac ad AC, nempe quod ubivis sit ratio æqualitatis, seu a=A, ab=AB & ac=AC: quæritur autem ratio lateris tertii ab ad AB, anguli b ad B, anguli c ad C & totius trianguli acb ad totum ACB. Immo quæri etiam potest, utrum triangulum acb sit simile, an dissimile triangulo ACB. In thesi theorematis, denuo determinatur ratio horum omnium ad se invicem, qualis sit; scilicet quod sit ratio æqualitatis, seu bc=BC, b=B, c=C & $\triangle\, acb = \triangle$ ACB. Hic Tab. I. Fig. 6.

vero

vero eadem tanquam ignota supponitur & investigari jubetur. In exemplo tertio, quod arithmeticum est, dantur duæ quantitates, datur quantitas tertia, per quam istæ dividendæ, ut duo prodeant quoti; quæritur ratio, quam habent quoti hi ad se invicem. In thesi theorematis eadem determinatur, nimirum quod eadem sit cum ratione quantitatum divisarum; sed hic tanquam ignota supponitur & investigari jubetur. Denique in exemplo quarto, datur species trianguli MKL, nimirum quod sit rectangulum, datur etiam basis, scilicet quod ea sit cathetus KL; determinari jubetur altitudo. In theoremate seu corollario, quod in problema conversum fuit, altitudo determinatur, nimirum quod ea sit cathetus alter MK: hic vero demum quæritur. Videmus adeo, quomodo data a quæsitis distinguantur.

§. *69*. Enimvero non sine ratione data a quæsitis discernuntur. Cum enim id, quod quæritur, per ea quæ dantur, determinetur; ex datis ratiocinando colligendum est quæsitum. Facimus hoc, dum demonstrationem nostro more resolvimus; neque enim in omni ratiocinatione supponitur tanquam cognitum, quod inde tandem colligitur, quando ratiocinatio finitur. Quamobrem patet, ad inveniendum quod quæritur, non aliud requiri, quam ut modo præscripto ratiocinemur. Nostræ igitur resolutiones demonstrationum totæ analyticæ sunt; ostendentes modum, quo ex datis colligitur quæsitum, seu ratiocinando pervenitur ad id, quod investigandum erat. Eædem adeo non minus ad tertium cognitionis gradum ducunt, quam ad secundum: id quod non obtinet, ubi communi more demonstrationes expenduntur (§. *64*). Insigne hic patet discrimen, quod inter nostras demonstrationum resolutiones, & communem eas expendendi modum intercedit; tanti æstimandum, quanto præstantior est gradus cognitionis tertius, quam secundus. Velim huc animum advertant illi, quibus nostræ demonstrationum resolutiones superfluæ, aut prorsus pueriles videntur. Quodsi exemplum Mathematicorum præclarorum obvertere volueris, qui ad artem eximia inveniendi pervenerunt absque ista demonstrationum resolutione; hoc parum nos movebit. Objectionem enim esse nullam capite sequente ostendemus. Absit itaque ut hoc exemplo ab ista, quam commendavimus, demonstrationum resolutione te deterreri patiaris.

§. 70. Ex iis, quæ diximus & per anteriora satis manifesta sunt, liquet, quantum fallantur, qui sibi aliisque persuadere conantur, quod demonstrationes syntheticæ, quales sunt EUCLIDIS, atque Geometrarum veterum, non simul sint analyticæ; consequenter veritates eodem modo

modo ab ipsis reperiri non potuerint, quo demonstrantur. Etenim, si ex assumtis legitime ratiocineris, quemadmodum fieri debere ex principiis Psychologiæ empiricæ demonstrari potest; eodem prorsus modo colligitur quod ignotum est, & ad investigandum proponitur, quo, quod jam notum est, demonstratur. Dedimus fidem oculatam, quæ in suspicionem adduci minime potest. Memini me olim, cum in Academia Lipsiensi Mathesin atque Philosophiam docerem, antequam ad Professionem Mathematum in Academia Halensi vocarer, Artem inveniendi juxta regulas Dn. DE TSCHIRNHAUSEN in *Medicina mentis* explicatam, per exempla exerciturus, Geometriam elementarem ea methodo pertractasse, ut theoremata ad problemata revocarem, & quomodo ex assumtis in hypothesi, tanquam datis, eruatur quod in thesi continetur, tanquam quæsitum, ostenderem, ipsaque problemata tanquam nondum soluta, sed adhuc solvenda proponerem, idemque imitarer in Arithmetica. Unde contigit in Elementis Germanicis Arithmeticam practicam a me pertractari methodo vere analytica; ut ex unica notione numeri rationalis, qui juxta definitionem EUCLIDIS, sistitur tanquam unitatum multitudo, nimirum, juxta methodum geneticam, tanquam ortus ex continua unitatis additione, integram Arithmeticam practicam deduxerim, tyronum captui accommodato modo: quod tantisper attenti facile animadvertent; iis autem satis superque perspectum est, qui me eandem explicantem audiverunt. Dedimus etiam hinc inde specimina quædam in his ipsis Elementis Latinis, veluti ubi de extractione radicum, & numeris æque-differentibus agitur.

§. 71. Ex resolutione demonstrationum præscripto modo facta, præterea videre est, singula ratiocinia, quibus colligitur quod demonstrandum erat, aut, ubi theorema in problema mutatur, quod investigandum fuerat, supponere aliquam definitionem, vel propositionem jam cognitam, quæ, vel ope ejus quod assumitur, seu datur, vel auxilio conclusionum jam elicitarum, in memoriam revocatur. Patet etiam ne unicum quidem ratiocinium abesse posse, siquidem ex assumtis inferendum, quod demonstrandum, vel ex datis deducendum, quod investigandum erat. Etsi enim non omnes ratiocinia distincte expendant: in confusis tamen ipsorum notionibus, quæ animo obversantur, actu continentur. Quælibet adeo veritas latens, ubi in apricum producenda, certas veritates cognitas supponit, quarum si vel una ignoratur, ut quæsitam invenias fieri nequit. Quo plures igitur veritates, hoc est, definitiones & propositiones, tibi perspectæ fuerint, eo plures quoque invenire poteris; cum abun-

abundes principiis, quibus ad ratiocinandum indiges, ex datis inventurus quæsitum. Quamobrem dum secundo cognitionis gradui acquirendo studes, ad tertium quoque acquirendum te præparas, immo aptum reddis. Qui inoffenso pede, in detegenda veritate latente ex iis quæ dantur, progredi voluerit; ei principia, quibus ad ratiocinandum opus habet, familiaria esse debent; ut ea, veluti sponte sua memoriam subeant, quoties eorum usus requiritur. Definitiones itaque, & propositiones, in quarum etiam numerum referuntur resolutiones problematum, cum eo quod fieri jubetur in theorema conversæ, memoriæ firmiter infigendæ sunt ei, qui ad tertium cognitionis gradum adspirat; ut multus esse debeas in acquirendo gradu primo, antequam ad tertium properes; nisi quod expediat ea, quæ demonstrationum vi tanquam vera assecutus es, tanquam invenienda tibi proponi (§. 67): ita enim tanto facilius & absque ulla molestia, immo potius cum insigni voluptate, memoriæ mandabis, quæ eidem firmiter inhærere debent, ac una cum gradu secundo tertium acquires.

§. 72. Demonstrationes etiam mechanicæ ad tertium cognitionis gradum ducunt; quatenus tentando manifestant incognitum (§. 32): quibus cum æquipolleant exempla in numeris (§. 35), horum etiam usus est in tertio cognitionis gradu comparando. Quoniam tamen demonstrationes mechanicæ, perinde ac exempla (§. *cit.*), veritatem conspiciendam non præbent, nisi in casu singulari, aut ad summum in particulari (§. 33); in iis non acquiescendum, ne cum periculo errandi a singulari ad universale argumenteris. Quamobrem propositio in casu singulari, vel particulari, detecta sumi debet tanquam universalis, & in problema convertenda; ac deinde inquirendum, num, ex datis legitime ratiocinando, universaliter erui possit, quod in casu singulari, vel particulari, verum cognovisti. Ita constat olim PYTHAGORAM animadvertisse, si quadratum numeri 3, quod est 9, addatur quadrato numeri 4, quod est 16, summam 25 exhibere quadratum numeri 5. Quamobrem cum perpenderet, si latus unum trianguli rectanguli fiat trium, alterum vero quatuor partium, hypothenusam esse partium quinque; consequenter quadratum hypothenusæ æquale esse quadratis reliquorum laterum; suspicio ipsi enata est, num hæc sit proprietas trianguli rectanguli, ut quadratum hypothenusæ sit æquale quadratis laterum simul sumtis. Non diffiteor levem admodum hanc esse suspicionem, si secundum regulas probabilitatis æstimetur; sed levis etiam suspicio ad investigandum verum invitat. Quamobrem ubi super trianguli rectanguli lateribus fuere constructa quadrata, superacceden-

cedente præparatione ad comparationem quadrati hypothenusæ cum quadratis reliquorum laterum requisita, eo modo detegi poterat veritas, quo theorema istud demonstravimus (§. 417 *Geom.)*. Dico veritatem theorematis hoc modo detegi potuisse: cum enim constet, ipsum non uno modo demonstrari posse, & demonstrationem unamquamque, nostro more resolutam, monstrare modum ad veritatem liquidam perveniendi (§. 70), non una patebat ad eandem via. Demonstrationes itaque mechanicæ, si tanquam artificium heuristicum adhibeantur, haud raro faciunt, ut de problemate quodam cogites, cujus cogitatio alias animum non subiret.

Tab. I. Fig. 9. §. 73. Exempla, quæ in superioribus dedimus, dicta confirmant. Ita si ducas lineas AB & CD se mutuo secantes in E, ut prodeant anguli verticales *o* & *x*; ac, vi demonstrationis mechanicæ, eorum æqualitatem deprehendas (§. 32); ubi porro sumis æqualitatem angulorum verticalium tanquam universaliter veram, & hoc theorema in problema convertis (§. 67), eodem modo eruetur veritas in omni casu, quo theorema hoc demonstrandum esse ostendimus (§. 38, 70). Similiter si construas triangulum quodcunque ACB, & deinde alterum *acb*, ea conditione, ut fiat $ab = AB$, angulus $a = A$, & $ac = AC$; atque triangulo *acb* exciso ex charta, in qua delineatum fuerat, ita ponas super altero ACB, ut punctum *a* in A, & latus *ab* in AB cadat; atque videas, triangulum *acb* esse alteri ACB æquale, & esse præterea $bc = BC$, $c = C$, atque $b = B$; ubi hoc sumis tanquam universaliter verum, & theorema in problema convertis (§. 67), eodem prorsus modo ratiocinando assequeris, quod quæritur, quo theorema demonstrandum esse supra præcepimus (§. 41, 70). Me tacente patebit, quomodo eadem valeant de exemplo, quod in numeris exhibet theorema, de quotis, ex divisione duorum numerorum per eundem tertium resultantibus, numeris divisis proportionalibus; ut plura eam in rem dici non sit opus. Obiter observo, demonstrationem mechanicam de congruentia triangulorum, ubi ad notionem congruentiæ animum advertis, simul insinuare principia, quibus opus est ad ratiocinandum, sive in demonstratione synthetica, sive in investigatione ejus, quod quæritur; ut adeo idea confusa, quæ oculis obversatur, integram demonstrationem contineat, ab ea abstrahendam, si ad notionem distinctam revocetur. Immo notionem theoremati respondentem esse universalem agnoscimus, si in rationem coincidentiæ eorum, quæ in triangulis discernuntur, inquirimus; quatenus patet eandem rationem redire in quolibet casu. Coincidit hic demonstratio mechanica cum exemplis, quibus universaliter

Tab. I. Fig. 6.

faliter* repræfentavimus numerorum quadratorum & cubicorum genefin (§. 262, 266, 277, 280 *Arithm.*). Ex. gr. in exemplo numerico, 16 quadratum numeri 4, quæ eft pars fecunda radicis, prodit, quia 4 ducitur in feipfum (§. 246 *Arithm.*). Idem vero cum fiat in quocunque exemplo alio, eadem quoque femper adeft ratio, cur quadratum partis fecundæ prodire debeat. Similiter in exemplo geometrico, punctum *b* cadit in B, quia *a* ponitur fuper A, & *ab* fuper AB, eftque *ab*=AB. Singula vero cum eodem modo fefe habeant in exemplo quocunque alio, eadem femper adeft ratio, cur punctum *b* in B cadere debeat. Principium nimirum ontologicum eft, quod pofita ratione fufficiente ponatur etiam id, quod propter eam potius eft quam non eft (§. 118 *Ontol.*): quod principium in Arte inveniendi multum habet ufum.

§. 74. Conftat ex fuperioribus (§. 40), hypothefin folam non femper fufficere, ut inde colligatur, quod erat demonftrandum; fed prætcrea accedere debere præparationem, qua fuperadduntur iis, quæ in hypothefi fumuntur, adhuc alia, eadem non invita fumenda, ut ex fumtis colligi poffit, quod thefis continet. Quoniam theorematis in problemata converfis, quibus inveftigandum proponitur, quod thefis infinuat (§. 67); ratiocinatio, ex affumtis tanquam datis, eodem modo cedit ad colligendum quæfitum, quo, in refolutione demonftrationis præfcripto modo facta, colligitur quod demonftrandum erat (§. 70); facile intelligitur, præparatione eadem non minus opus effe in veritate inveftiganda, quam in jam inventa demonftranda. Quando præparatione opus fit, quivis animadvertit; nimirum, quando animum advertens ad affumta, deprehendit deeffe principia, quorum vi ex iis elicitur conclufio una, vel plures eliciuntur, prout cafus tulerit. Hic itaque difpiciendum num, præter ea quæ hypothefis continet tanquam determinantia id quod thefi continetur, fumi adhuc poffint alia iftis minime repugnantia; quibus accedentibus, hypothefis apta efficitur ad conclufiones, vi principiorum anteriorum, inde inferendas. In demonftrationibus præparatio ifta non demum quærenda; fed Autor, qui theorema demonftrat, eam fuppeditat. Aft ubi theorema per modum problematis proponitur; præparatio non tanquam cognita fpectari poteft, fed adhuc incognita fupponitur; non tanquam jam inventa confideranda venit, fed tanquam quærenda fpectatur. Ad tertium igitur cognitionis gradum adfpirans inquirere tenetur, quomodo præparatio innotefcere potuerit. In exemplo de triangulis, angulum æqualem æqualibus cruribus comprehenfum habentibus, conftat, datis cruribus cum angulo intercepto, conftrui poffe

triangulum; consequenter per crura data & angulum interceptum datum triangulum, non minus integrum, quam latus ejus tertium, eidemque adjacentes duos angulos reliquos determinari; adeoque in hypothesi nihil eorum deficere, quæ assumenda sunt, ut inde colligi queant, quæ per ea determinantur. Quoniam vero quæritur triangulorum ratio, ratio lateris tertii unius ad tertium alterius, & ratio angulorum ad idem adjacentium in uno ad angulos eidem adjacentes in altero sigillatim; ratio vero omnis vel æqualitatis vel inæqualitatis est (§. 130 *Arith.*); per modum hypotheseos tantisper sumitur, rationem æqualitatis hic obtineri. Hæc hypothesis cum examinanda sit, utrum veritati consentanea sit, nec ne; quæritur quomodo æqualitas innotescat. Quamobrem, cum, juxta notionem communem, æqualitas æstimetur ex congruentia, notio congruentiæ insinuat triangulum unum super altero poni debere. Atque adeo in præparationem incidimus. Vides adeo, quomodo notiones communes insinuare queant præparationem: id quod tamen non semper procedit, cum non omnia ex notionibus communibus immediate deduci possint.

§. 75. Quoniam tamen, per naturam animæ impossibile est, ut quicquam nobis in mentum veniat, nisi quatenus antea cognita, beneficio eorum quæ nunc cogitamus, vel in memoriam revocantur, vel ratiocinationem ingrediuntur; quæ ex notionibus communibus immediate deduci nequeunt, ex aliis utique notionibus derivanda. Quamobrem ut hoc appareat, sumamus exemplum alterum, quo usi sumus in superioribus (§. 54) in demonstratione problematis, de invenienda media proportionali inter duas rectas datas, in hoc theorema conversi: Si ex quocunque puncto diametri excitetur perpendicularis peripheriæ circuli occurrens, erit ea inter segmenta diametri perpendicularis. Patet hic demonstrandam esse proportionem linearum AB, BD & BE ex eo, quod BD sit ad AE perpendicularis & ADE semicirculus. Tab. I. Fig. 10. Quamobrem cum constet, triangula similia habere latera æqualibus angulis opposita proportionalia; consequenter linearum proportionem ex triangulorum similitudine colligi posse; ideo liquet, dispiciendum esse, annon lineis quibusdam ductis, ut prodeant triangula, obtineri possint triangula similia. Ducuntur itaque subtensæ arcuum AD & DE; quia sic prodeunt triangula ADB, ADE & DBE, quæ, per modum hypotheseos, sumuntur tanquam similia, ab eo qui veritatem demum investigat; & deinde experimur, num eorum similitudo demonstrari possit; consequenter num hæc bene sumta fuerit. Quodsi modum, quo in hanc præparationem incidis, distincte perpendis; evidens est, id quod demon-

stran-

ſtrandum eſt ad animum revocare ſimilitudinem triangulorum, cujus notionem antea tibi acquiſiviſti; & ex hypotheſi theorematis patet, ductis rectis AD & DE, obtineri triangula, quæ utrum ſimilia ſint, nec ne, angulos eorum inter ſe conferenti innoteſcit; cum ex anterioribus conſtet, triangulorum ſimilitudinem ab æqualitate angulorum pendere; conſequenter per eandem probari. Nimirum in inveniendo conjecturis locus eſt; ubi ex iis, quæ dantur, vi principiorum tibi perſpectorum, ratiocinando colligi nequit quod quæritur; quemadmodum in demonſtranda æqualitate angulorum verticalium ſuccedit (§. 38). Cum vero conjectando, nonniſi caſu, prima ſtatim vice incidamus in veritatem; ideo haud raro variis modis tentanda eſt præparatio, antequam in eam incidas, quæ recta eſt: id quod ſatis experiuntur, qui veritati proprio marte eruendæ operam navant. Enimvero de iis hic dicere diſertius, quæ ad Artem inveniendi ſpectant, noſtri non eſt inſtituti, ubi tantummodi docemus, quomodo ad præparationem pervenire potuerint, qui bene poſitam retinuerunt. Bene autem poſitas eſſe eas, quæ in demonſtrationibus adhibentur, ipſe ſucceſſus in demonſtrando probat. Non tamen exiſtimandum eſt, quaſi earundem inventores prima ſtatim vice in eas inciderint, quemadmodum exemplum modo datum inſinuare videtur; ſed potius tenendum, tentatis haud raro pluribus ſine ſucceſſu, eam retentam fuiſſe, quam ſucceſſus approbabat. Sed talia, ſuo tempore, demonſtraturi ſumus a priori, ex ipſa animæ natura, in Arte inveniendi; ſi quidem Deo viſum fuerit corporis animique vires eo uſque conſervare, donec ad hanc telam pertexendam ordo nos deducet.

§. 76. Hic non aliud agendum eſt, quam ut oſtendamus, quomodo inquiramus in modum, quo ad præparationes in Elementis noſtris occurrentes perveniri licuerit; reddendo rationem, cur hoc modo fiat, tum ex conditione propoſitionis demonſtrandæ, tum ex anterioribus, quæ tanquam cognita & nobis familiaria ſupponuntur. Quodſi ergo, ad imitationem eorum quæ, exempli loco, in medium attulimus (§. 74, 75), præparationes omnes in Elementis noſtris expendere libuerit; nulli dubitamus lucem affulſuram ſufficientem iis, qui ad tertium cognitionis gradum adſpirant. Quibus vero in ſecundo acquieſcere viſum eſt, illi hac diſquiſitione non habent opus, huicque labori ſuperſedere poſſunt ac debent. Sufficit enim iis præparatione, prouti præſcribitur, ad hypotheſin accedente, demonſtrationem legitime procedere, qua animus convincitur verum eſſe, quod erat demonſtrandum.

§. 77. Illud adhuc ſupereſt, ut doceamus, quomodo procedendum ſit, ſi reſolutionem problematis ſuppo-

nis tanquam incognitam, adeoque eandem consideras tanquam inveniendam. Ex hac enim hypothesi, perinde ac in theorematis, vi anteriorum ratiocinando, colligendum, quid fieri debeat, ut facias, quod erat faciendum. Sumamus exempli loco problema de linea recta per datum punctum alteri rectæ parallela ducenda. Supponamus factum, quod petebatur; nimirum rectam MN, quæ per datum punctum V transit, alteri RS, quæ data supponitur, esse parallelam. Quodsi hoc sumis; ex anterioribus succurrit: perpendicula inter duas parallelas intercepta æqualia esse (§. 226 *Geom.*). Unde infertur: duo quæcunque perpendicula inter rectas MN & RS æqualia sunt. Porro constat, quod V sit punctum extra lineam RS datum. Huc animum advertenti succurrit (§. 216 *Geom.*), a dato puncto extra lineam datam perpendicularem demitti posse. Unde infertur, posse quoque ex puncto V ad rectam RS demitti perpendicularem, nempe VK. Succurrit porro, ubi perpendis duas requiri lineas perpendiculares inter rectas MN & RS, ut per earum æqualitatem pateat parallelismus ipsarum, per demonstrata, ex quovis puncto intra rectam datam assumto erigi posse perpendicularem (§. 212 *Geom.*). Unde denuo infertur, ex puncto quocunque lineæ RS, veluti T, erigi posse perpendicularem TA. Jam, quia MN supponitur ipsi RS

Tab. I. Fig. 7.

parallela, & VK atque TA sunt perpendicula inter hasce parallelas intercepta, adeoque æqualia, per demonstrata; resolutio, quæ quærebatur, jam patet. Nimirum 1°. ex puncto dato V demittenda est perpendicularis VK ad rectam RS: 2°. ex puncto quolibet T erigenda est perpendicularis TA priori æqualis: 3°. per duo puncta A & V ducenda est recta MN. Hæc ipsa est resolutio, quæ in Elementis nostris legitur (§. 258 *Geom.*).

§. 78. Patet autem, si hoc modo in resolutionem problematis inquiris; hinc simul modum problema in theorema conversum demonstrandi manifestum esse. In ea enim investiganda uteris principiis, quibus in demonstrando habes opus: id quod ex collatione eorum, quæ modo dicta sunt, cum resolutione demonstrationis superius facta (§. 52) patet. Demonstrationes nimirum, una cum resolutione, una eademque opera deteguntur; ut adeo non opus sit, nisi ut, ubi synthetice proponere volueris quæ invenisti, ea, quæ faciunt ad resolutionem, separes a ceteris, quæ ad demonstrationem spectant. Subinde tamen etiam in Elementis nostris resolutionem & demonstrationem una exhibuimus; quemadmodum in hoc ipso casu factum, quem exempli loco produximus; & in aliis, ubi prolixior est demonstratio, veluti in problematis de extrahenda radice quadrata & cubica (§. 269, 282. *Arithm.*).

§. 79.

§. 79. Demus adhuc exemplum aliud. Supponatur itaque resolutio problematis 16 (§. 212 *Geom.*) de linea perpendiculari, ex dato in recta data puncto, excitanda. Data sit recta ML, & in eo detur punctum G; ex hoc puncto G ducenda est linea, quæ sit ad rectam ML perpendicularis. Ponatur factum, quod petebatur, nempe ducta perpendicularis GI. Succurrit ex anterioribus: Si linea recta ducenda, duo dari debent puncta, ex quorum uno ad alterum ducitur recta (§. 121 *Geom.*). Unde infertur: Præter punctum G, quod datur, determinandum esse adhuc punctum aliud I, ut recta GI duci possit. Liquet igitur, totum negotium in eo versari, ut punctum I determinetur. Ponamus denuo hoc esse factum. Sumitur itaque: Recta ex puncto I ad punctum G ducta perpendicularis est. Succurrit principium: Si recta quædam fuerit ad alteram perpendicularis, anguli deinceps positi æquales sunt (§. 79 *Geom.*). Unde infertur: Anguli MGI & IGL æquales sunt. Sumatur IG pro crure triangulorum contiguorum communi. Patet triangula ista habere angulum unum æqualem &, crus unum ejus esse æquale, nempe idem. Succurrit ex anterioribus principium (§. 179 *Geom.*): Si duo triangula habuerint angulum unum æqualem duobus cruribus sigillatim æqualibus comprehensum, etiam latus tertium unius æquale erit lateri tertio alterius. Atque hinc infertur: Si præterea fiat GK=GH, erit etiam KI=HI. Atque adeo liquet, si fiat GK=GH, hoc est, si ex puncto H capiatur utrinque æquale intervallum, ex punctis K & H eodem intervallo quocunque alio (cum hic longitudinis GI nulla habenda sit ratio, sed tantummodo situs ad rectam ML) per intersectionem determinari posse punctum I, quod quærebatur, ut recta IG duci possit. Denuo manifestum est, resolutionem problematis analyticam simul continere & ejus demonstrationem. Quodsi unam ab altera separes, utraque prodibit, qualis in Elementis nostris extat. Obiter moneo, inter principia heuristica in Geometrica referendum esse, ut dispiciamus, num triangula congruentia & similia determinari possint, quorum ope procedat ratiocinatio ad investigandum quod quæritur, vel demonstrandum quod asseritur requisita. Quomodo in hoc principium inciderint Geometræ, nostrum jam non est disquirere. Erit alibi de eo dicendi locus.

Tab. I. Fig. 12.

§. 80. Subinde resolutiones problematum innotescunt sola attentione ad theoremata inventa, ad quas nulla patet via, si hæc tanquam incognita supponuntur. Istiusmodi est problema de invenienda linea media proportionali inter duas datas. Etenim si supponimus lineam BD esse inventam, quæ inter duas datas AB & BE media proportionalis est, succurrit

Tab. I. Fig. 10. currit tantummodo vi definitionis (§. 155. *Arithm.*): Si fuerint tres lineæ continue proportionales, erit prima ad secundam, ut secunda ad tertiam. Atque hinc infertur: Recta data AB est ad inveniendam BD ut hæc ipsa BD ad alteram datam BE. Etsi hic ad similitudinem triangulorum tanquam principium heuristicum confugias; & sumas BD esse crus commune duorum triangulorum similium ABD & BDE, videasque, si BD fuerit ad AE perpendicularis, angulum *x* angulo *y* æqualem construi debere, quod etiam fieri posse constat (§. 208 *Geom.*); quoniam tamen BD determinatæ magnitudinis est, non constat, quantus fieri debeat angulus *x*, ut recta AD attingat punctum D, quod quæritur, atque ita determinandum, ut crus anguli *x* secet AE in puncto E. Nihil itaque conficies, nisi supponas theorema tanquam cognitum: Si ex puncto quocunque B diametri AE erigatur perpendicularis peripheriæ in puncto D occurrens; erit ea inter segmenta diametri AB & EB media proportionalis. Ubi vero hoc theorema tanquam notum sumitur, resolutio problematis, de invenienda recta inter duas alias datas media proportionali, sua quasi sponte sese offert. Etenim non multa attentione opus est, ut animadvertas rectas datas AB & BE in eandem rectam transferri, & super eadem semicirculum describi posse; infertur vi corollarii theorematis primi (§. 136 *Geom.*). Neque ullum est dubium, quin inventori resolutionis hujus problematis ante innotuerit theorema istud, quam de resolutione cogitaret. Non est quod excipias, nos theorema istud non præmisisse in Elementis nostris problemati huic. Etenim si ita visum fuisset, præmitti poterat: sed in synthesi non necessarium erat. Dum enim demonstranda est resolutio, problema in istud theorema convertitur, atque demonstratio ejus adjicitur, quemadmodum ex superioribus constat (§. 54, 55). Non nego fieri quoque potuisse, ut resolutio eadem deduceretur ex aliqua proprietate trianguli rectanguli, scilicet ex hoc theoremate: Si ex angulo recto D trianguli rectanguli ADE demittatur ad hypothenusam AE perpendicularis DB; erit hæc ipsa DB media proportionalis inter hypothenusæ AE segmenta AB & BE. Quodsi enim supponas tanquam notum, quomodo super data hypothenusa construi possit triangulum rectangulum: resolutio problematis nostri non minus in aprico est. Plures haud raro patent viæ ad eandem veritatem, & prouti vel hæc, vel alia principia, tanquam cognita supponuntur, unus hanc, alius aliam calcat viam. Mihi tamen probabilius est, ex proprietate circuli potius, quam trianguli rectanguli, resolutionem de qua nobis sermo est fuisse deductam. Enimvero non opus est, ut ea de

de re contentionis serram cum aliis reciprocemus. Ubi enim veritates tanquam quærendæ proponuntur, quæ jam inventæ sunt, sufficit ingredi viam, qua recto facultatum cognoscendi usu ad eas pervenire datur.

§. 81. Dantur integræ disciplinæ mathematicæ, quas inter Algebra eminet, aut, si mavis, Analysis mathematica, quibus docetur, quomodo veritates mathematicæ sint inveniendæ. Nemo non intelligit, ad tertium gradum cognitionis mathematicæ adspiranti inprimis opus esse, ut in iis addiscendis assiduus sit. Enimvero ea de re nobis demum dicendum erit, ubi ad specialia descendemus. Hic enim nonnisi generalia tradimus, quæ in qualibet Matheseos parte observanda sunt; etsi tantummodo exempla ex Arithmetica & Geometria dederimus.

§. 82. Restat denique ut adhuc dicamus, quomodo definitiones expendere debeat, qui ad tertium cognitionis gradum adspirat. Facile apparet, inquirendum hic quoque esse, quomodo definitiones fuerint detectæ, aut inveniri saltem potuerint. Quamobrem id nobis agendum est, ut ostendamus, quomodo hæc inquisitio sit instituenda. Definitiones esse duplices, nominales, & reales, in Commentatione de methodo mathematica monuimus (§. 17, 18); ubi etiam docuimus, quomodo tum ad nominales (§. 19 & seqq.), tum ad reales perveniatur (§. 25 & seqq.). Juxta regulas igitur ibidem traditas definitiones ad examen revocandæ: quod quomodo fiat, uno alteroque exemplo docendum.

§. 83. *Congruentia* definitur, quod sit coincidentia terminorum, & *congruere* dicuntur, quorum iidem termini esse possunt. Definitio hæc explicat, unde congruentiam agnoscere possis in duabus magnitudinibus, veluti in duabus lineis, vel superficiebus. Quamobrem cum definitio nominalis sit, cujus beneficio res agnoscitur, & ab aliis distinguitur (§. 17 *Comment. de Math.*); definitionem hanc nominalem esse hinc colligitur. Primus modus perveniendi ad definitiones nominales consistit in eo, ut ad rem præsentem quam percipimus animum attendamus, & cum cura distinguamus quæ distingui possunt; eaque fini singula primum sigillatim consideremus, mox vero eadem inter se conferamus. Quodsi inquiramus, utrum hoc modo definitio congruentiæ inveniri potuerit, nec ne; hoc modo eam detectam esse deprehendes. Sumantur, ex. gr. duo fila ejusdem longitudinis coëxtensa, dicuntur ea sibi mutuo congruere. Quodsi quæsiveris, cur sibi mutuo congruere dicantur; non aliam reddere potes rationem, quam quod ab eodem termino incipiant, & in eodem desinant;

seu quod extrema eorum coincidant, ipsaque etiam coincidant quoad longitudinem. Atque adeo patet, ex lege ratiocinandi (§. 349 *Log.*), coincidentiam terminorum hic dici congruentiam. Similiter notio lineæ rectæ abstrahitur a filo extenso, cujus crassities, cum diminui posse concipiatur in infinitum, donec tandem evanescat, a notione confusa ejus abstrahitur notio lineæ in genere, quod sit longitudo latitudinis expers: quæ est definitio *Lineæ* in genere, quam dedit EUCLIDES. Quodsi jam notionem rectæ confusam ad distinctam revocare volueris, distinguenda in ea sunt, quæ distingui possunt; eaque fini singula primum sigillatim considerari, & mox inter se conferri debent (§. 19 *Meth.*). Cum in linea non concipiantur nisi puncta, quæ a se invicem distingui possunt, & situs eorundem, quem ad se invicem habent; recta a curva differre nequit, nisi situ punctorum quæ in ea assumuntur. Advertit hoc EUCLIDES: unde *Rectam* definit, quod sit linea ex æquo interjacens inter sua extrema. Enimvero cum huic punctorum situi nulla respondeat notio, nisi confusa, quam verbis ex æquo interjacere inter sua extrema indigitat, eadem nempe cum notione confusa lineæ rectæ; nihil explicuit, nec definitione sua uti potuit. Tab. I. Fig. 13. Nos igitur assumentes partem quamcunque rectæ AC, eamque conferentes cum tota AB, inquisivimus, num quid in situ punctorum, quæ in parte assumuntur, deprehendi possit, quod diversum sit a situ punctorum in toto assumtorum. Ubi nullam diversitatem reperiri posse deprehendimus; memores definitionis similitudinis (§. 24 *Arith.*), *Rectam* definivimus per lineam, cujus pars quæcunque toti similis. Nimirum, vi illius definitionis, in parte ad totam collata, præter magnitudinem nihil observare datur, quo ea a tota distingui possit. Quamobrem cum Linea curva sit, quæ recta non est; eademque, supposita definitione rectæ, hoc modo definiri poterat (*not.* §. 85 *Ont.*); nos in definitionem nostram *Lineæ curvæ* incidimus, quod nimirum sit linea, cujus partes toti dissimiles (§. 22 *Geom.*). Ita si assumas Tab. I. Fig. 14. duos peripheriæ arcus quoscunque AC & AB, ducasque chordas cognomines; situm puncti C ad A & B ad A distinguere licet per diversam rationem subtensarum ad diametrum; neque enim arcuum subtensæ omnes eandem ad diametrum rationem habent, ut adeo pars arcus ab arcu integro, hoc modo, distingui possit. Tacemus modos alios distinguendi situm punctorum in parte; consequenter partem ipsam, a tota. Geometriæ sublimioris gnari non ignorant hoc principio distingui curvas a se invicem. Sed cum seniores Geometræ in recta a curva distinguenda hæsitaverint, definitiones utriusque daturi; non opus est ut tyrones, in

modo

modo quo eædem detectæ fuerunt inquirendo, industriam suam fatigent. Tum enim idem manifestus erit, ubi in Geometria curvarum fuerint versati.

§. 84. Similiter videre licet ubivis, lineam rectam cum altera in eodem puncto concurrentem, diversimode ad se invicem inclinari posse. Unde, non attenta inclinationis diversitate, enata est definitio *Anguli* in genere (§. 54 *Geom.*), quod scilicet sit duarum linearum in puncto uno concurrentium mutua inclinatio. Quodsi ergo recordatus, a puncto quovis ad punctum quodvis lineam
Tab. I. Fig. 6. rectam duci posse (§. 20 *Geom.*), crura anguli CAB recta CB jungi concipias; reflectendo super iis, quæ in figura, quæ sic prodit, distinguuntur; reperitur (§. 19 *Meth.*) definitio trianguli in genere, rectilinei scilicet; quoniam, in Geometria elementari, cum aliis nullum nobis est negotium, quod sit figura tribus lineis rectis terminata (§. 87 *Geom.*). Quodsi perpendis, in hac definitione non determinatam esse rationem laterum AB, BC & AC; & recordaris rationem omnem vel esse æqualitatis, vel inæqualitatis (§. 130 *Arith.*); addendo determinationem rationis laterum ad se invicem, nascuntur triangulorum species (§. 22 *Meth.*). Nimirum, si tria latera habeant ad se invicem rationem æqualitatis, seu omnia inter se æqualia sint; definitio præsto est *Trianguli æquilateri* (§. 88. *Geom.*). Si sumis eadem habere ad se invicem rationem inæqualitatis, hoc est, singula inæqualia esse; definitionem habes *Trianguli scaleni* (§. 90. *Geom.*). Denique si sumis latus unum habere ad unum reliquorum rationem æqualitatis, ad alterum vero rationem inæqualitatis, seu duo nonnisi latera æqualia esse; in definitionem *Trianguli æquicruri* incidis.

§. 85. A definitione trianguli æquilateri, quod tria latera æqualia habet, abstrahitur definitio *Figuræ æquilateræ* in genere, omissa determinatione numeri laterum (20 *Meth.*); quod scilicet sit figura, cujus latera singula inter se æqualia sunt (§. 88 *Geom.*). Atque adeo satis patet, quomodo, ope regularum in Commentatione de Methodo mathematica explicatarum, detectæ fuerint, aut saltem detegi possint, definitiones nominales Geometriæ, immo in qualibet Matheseos parte. Idem enim quoque succedere in definitionibus aliis experietur, qui tentare voluerit.

§. 86. Sufficiant igitur hæc dixisse de definitionibus nominalibus: restat ut nonnulla addamus de realibus. Ex. gr. lineam quandam rectam LM, juxta ductum alterius rectæ LO, mo- Tab. I. Fig. 3.
tu sibi semper parallelo, hoc est, ut in quolibet situ semper parallela sit, deorsum moveri posse constat. Quamobrem, si hoc fieri sumis; prodit definitio *parallelogrammi* in genere. Similiter rectam quandam AC, circa punctum fixum C, in gyrum

Tab. I. Fig. 15. rum agi posse, donec redeat ad terminum A, unde digressa fuerat, per se liquet, & per notiones communes confirmatur. Quodsi ergo hoc sumis; prodit definitio *Circuli* realis (§. 25 *Meth.*).

§. 87. Eædem definitiones reperiri quoque potuerunt, præsuppositis definitionibus nominalibus. Parallelogrammi definitio nominalis est, quod sit figura quadrilatera, cujus latera opposita sunt parallela (§. 102 *Geom.*). Quodsi concipias rectam LM juxta ductum alterius rectæ moveri deorsum; patet figuram describi quadrilateram. Quodsi linea ponatur sibi semper manere parallela; liquet latus ON opposito LM esse parallelum, & rectas quascunque parallelas inter latera OL & MN interceptas esse æquales. Enimvero si lineæ parallelæ æquales intra easdem lineas comprehendantur, erunt quoque hæ inter se parallelæ (§. 257 *Geom.*). Unde infertur, Latus quoque MN esse opposito LO parallelum. Evidens adeo est, figuram, quæ describitur, motu lineæ rectæ LM, juxta ductum alterius rectæ LO, sibi semper parallelo, esse quadrilateram & habere latera opposita parallela. Atque sic liquet, figuram hoc modo descriptam esse, vi definitionis nominalis, parallelogrammum. Nimirum, si definitio nominalis parallelogrammi sumitur; parallelogrammum dici nequit nisi figura, quæ & quadrilatera est, & latera opposita æqualia habet. Quamobrem ubi definitionem realem, hac supposita, dare volueris; ita omnino concipienda, ut nominali non repugnet ista genesis, sed ex genesi figuræ potius demonstrari possit, nominalem definitionem eidem convenire. Quodsi excipias, supponi hic, quæ demonstranda ante sunt, quam definitionem realem ex nominali deducere valeas, nimirum quod lineæ parallelæ inter duas lineas interceptæ æquales esse debeant, ut hæ quoque inter se sint parallelæ; objectio nulla est. Ecquis enim dixerit, salva veritate, definitiones reales ex nominalibus deducendas esse, nulla theoria præsupposita, quæ demonstranda ante venit. Quin potius ipsum exemplum, quod modo dedimus, contrarium loquitur. Definitiones nominales sumere licet, antequam theoremata demonstrentur. Sumere quoque licet reales, antequam demonstrentur propositiones, modo genesis intelligatur possibilis absque demonstratione; scilicet ut nihil fieri jubeatur, quod absque demonstratione fieri posse non constet. Sed figuram, quæ per genesin prodit, esse eandem, cujus definitio nominalis datur, utique demonstrandum. Quodsi ergo demonstratio supponit principia, quæ absque demonstratione vera esse non perspicitur; illa utique ante demonstranda sunt, quam figuram genitam cum ea, cujus definitio nominalis datur, eandem esse ostendi potest.

Tab. I. Fig. 3.

§. 88.

§. 88. Facilius ex definitione nominali detegitur realis *circuli*, non suppositis aliis, quæ de circulo demum demonstranda. Nominalis circuli definitio est, quod sit figura plana, linea in se redeunte terminata, ex cujus singulis punctis ad punctum intermedium C ductæ rectæ sunt inter se æquales. Quodsi sumis, quod in hac definitione continetur, circulum terminari linea curva in se redeunte; atque succurrit, vi intentionis inveniendi genesin curvæ, seu detegendi motum; quo describitur, describi lineam, si punctum ab uno termino ad alterum moveatur (§. 10 *Geom.*); facile animadvertis, lineam, qua terminatur circulus, describi, si punctum describens continuo motu redeat ad terminum A, unde digressum fuerat. Quodsi porro sumis, vi definitionis nominalis, rectas ex singulis lineæ istius punctis ad centrum C ductas esse æquales; consequenter punctum describens A esse alterum extremum lineæ rectæ, cujus alterum extremum fixum hæret in centro C; patet, si punctum A a termino suo dimoveri debet, ut tamen alterum rectæ AC extremum in puncto C sit fixum; rectam AC circa punctum fixum C moveri debere. Vides itaque circulum describi, si recta quædam AC circa punctum fixum C in gyrum agatur: quæ ipsa est circuli definitio realis deducta ex nominali, nulla præsupposita theoria circuli, sed tantummodo assumtis, quæ in definitione nominali continentur.

Tab. I. Fig. 15.

§. 89. Dn. DE TSCHIRNHAUSEN in *Medicina mentis* definitiones reales mirifice deprædicat, iisque omne tribuit pretium, nominalibus nullo relicto. Enimvero, quemadmodum vidimus, definitiones reales ex nominalibus deduci posse; ita vicissim nominales deducuntur ex realibus: id quod in circulo levi attentione animadvertitur. Exempla alia dedimus in solidis (§. 456 *& seqq. Geom.*). Etsi autem non negemus, ex definitionibus realibus haud raro facilius deduci, quæ ex nominalibus operosius demonstrantur, adeoque ad inveniendum eas esse admodum utiles; nominales tamen realibus præstant in rebus ad sua genera suasque species reducendis: id quod in demonstrationibus & in applicatione theoriæ ad casus obvios maxime usui est. Quamobrem definitiones nominales non sunt contemnendæ, immo certo fine realibus præferendæ, quæ ad res obvias agnoscendas & ab aliis distinguendas non adeo commodæ sunt, quam nominales; id quod ipsa circuli atque parallelogrammi definitione reali docetur.

CAPUT II.

De Modo instituendi studium Matheseos intellectus perficiendi causa.

§. 90. Non omnes in addiscenda Mathesi eundem sibi scopum præfigunt. Postquam igitur in genere docuimus, quomodo Mathesis sit tractanda, ut eam consequaris cognitionem, quam intendis; nunc porro dispiciendum est, quinam per Matheseos studium intendi possint fines, & quænam observanda sint ei, qui finem intentum consequi voluerit. Eminet inter hosce fines perfectio intellectus, quæ consistit in habitu rectum faciendi facultatum cognoscendi usum in veritate cognoscenda. Hunc finem intendere debent, quotquot ad certam cognitionem in quocunque genere cognoscibilium adspirant, sive philosophari voluerint, sive Theologiæ, Jurisprudentiæ, ac Medicinæ operam navare decreverint. Ea de causa, veteres neminem ad Philosophiam addiscendam admittere voluerunt, nisi Geometriæ peritum; cum olim Geometria sola accurata methodo traderetur. Optandumque erat, ut idem mos in scholas nostras introduceretur. Rationes perspicientur ex iis, quæ mox tradituri sumus, & per transennam prospiciuntur vi eorum quæ modo diximus. In veritate enim cognoscenda, rectum facere tenetur facultatum usum, qui a veritatis tramite deflectere noluerit.

§. 91. Tres sunt intellectus operationes, notio, judicium, atque discursus, sive ratiocinium; & hisce suppetitas ferunt facultates cognoscendi inferiores, sensus, imaginatio, atque memoria, una cum facultatibus intermediis, attentione ac reflexione, per quas ab inferioribus ad superiorem fit transitus. Quæ omnia satis manifesta sunt ei, qui Psychologiam empiricam cognitam atque perspectam habet. Qui adeo intellectum perficere voluerit, is rectum operationum intellectus usum facere tenetur; ac in iis eliciendis uti debet facultatibus inferioribus atque intermediis. Quamobrem studio Matheseos perficitur intellectus; si eodem habitus operationibus intellectus recte utendi, & in iis eliciendis rectum facultatum cognoscendi inferiorum ac intermediarum usum faciendi acquiritur.

§. 92. Non igitur nuda cognitione veritatum mathematicarum perficitur intellectus, sed accuratæ methodo, qua traduntur mathemata, fructus hic debetur. Ejus adeo participes non fiunt, qui methodum accura-

curatam insuper habent. Quamobrem cum Mathesis, perficiendi intellectus causa, potissimum in scholas sit introducenda; parum adolescentibus & juvenibus consulunt, qui ut desidiosis placeant, methodi nullam rationem habent, sibi magis, quam ipsis prospicientes.

§. 93. Qui in primo cognitionis gradu acquiescit, non alium finem sibi propositum habet, quam ut veritatem ab aliis propositam intelligat (§. 1); consequenter non aliud intendit, præterquam veritatum mathematicarum nudam cognitionem. Quoniam igitur nuda veritatum mathematicarum cognitione non perficitur intellectus (§. 92); nec fructus hujus particeps fieri potest, qui primum cognitionis gradum unice curæ cordique habet. Quod si ergo eum praxes quædam mathematicæ non juvant, veluti si agrimensorem, aut architectum militarem agere decreverit, vel si principiorum mathematicorum usum non experitur in addiscendis aliis, ex. gr. in percipiendis dogmatis nonnullis physicis; Mathesin plerumque in spem futuræ oblivionis addiscit; ut studii hujus, quod multiplici ratione sese commendat cultoribus suis, nullum prorsus percipiat fructum. Unde facile intelligitur, quinam in addiscenda Mathesi oleum atque operam perdant; ut ab hoc studio potius sint arcendi, quam ad idem invitandi vanis pollicitationibus. Convenit ingenuitati docentis, ne aliquid lucelli facturus, juvenes ab addiscendis iis, quæ magis profutura sunt, ad ea avocet, quæ in spem futuræ oblivionis addiscunt.

§. 94. Qui primo cognitionis gradui acquirendo eam operam navat, quam requisivimus; is attentionem ad ea, quæ discit, afferre ac tamdiu conservare adsuescit, donec illa rite intellexerit (§. 5). Quænam ad hoc requirantur, ut definitiones intelligat (§. 6 *& seqq.*), nec in propositionibus quicquam supersit obscuri (§. 17 *& seqq.*), perspicit. Definitionum accuratarum, & in disciplinis rite ordinandarum (§. 6), ac theorematum (§. 24, 25), & problematum, & resolutionis eorundem (§. 26 *& seqq.*) genuinæ formæ ideam exemplarem animo concipit. Differentiam inter notiones distinctas & confusas, adæquatas & inadæquatas penitus perspicit (§. 6, 9 *& seqq.* §. 24 *& seqq.*). Quomodo recto sensuum usu facilitetur operatio intellectus addiscit (§. 7). Quo pacto repetitio facilior minusque molesta reddatur, qua memoriæ infiguntur firmiter eadem retinenda, cognoscit (§. 15). Nemo non agnoscit, ad perfectionem intellectus pertinere, ut formet notiones distinctas & adæquatas cognoscibilium; ut judicia formet determinata; ut resolutiones problematum distincte concipiat; ut attentionem, prout usus requisiverit, determinet; ut usum sensuum in operationibus intellectus decernat; ut

memo-

memoriæ infigendorum eademque retinendorum curam gerat. Quamobrem cum hæc perfectio intellectus acquiratur, si primo cognitionis gradui acquirendo præscripto modo studeamus; quin Matheseos studium, si nostro more tractetur, faciat ad intellectum perficiendum dubitandum non est.

§. 95. Non est quod mireris modum, a nobis præscriptum, ad primum cognitionis gradum adspirantibus, facere ad perficiendum intellectum; cum tamen a methodo, non a dogmatis expectanda sit perfectio intellectus (§. 92). Etenim cum secundus cognitionis gradus supponat primum; nos in acquirendo cognitionis gradu primo jam ea præcepimus, quæ vi methodi observanda sunt iis, quibus secundus curæ cordique est (§. 30); cum vulgo methodi nulla habeatur ratio, & plerumque nonnisi confusæ notiones memoriæ imprimantur, vi imaginationis reproducendæ, quando iisdem opus est. Sane in Geometria, lecta vel audita definitione, oculos in schema delineatum statim conjicientes ideam definiti memoriæ infigunt, non distincte expensis, quæ in definitione continentur; eodemque modo idea schematis, quæ theorema & resolutionem problematis exhibet, eidem mandatur, quæ vi imaginationis præsens sistitur, quoties de ea re cogitamus. Parum adeo, vel nihil, tribuitur intellectui, facultatum vero cognoscendi inferiorum usus prædominatur. Immo ne attentionis quidem is fit usus, quem facultas cognoscendi superior exigit.

§. 96. Qui definitiones, propositiones, & resolutiones problematum eo modo exponit, quem nos præscripsimus (§. 9, 17 *& seqq.*); eas ad figuras in charta delineatas & exempla exhibita applicat, qualis applicatio requiritur, dum ratiocinamur. Ratiocinatio tertia intellectus operatio est; eodemque prorsus modo ratiocinandum, dum propositiones demonstramus, vel a priori, ex cognitis, alia adhuc nobis incognita colligimus. Quamobrem patet, si in acquirendo cognitionis gradu primo morem nostrum sequaris, hoc ipso perfici debere intellectum. Nulla adeo intellectus operatio est, cui rite eliciendæ non inserviat modus acquirendi primum cognitionis gradum a nobis præscriptus (§. 94 *& præc.*).

§. 97. In primo igitur cognitionis gradu acquirendo, omnem illum facis facultatum cognoscendi usum, qui in secundo acquirendo requiritur, immo in tertio familiaris supponitur. Est adeo modus acquirendi cognitionis gradum primum, quem nos præscribimus, præparatio ad secundum: qua facta, nihil prorsus difficultatis in secundo percipitur, cum eum usum facultatum jam facere possis, quem is requirit. Me vero tacente liquet, quod, ubi primus cognitionis gradus acquiritur, antequam

quam ad secundum accedas, una in parato habeas principia, quibus in ratiocinando opus est, dum ad secundum animum appellis. Equidem id modus a nobis præscriptus commune habere videtur cum vulgari; non tamen utroque idem prorsus efficitur. Etenim, nostro more, definitiones ac propositiones pure enunciatæ memoriæ infiguntur, quales adhibendæ sunt in ratiociniis distinctis; &, dum præscripto modo expenduntur, simul familiares evadunt, quales esse debent, ut statim memoriam subeant, quando iisdem indigemus. Quodsi vero nostro more non expenduntur; nec eadem facilitate definitiones ac propositiones memoriæ mandantur, sed multa demum repetitione consequimur, quod multo temporis compendio obtineri poterat.

§. 98. Plurimum autem refert, ut definitiones, & propositiones antecedentes familiares experiaris, antequam ad sequentes accedas. Etenim, definitiones sequentes non intelliguntur nisi per anteriores, ubi eas ingrediuntur termini per anteriores explicati. Quamobrem ubi hasce nondum familiares experiris; sequentes tibi non possunt non videri obscuræ, nec fieri potest, ut eas penitus intelligas. Similiter demonstratio non convincit, nisi principia, quæ ex antecedentibus sumuntur, sensum evidentiæ secum ferant. Necesse igitur denuo est, ut tibi antecedentes definitiones ac propositiones fuerint familiares, ubi sine hæsitatione in demonstratione progredi volueris. Quid, quod nec propositiones satis intelligantur, quamdiu definitiones, quibus explicantur termini in iisdem occurrentes, non fuerint familiares? Ea de causa observare licet, quod studium mathematicum difficile videatur iis, qui nulla terminorum notitia instructi ad idem accedunt, nec in repetendis iis, quæ explicata fuerunt, seduli ac frequentes sunt; cum in casu opposito nulla percipiatur difficultas. Danda vero omnino est opera, ut difficultas hæc tollatur, ne studii utilissimi efficiat desertores.

§. 99. Qui Mathesi addiscendæ operam navant, ut intellectum perficiant; iis inprimis convenit, ut in secundo cognitionis gradu acquirendo industriam suam exerceant. Methodo enim debetur hic fructus, non dogmatis, quæ in Mathesi proponuntur. Hujus autem potissima pars sunt demonstrationes, quibus veritatis eorum, quæ docentur, convincimur, ut nihil nobis dubii supersit. Secundo gradui cognitionis acquirendo inserviunt demonstrationes (§. 30). Quamobrem si studium Matheseos intellectum perficere debet, necesse est ut in demonstrando sis assiduus.

§. 100. Intelliguntur vero hic demonstrationes syntheticæ, quales sunt EUCLIDIS & Geometrarum veterum. Neque alia de causa, quam harum demonstrationum gratia,

Veteres voluerunt, ne quis ad philosophiam accedat, nisi Geometriæ peritus. Quamvis enim demonstrationes recentiorum analyticæ, quæ calculis algebraicis absolvuntur, suum etiam habere possint usum in intellectu perficiendo; ab iis tamen eundem expectare minime licet, quem spondent syntheticæ: id quod satis manifestum evadet per ea, quæ mox disertius dicentur. Inde nimirum est, ut in Mathesi licet versatissimi & inter summos Mathematicos eminentes, ubi extra Mathesin methodo mathematica uti voluerunt, minime dare potuerint, quæ satisfaciunt. Exemplo nobis est CARTESIUS, Vir summus, cujus memoriam egregia in Mathesi inventa posteritati commendabunt, quamdiu scientiæ honos erit. Cum enim MERSENNI desiderio satisfacturus, suum de existentia Dei argumentum ad formam demonstrationis geometricæ reducere vellet; quam parum ipsi leges methodi mathematicæ & genuina demonstrationis forma fuerit perspecta, abunde prodidit in Responsionibus ad objectiones contra Meditationes suas metaphysicas. Taceo exempla alia, quæ commemorari poterant; & quibus tandem effectum est, ut extra Mathesin nullam dari certam cognitionem acutiores inde colligerent: in qua opinione ipsum scepticismum consistere, nemo est qui non agnoscat. Quodsi ergo ad certam cognitionem extra Mathesin pervenire volueris; necesse est ut methodi mathematicæ interiorem rationem perspicias, & leges ejus distincte cognoscas: id quod fieri non poterit, nisi demonstrationum syntheticarum resolutione naturæ animæ convenienter facta, quam in superioribus satis declaravimus, ut nihil in ea desiderari possit. Atque, ea de causa, demonstrationes nostras syntheticas eo ordine digessimus, ut facillime præscripto modo resolvi possint. Nihil enim magis intendimus, quam ut studio mathematico intellectus perficiatur, quo certæ extra Mathesin cognitioni acquirendæ sufficiat.

§. 101. Doluit ideo ipse Vir summus ISAACUS NEWTONUS, quod, cum se studio mathematico totum daret, ad CARTESII Geometriam, aliosque scriptores algebraicos, statim progressus fuisset, antequam Elementa EUCLIDIS ea attentione expendisset, quam merentur; nec probavit, quod hodie Geometræ methodum syntheticam Veterum prorsus negligant, & in solis calculis algebraicis acquiescant; quemadmodum ex ore ipsius hausta refert HENRICUS PEMBERTON in præfatione ad Conspectum Philosophiæ NEWTONI, quem patrio sermone edidit. Nullum mihi dubium est, quin, quantum sibi hoc ipso defuerit, abunde expertus fuerit, cum in divino opere Principiorum Philosophiæ naturalis mathematicorum, inventa præclara methodo veterum Geometrarum proponere

nere decrevisset. Quodsi enim quis, more a nobis præscripto, demonstrationes syntheticas resolvere didicerit, & genuinam earum formam animo comprehenderit; is facile animadvertet, quod eam non perviderit NEWTONUS; neque adeo distincte agnoverit, unde pendeat evidentia veritatis extra Mathesin; quemadmodum & CARTESIO accidisse modo monuimus (§. 100). Idem videre licet in eximio opere Phoronomiæ JAC. HERMANNI; qui, cum omnem ætatem in calculis algebraicis consumsisset, methodo Veterum recentiora in Mechanica & Hydraulica, agnatisque disciplinis inventa demonstrare volebat. Quam parum enim sibi & lectoribus suis consuluerit; quod methodo, cujus vim ac potestatem minime comprehendebat, ea proponere voluerit, quæ per calculos algebraicos assecutus fuerat, & cum laude ad utilitatem discentium proponere poterat, acutiores vident.

§. 102. Firmum itaque ratumque manet; qui intellectus perficiendi gratia ad Mathesin accedit, ei demonstrationes *Euclideas* omni cura ac sollicitudine expendendas esse: quæ qualis esse debeat, nostra demonstrationum analysis & earundem symbolica repræsentatio clarissime docet §. 38 & seqq.). In his igitur industriam suam ingeniique vires exerceat, qui extra Mathesin evidentiam in veritatis cognitione consequi voluerit. Proprio experimento edocti sumus, non dari aliam ad evidentiam in Philosophia & Facultatibus, quæ dicuntur, superioribus viam: quam si calcare nolueris, tanto pronior erit in Scepticismum prolapsus, quanto fueris acutior; & facillimum erit nubem pro Junone amplecti, nec abortus imaginationis a genuinis intellectus fœtibus distinguere dabitur. Quodsi, præscripto a nobis more, in Mathesi versari volueris, cessabunt querelæ de imbecillitate intellectus humani, quales movit HUETIUS, non profuturæ, nisi ut sternant ad Scepticismum viam, non sine detrimento religionis tam revelatæ, quam naturalis. Scepticismum hodie ubivis terrarum invalescentem eversuri methodo ista philosophari cœpimus, qua EUCLIDES in suis Elementis olim usus. Cumque, in Philosophia, notiones confusæ resolvendæ sint in distinctas, quas sine detrimento veritatis fert Mathesis; ipsas etiam demonstrationes geometricas ad eam formam reduximus, quam extra eandem habere debent, ne quid desit evidentiæ; ut adeo superflua existimanda non sint, quæ finis tam præclari gratia fiunt. Nec puerilia censenda sunt, quorum neglectus se vindicat in Viris summis. Abiit itaque, ut eorum autoritate ad eundem defendendum abutaris.

§. 103. Modus, quo definitiones ac propositiones expendere docuimus, omnem facultatum usum legiti-

mum in veritate cognoscenda pollicetur, ipso opere consequendum. Quodsi vero ad repræsentationem symbolicam animum advertere, & regulas generales inde abstrahere volueris; verioris Logicæ præcepta consequeris, quæ in Logica nostra demonstravimus. Atque adeo reipsa experieris, Logicam artificialem tum demum esse genuinam, ubi praxi veterum Geometrarum conformis; quemadmodum in Prolegomenis Logicæ ostendimus (§. 26 *Log.*). Qui sic præparatus ad Logicæ studium accedit, non modo omnia, quæ hic docemus, penitus intelliget; verum etiam regulas ibidem traditas, absque ulla hæsitatione, dextre applicabit; ut nec in iis applicandis sibimet ipsi imponat; quemadmodum haud raro contingit, nec de difficultate applicandi queratur. Ubi studium Matheseos præscripto a nobis more instituerit; in studio Logicæ, quod spinosum alias ac tædii plenum videtur, non sine voluptate versabitur, nec Logicam soli scholæ addisci in seipso experietur. Etenim ideas, quæ regulis logicis lucem affundunt, tot exemplis confirmatas, recta Mathematum tractatione, adeo familiares possidet; ut, quoties iisdem opus est, sua veluti sponte sese sistant animo præsentes; ipsaque Mathematum tractatio in continua regularum istarum applicatione cum consistat, quin continuo, hoc exercitio, eas applicandi habitum sit consecutus, dubitari nequit. Voluptate perfunditur animus, dum veritatis plenarie convincitur. Quamobrem cum veritatis eorum, quæ in Logica docentur, convincatur qui, Matheseos studio nostro more præparatus, ad studium Logicæ accedit; quin continua in eodem fruatur voluptate dubitandum non est. Docet Logica usum facultatum cognoscendi in veritate cognoscenda & applicanda. Quoniam itaque usum facere potest, qui nostro more in Mathesi fuit versatus; usus autem idem requiritur, in singulis omnino actionibus recte determinandis, prouti abunde constabit, si quis attenta mente Tomum posteriorem Philosophiæ practicæ universalis perlustrare voluerit; utilitatem Logicæ per omnem vitam experietur, qui regulas ejus penitus intelligit, & dextre applicare didicit.

§. 104. Quoniam ea demum Logica censetur genuina, quæ praxi veterum Geometrarum conformis (§. 26 *Log.*); utrum vero huic conformis sit, nec ne, dijudicare valet, qui in Mathesi præscripto a nobis modo fuit versatus (§. 103); nostra Matheseos quoque tractatio hunc pollicetur fructum, ut Logicam genuinam a spuriis discernamus, quales nostra ætate eduntur haud paucæ, & quæ naturali facultatum animæ usui e diametro adversantur; ita ut studium Logicæ non amplius faciat ad dirigendum facultatem cognoscitivam in cognoscenda veritate, sed intel-

intellectum potius corrumpat, ut a solida cognitione veritatis proscribaris. Neque verendum est, ne autoritas Mathematici, Logicæ non unius scriptoris, ipsi imponat: satis enim intelligit, vulgari Mathemata discendi more (§. *64*) non patefieri regulas logicas, quas nostra resolutio & analytica expressio in apricum producit. Non igitur sufficit Logicam scribi ab eo, qui Mathematicus audit, vel Geometriæ quædam Elementa methodo minus accurata compilavit; sed necesse est, ut, qui Logicam scribit, in expendendis definitionibus ac propositionibus earumque demonstrationibus, cum faciat facultatum usum, quem regulæ logicæ urgent, & ut hasce ipsas regulas praxi huic conformes tradat. Vidimus paulo ante (§. 101) deficere hic acumen Mathematicorum summorum; ut adeo mirum videri non debeat, si acumen illorum desideretur, qui in illorum numerum referri nequeunt.

§. 105. Quoniam ad studium logicum accedere non debet, nisi qui in studio Matheseos secundum morem nostrum versatus est; ideo in Logica exempla mathematica dedimus, quippe quæ satis cognita atque perspecta supponimus, nisi ubi exempla vulgaria satisfaciunt. Accedit, quod nonnulla in Logica tradantur, quæ aliis, quam mathematicis exemplis, non eadem perspicuitate illustrantur. Bene sibi consulunt, qui saltem Arithmeticæ ac Geometriæ Elementa præscripto a nobis modo perlustrant, antequam ad Logicam animum appellunt. Reipsa experientur, quod ex studio logico omnem percepturi sint fructum, qui ab eo sperari potest. Quodsi vero, neglecta Mathesi, ad Logicam properant, multa in iis non penitus intelligent, etsi omnia rite percepisse videantur; nec absoluto studio logico in potestate sua positum deprehendent, ut regulis Logicæ satisfaciant, hoc est, cum faciant facultatum usum, quem Logica præscribit.

§. 106. Maxima intellectus perfectio est Ars inveniendi; qua ex iis, quæ cognovimus, alia nobis incognita ratiocinando colligimus. Qui eo usque in perficiendo intellectu progredi voluerit; illi tenenda sunt, quæ de tertio cognitionis gradu acquirendo inculcavimus (§. *66 & seqq.*) Quodsi enim vel sola Elementa Arithmeticæ ac Geometriæ eo modo pertractaveris, qui ibidem præscribitur; non modo constabit, quomodo in veritate invenienda sit procedendum; verum etiam habitum quendam tibi comparabis ex cognitis alia incognita colligendi; consequenter aliquid saltem hujus Artis acquires. Quemadmodum vero intellectus continuo magis magisque perficitur, quoad promptum usum in veritate cognoscenda; si simili modo Philosophiam nostram pertractare volueris, quo in acquirendo gradu secundo

cognitionis mathematicæ utendum esse docuimus; ita quoque, quoad Artem inveniendi, eundem ulterius perficies, si in Philosophia facias, quæ tertii cognitionis gradus acquirendi gratia fieri debere præcepimus. Quodsi cui hoc nimis molestum videtur; is sciat velim, quæ ardua sunt, ea non facili opera acquiri. Qui vult finem, media velit necesse est, quæ ad eundem ducunt.

§. 107. Satis itaque docuimus, quomodo instituendum sit studium Matheseos, ut intellectus, quantum datur, perficiatur. Unicum adhuc superest, de quo nonnulla mihi dicenda sunt, antequam ad alia progrediar. Sunt qui sibi aliisque persuadere conantur, quasi methodus mathematica Philosophiæ minus conveniat; multo autem adhuc minus in Theologia, Jurisprudentia, & Medicina eidem locus sit. Equidem hoc dubium jam sustulimus in Discursu præliminari, quem Logicæ præmisimus, de Philosophia in genere, ubi (§. 139) identitatem methodi philosophicæ ac mathematicæ demonstravimus; & in Horis nostris subsecivis ostendimus, quod & quomodo methodus mathematica adhiberi possit in Jurisprudentia, & Scriptura sacra interpretanda: ex nostra tamen definitionum & demonstrationum propositionum analysi, singulari ratione idem elucet. Etenim per hanc manifestum est, omnem methodum mathematicam, qua usus est EUCLIDES, huc tandem redire, ut operationum intellectus legitimum faciamus usum in veritate cognoscenda, qui ad evidentiam acquiritur, qua veritas indubitato agnoscitur. Hinc manifestum est, non alias homini esse facultates, quibus in cognoscendis mathematis utitur, quam quibus opus habet ad cognoscendam veritatem quamcunque aliam; nec alium esse facultatum earundem usum in Mathesi addiscenda, vel etiam in veritatibus mathematicis inveniendis, quam qui requiritur ad certam cognitionem veritatis cujuscunque alterius, sive ab aliis inventa fuerit, sive demum nostra opera detegenda. Mathesis adeo exemplis docet, quomodo rectus facultatum cognoscendi usus fieri debeat, si ad liquidam veritatis cognitionem pervenire decreveris: id quod regulis docet Logica, quæ ideo ab exemplis mathematicis abstrahi possunt (§. 103), ita ut earundem cum praxi Mathematicorum conformitas sit lapis Lydius genuinæ Logicæ (§. 26 *Log.*). Quotquot igitur in ea sunt opinione, quasi Mathesis propriam sibi habeat methodum, quæ extra eam nullius sit usus; aut methodi mathematicæ vim ac potestatem, aut genuinum facultatum cognoscendi ad certam veritatis cognitionem consequendam usum, aut utrumque, ignorant. Hinc etiam videas, objectionem moveri ab iis, qui vel sunt in omni Mathesi hospites ac peregrini, vel legitimi usus facul-

facultatum cognoscendi prorsus ignari.

§. 108. Denique nostra Mathematum tractatio manifesto loquitur, eum, qui in Mathesi addiscenda præscriptum a nobis morem observat, sequi modum cogitandi maxime naturalem. Primus hoc animadverti, cum ad demonstrationum analysin, præscripto a nobis modo factam, animum attenderem, & publice hoc monui in Lexico mathematico, idemque postea uberius docui in Psychologia. Naturalis cogitandi modus est, qui leges animæ exacte sequitur. Quis igitur adeo vesanus est, ut sibi persuadeat, usum facultatum aliis legibus accommodandum esse in Philosophia, Theologia, Jurisprudentia, Medicina, quam quas fert natura animæ?

§. 109. Etsi autem Mathesis universa faciat ad intellectum perficiendum, si eo, quem præscripsimus, modo tractetur; ut adeo optime sibi consulat, qui Elementa nostra omnia eodem studio perlustrat: quoniam tamen non omnibus tantum suppetit temporis spatium, quantum huic labori sufficit; unusquisque eo usque progredi poterit, quantum conceditur. Arithmeticæ autem & Geometriæ pertractatio prorsus indispensabilis est; quæ ideo præmittenda, antequam ad Logicam animum appellis, & hinc ad reliquam Philosophiam te conferas. Immo, si cui volupe fuerit integra Matheseos nostræ Elementa perlustrare; ei tamen non suaserim, ut de Philosophia omnem cogitationem abjiciat, donec studium Matheseos omne fuerit absolutum: sed potius autor sum, ut, Arithmetica & Geometria absoluta, statim Logicæ operam suam addicet, & in Mathesi juxta Philosophiam pergat. Ita enim futurum certus sum, ut studium Matheseos ac Philosophiæ sibi mutuo lucem affundant.

§. 110. Supponimus autem Philosophiam eadem methodo esse conscriptam, qua in Elementis Matheseos utimur. Quamobrem cum id ante nos fecerit nemo; nec alia ipsi scripta philosophica commendare valemus, nisi Opera nostra philosophica, Latino inprimis idiomate conscripta. Quodsi prolixitatem obtendas, nulla sane ratio est, cur ea te deterreat. Etenim si non ante ulterius progredi volueris, quam singula rite intellexeris, ac veritatis eorum convictus fueris; multo minore temporis spatio scripta nostra utiliter perlegere potueris, quam breve quoddam compendium, communi more conscriptum; modo in pertractanda Arithmetica & Geometria industriam tuam desiderari passus non fueris. Immo valde vereor, ne si præscripto a nobis more in Arithmetica & Geometria fueris versatus, lectio aliorum scriptorum philosophicorum quam nostrorum, te efficiat studii philosophici desertorem, aut in Scepticismum dedu-

deducat. Absit, ut quis existimet hæc arroganter a nobis dicta esse, nimia in nos fiducia, in contemtum aliorum! Veritati enim unice litamus, non loquentes nisi experta, quæ ratio defendit. Ab aliorum contemtu procul remoti, aliena merita suspicimus & extollimus; neminem in scriptis nostris nominatim perstringimus; iis etiam parcimus, qui in lacessenda fama nostra quidvis sibi licere arbitrantur; probe memores eam non dependere a laudibus aliorum, sed a factis propriis; omni animi contentione omnique industria ac diligentia in id enitentes, ut calumnias factis contrariis refellamus. Alienum a nobis esse existimamus, ut doctrinis, quas profitemur, facta sint contraria. Nemo igitur nobis vitio vertet, si aliorum utilitati velificaturi ea dicimus, quæ veritas imperat, citra injuriam alterius. Minus toleranda potius ambitio est, si quis non sine detrimento aliorum veritatem reticeri vult, ut videatur qui non est. Ceterum, si quis consilio nostro aurem benignam dare voluerit; re ipsa experietur vera omnino esse, quæ dicimus.

CAPUT III.

De Studio Arithmeticæ, Geometriæ, & Trigonometriæ planæ in specie.

§. 111. Arithmeticæ, Geometriæ, & Trigonometriæ planæ nostra Elementa ita conscripsimus, ut satisfaciant omnibus, quocunque fine ad Arithmeticam & Geometriam addiscendam appellunt. Ea enim digessimus, ut nullo negotio prætermittantur, quæ salvo fine, quem quis sibi præfixum habet, ignorare potest; & ea iisdem inseruimus, quæ nisi eo excidere voluerit, ignorare nequit.

§. 112. Qui Arithmeticam addiscit, vel soli praxi studet, theoriam non curat, vel hujus etiam rationem habet. Qui soli praxi operam navat, is vel solum ejus usum in vita communi, vel usum etiam in Geometria practica, aliisque Matheseos mixtæ partibus, intendit. Idem præterea, vel in nuda praxi acquiescere vult, vel veritatem quoque praxeos perspicere avet. Cui theoria curæ cordique est, is eandem, vel propter usum in ceteris Matheseos partibus, vel propter usum in perficiendo intellectu, appetit. Videamus igitur, quomodo Elementa nostra Arithmeticæ pro multiplici hoc discentium scopo satisfaciant.

§. 113. Qui soli praxi operam navant,

vant, & quidem in usum vitæ communis; iis satisfaciunt problemata de Algorithmo in numeris integris, & fractis, quæ capite secundo & quarto continentur, una cum problemate 33, quod capite sexto legitur, de numero tertio, vel quarto, proportionali inveniendo, una cum scholiis, in quibus idem problema ad varios casus in vita communi obvios applicatur. Qui vero usum etiam in Geometria practica, aliisque Matheseos mixtæ partibus intendunt; illi superaddere debent problemata de extractione quadratæ ac cubicæ radicis, quæ capite quinto leguntur, problemata de logarithmis, fractionibus decimalibus & fractionibus sexagesimalibus, quæ capite octavo, nono & decimo extant. Fractiones sexagesimales omittere possunt, qui calculi Astronomici nullam habent rationem. Immo eodem carere possunt, qui ultra ea non progrediuntur, quæ in nostris Astronomiæ, & Chronologiæ Elementis traduntur.

§. 114. Problemata a definitionibus & theorematis satis aperte distinguuntur, suoque nomine insignita numerantur, ut adeo nullo labore opus sit ad ea evolvenda, & agnoscenda. Ut adeo usus quidam hinc elucescat, cur in Mathesi veritates singulæ suis nominibus compellentur, ac numerentur; etiamsi in citationibus ad paragraphum provocemus, in quo principium istud continetur, quo in demonstrando utimur.

§. 115. Quoniam in propositione, itemque in resolutione, occurrere solent termini, quibus nondum intellectis, nec propositio, nec resolutio intelligi potest; igitur necesse est, ut istorum terminorum definitiones ante expendat, quam ad problema accedat, qui praxin in eodem traditam discere studet. Ita ex. gr. problema secundum (§. 96 *Arithm.*) docet numeros quotcunque datos addere. Supponitur adeo definitio additionis, quæ traditur in anterioribus (§. 61 *Arithm.*). Quia vero nec definitiones intelliguntur, nisi intellectis terminis, qui eas ingrediuntur; si qui termini per notiones claras, sed confusas communes non satis perspicui sunt, ad definitiones eorum, quas in antecedentibus damus, recurrendum. Ita, in definitione additionis mentio fit numerorum homogeneorum. Quinam numeri sint homogenei, ex communi sermone notum non est. Quamobrem necesse est, ut ad definitionem numerorum inter se homogeneorum recurras, quam in anterioribus exhibemus (§. 35 *Arithm.*). Quomodo autem hæ definitiones sint expendendæ, patet ex iis, quæ de primo cognitionis gradu acquirendo, quoad definitiones, præcepimus.

§. 116. Problematum resolutiones statim applicandæ sunt ad exempla, quemadmodum in ipso textu a nobis factum. Nimirum regulæ, quibus præcipiuntur, quæ fieri debent,

suis numeris distinguuntur, ut singulis statim satisfieri possit. Collocantur eo ordine, quo singula fieri debent; ut, lecta regula una, statim fiat quod eadem praecipitur. Nihil adeo applicatio ad exempla habet difficultatis; ita ut totam Arithmeticam practicam proprio marte addiscere possis, nisi fueris valde impatiens; aut si, duce alterius, unam operationem arithmeticam didicisti, ceteras deinde, absque ullo duce, tibi familiares reddere queas.

§. 117. Si quis veritatem resolutionis problematum perspicere voluerit, necesse est demonstrationes addat. Citationes in iisdem adductae ostendunt principia, quibus opus habet. Neque opus est, ut theoremata, quae capite primo proponuntur, demonstret; sed sufficit ea sumi, tanquam per notiones communes nota, absque demonstrationibus. Similiter sufficit, ut ex capite 3 nonnisi definitionem rationis, nominis rationis, rationum identitatis & proportionis in genere, ejusque specierum, proportionis continuae atque discretae (§. 126, 136, 149, 155, 156) sibi cognitam ac perspectam reddat, una cum theoremate 20 & 21, quorum demonstrationes omittere potest, in illustratione per exempla facta acquiescens. Problema 36, de modo inveniendi logarithmum, praetermittere potest; immo totam de Logarithmis doctrinam tamdiu differre; donec, absoluta Geometria, ad Trigonometriam accedere voluerit.

§. 118. Quodsi vero theoriam expetit, sive propter usum in ceteris Matheseos partibus, sive intellectus perficiendi gratia, tota omnino Elementa pertractanda sunt, eo modo, quem in capite primo pro acquirendo gradu cognitionis secundo praescripsimus, ut adeo nihil supersit, quod hic veniat addendum.

§. 119. Quamvis ostenderimus, quid faciendum sit, si quis nudae praxi operam navat, nulla prorsus habita ratione theoriae; hujus tamen neglectum nemini suademus: quin potius consultum ducimus, ut Arithmetica, etiam practica, in usum vitae communis, non sine demonstrationibus addiscatur. Ut enim alios taceam usus; non modo tota Arithmetica practica facilius addiscitur; verum etiam memoriae multo firmius infigitur, non sine temporis compendio; & ubi quorundam oblitus est, absque multa difficultate in memoriam revocantur: id quod inprimis usui est, ubi arithmeticis operationibus non quotidie habueris opus.

§. 120. Ceterum hinc liquet, quod, absque ullo negotio, ex Elementis nostris Arithmeticae exscribi possit Compendium Arithmeticae practicae, in usum illorum qui solam Arithmeticam practicam, propter usum in vita communi, expetunt; levi sumtu ab iis comparandum, qui eodem

eodem opus habent. Quodsi plura desiderentur exempla, ea cumulare difficile non est. Etenim non alia re opus est, quam ut in locum numerorum, quos exemplum sistit, substituantur quicunque alii. Quodsi demonstrationes non negligantur, quemadmodum ne id fiat modo suasimus (§. 119); paucis exemplis obtinetur, quod non sine multis consequi datur, ubi theoriam omnem abjicere volueris.

§. 121. Qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, ii memores esse debent ejus, quod in scholio definitionis primæ (§. 2 *Arithm.*) monuimus; scilicet quod ab Arithmetica practica, tanquam methodo inveniendi speciali, regulæ inveniendi generales abstrahere liceat. Cumque in scholio generali ad Algorithmum numerorum integrorum (§. 125 *Arithm.*), istiusmodi regulas abstraxerimus, ut exemplo quodam præiremus; & in genesi numerorum quadratorum & cubicorum (§. 262, 266, 277, 280 *Arithm.*), nec non in theoria numerorum æquidifferentium (§. 327, 329 *Arithm.*) artificia quædam analytica docuerimus; ad hæc inprimis animum advertere debent, qui non modo in Arithmeticis, Artem inveniendi, sed eam etiam generalem, curæ cordique habent. Si prolixioribus esse liceret, addi poterant multa specialia, de quibus alibi commodius dicetur; ubi nimirum Artem inveniendi ea methodo tradituri sumus, qua huc usque Logicam & Metaphysicam universam, una cum Philosophia practica universali, tradidimus. Ita ex. gr. quæ (§. 142 *& seqq. Arithm.*) de generibus & speciebus rationum rationalium docentur, insinuant modum ex dato genere inveniendi genera inferiora eorundemque species: quo etiam Dignitatum divisio facit (§. 252 *Arithm.*). Huc etiam pertinent fictiones, quarum exemplum habemus in fractionibus spuriis (§. 221, 222 *Arithm.*)

§. 122. Qui Geometriæ studio sese dedunt; similiter aut soli praxi student, theoriæ nullam prorsus rationem habentes, veluti agrimensores & architecti militares; aut in praxi nuda acquiescere nolunt, sed ejus demonstrationes expetunt. Qui vero theoriæ addiscendæ sese dedunt, aut usum in ceteris Matheseos partibus intendunt, aut hoc faciunt intellectus perficiendi causa.

§. 123. Quibus in nuda praxi acquiescere visum est; iis satisfaciunt definitiones & problemata, omissis demonstrationibus. Nullum est problema, quod usui esse non possit, adeoque prætermittendum sit: sed definitiones quædam omitti possunt, veluti figuræ in genere, lateris, tangentis, secantis, &c. Sufficit enim didicisse definitiones angulorum & figurarum, atque lineæ perpendicularis, & linearum parallelarum Ceterorum notiones confusæ, ipso usu

terminorum, in casu dato insinuabuntur, quæ praxi soli intentis satisfaciunt.

§. 124. Quænam observanda sint circa definitiones, & problemata, eorundemque resolutiones, ex iis intelliguntur, quæ de acquirendo gradu primo cognitionis in anterioribus præcepimus (§. 5 *& seqq.*); nisi quod definitiones sequentes non opus sit resolvi in antecedentes, quia sufficit eas referri ad schemata oculis subjecta; cum non requiratur adæquata entium geometricorum notio, sed vel in confusa eorundem notione acquiescere possit.

§. 125. Praxis duplex est: alia, quæ exercetur in charta; alia, quæ in campo. Qui praxi unice se dat, eam exercere intendit. Non igitur sufficit resolutiones problematum intelligere; verum etiam requiritur, ut facias, quæ fieri jubentur. Ad praxin igitur in charta exercendam, ad manus esse debet circinus, regula, instrumentum transportatorium, norma, & parallelismus, una cum triangulo ex ligno ebenino, & scala modica; ad eandem vero in campo exercendam, baculi, cum catena, vel fune cannabino in pedes & decempedas illorumque digitos legitime diviso, una cum instrumentis ceteris, quorum usus explicatur.

§. 126. Juxta resolutionem problemat s uniuscujusque instituenda est operatio, sive in charta, sive in campo; ut videas, num ea facere possis, quæ jubentur. Quorum vero problematum resolutiones arithmeticæ sunt, adeoque calculo absolvuntur; eæ tentandæ sunt in exemplis non modo iis, quæ ipsimet in medium attulimus, verum etiam aliis; qualia comminisci haud difficile, ubi in locum numerorum datorum surrogantur alii pro arbitrio nostro. Quemadmodum enim consultum est, ut una eademque operatio, sive in charta, sive in campo, aliquoties repetatur, donec exacte facere possis quod jubetur; ita etiam exempla cumulanda. Hoc nimirum non tantummodo facit, ut resolutionem problematis uniuscujusque rite intelligas, eandemque memoriæ firmius infigas; sed & ut habitum exacte faciendi, quod faciendum erat, acquiras. Qui enim praxin exercere vult, non modo intelligere debet, quid fieri debeat, sed & ut omni exactitudine id facere possit requiritur. Habitus docendo communicari nequit, sed crebro exercitio, seu idem sæpius faciendo acquiritur. Qui adeo docet, officio suo satisfecit, si ea tradit, quæ, ut recte facias quod faciendum, nosse debes.

§. 127. Quoniam multa dantur problemata geometrica, quorum resolutiones per calculum expediuntur; Geometria practica Arithmeticam practicam supponit. Illam igitur si addiscere volueris, hanc ante addiscas necesse est.

§. 128. Ex nostris adeo Elementis

tis Geometriæ, absque ullo negotio, Geometria practica extrahi poterat, ne verbo quidem immutato: cui quod utiliter addatur compendium Arithmeticæ practicæ, ex Elementis Arithmeticæ exscribendum (§. 120), nemo est, qui non videt (§. 127).

§. 129. Enimvero, etsi praxis absque theoria commode addisci possit, & Elementa nostra ita conscripta sint, ut brevissima ad eandem via ducant absque ulla theoria; meo tamen, si quid valet, consilio, omnes agrimensores & architecti militares, & si qui alii praxin geometricam exercere voluerint, tantum theoriæ sibi acquirere deberent, quantum ad praxin demonstrandam sufficit. Quemadmodum enim theoria accurata praxin accuratam parit; ita etiam probe intellecta exercitium praxeos reddit exactum. Immo succurrunt subinde in praxi casus nonnulli, in quibus hæret ac facile aberrat, qui theoria instructus non est. Non opus esse videtur, ut hoc multis rationibus adstruatur; qui enim consilio nostro aurem benignam præbere voluerit, veritatem dicti reipsa experietur. Nemo non novit, si plures agrimensores aream ejusdem campi investigent, haud raro magnum esse dissensum in quantitate ejus definienda; certo indicio, quod non eadem accuratione singuli fuerint usi, etsi omnem diligentiam adhibuisse sibi videantur. Diligentia oculata esse debet, quæ ab accuratione nulla in re deficit. Ut hæc oculata sit, theoriæ debetur.

§. 130. Equidem non diffitemur, theoriam adeo exactam non requiri in iis, qui Geometriam practicam exercent, qualem nos intellectus perficiendi gratia condidimus; unde & in Elementis nostris Germanicis ab ea abstinuimus eandemque in compendium contraximus. Quodsi tamen visum fuerit omnem retinere theoriam, quam dedimus; ea multiplici utilitate sese commendabit etiam praxin exercentibus. Per eam enim obtinebis, ut nulla in re patiaris desiderari attentionem tuam, & vel in minimis te præbeas circumspectum. Taceo, quod omnibus usui sit, si facultatum cognoscendi legitimum usum facere queant; & ipsa obligatione naturali, nemo negligere teneatur occasionem, qua eundem in potestatem suam redigere valet.

§. 131. Neque est quod excipias, agrimensoribus, & architectis militaribus, aliisque praxin geometricam exercentibus non convenire theoriam, sed eam captum ipsorum transcendere, immo ipsos eandem naturali quadam aversione fastidire: hoc enim quam sit a veritate alienum, & experientia me docuit, & ratio convicit. Si qui theoriam contemnunt, non alia de causa hoc faciunt, quam quod eam non didicerint, nec ignoti ulla sit cupido, & quod eadem in praxi sua carere posse sibi videantur. Aliter vero sentirent, ubi mature theoria

eorundem animis instillaretur. Quod vero eam capere nequeant, si rite eandem doceantur, adeo verum non est, ut experimento contrario refellatur. Ne difficultatem præter necessitatem facessas, doce ipsos primum praxin solam, sed ea methodo, ut distincte concipiant singula, quæ fieri debent, quemadmodum nos urgemus: ita enim futurum, ut notionibus distinctis adsueti, quid inter has atque confusas intersit facile internoscant. Adde demonstrationes, quas diximus, mechanicas; ut veritatem eorum, quæ docentur, experiantur: quam ubi percepisse sibi videntur, eosdem mone experimenta hæc loqui nonnisi veritatem in casu singulari, nec reiterata eandem prodere in universali. Neque difficile est convincere quemvis a posteriori, quod a particulari ad universale non valeat argumentatio, cum ubivis prostent exempla, quibus idem doceri potest. Cum hoc modo excitaveris cupidinem sciendi, quod scire delectet; commodum jam erit ad theoriam progredi. Et ubi quis in cognitionis gradu primo acquirendo nostro more versatus fuerit, ad secundum consequendum præparatus accedit; in quo si denuo morem a nobis præscriptum sequaris, absque ulla molestia in theoria addiscenda progredi dabitur.

§. 132. Qui theoriæ operam navant, propter usum in disciplinis ceteris mathematicis; illi non modo omnes propositiones sibi familiares reddere, verum etiam habitum demonstrandi comparare tenentur. Quamobrem universa Elementa Geometriæ eo modo pertractare debent quem, acquirendi secundi & tertii cognitionis gradus causa, capite primo præscripsimus; & definitiones, ac propositiones pure enunciatas memoriæ firmiter infigere tenentur: quo plurimum confert accurata demonstrationum analysis, in quibus definitiones & propositiones pure enunciatæ tanquam principia adhibentur. Hoc enim pacto demonstrationum sequentium evolutio repetitionis vicem sustinet, qua definitiones ac propositiones pure enunciatæ memoriæ mandantur, & discenti familiares evadunt; quales supponuntur ad ceteras Matheseos partes absque difficultate pertractandas.

§. 133. Quod problemata attinet, quæ praxin continent; notandum est, praxin in charta exercendam usui esse in ceteris Matheseos partibus; quæ vero exercetur in campo, ea nullum habere in reliquis usum, nisi in Architectura militari, & in Astronomia, atque Geographia, nonnulla ex iis cognita atque perspecta supponi. Praxis accurata in charta magis ornat Mathematicum, quam necessaria est, si in sola theoria acquiescere voluerit. Neque is multo instrumentorum apparatu indiget; sed sufficit regula, cum circino, & graphio, cujus tamen vicem supplet penna

na ex corvorum alis evulsa (§. 123 *Geom.*). Problemata, quæ praxin in campo docent, non tamen prorsus negligenda. Eorum enim theoretica cognitio discentem præparat ad ceteras Matheseos partes facilius addiscendas. Necesse igitur est, ut resolutionem distincte concipiat, & demonstrationem nostro more resolvat, ac analytice exprimat; omni cura ac sollicitudine animi observans, quæ de iis, secundi cognitionis gradus acquirendi gratia, præcepimus, qui theoreticam Matheseos universæ cognitionem curæ cordique habet.

§. 134. Eadem tenenda sunt, si quis, intellectus perficiendi gratia, Geometriæ studet; sive tantummodo ad secundum cognitionis gradum, sive simul ad tertium extra Mathesin adspiret. Utilitatem percipiet qui, in Philosophia morali & civili, accurata diligentia versari, eandemque ad usum vitæ transferre, & theoriam physicam ad Artes perficiendas applicare voluerit.

§. 135. Qui a Geometria & Trigonometria ad Algebram progredi voluerit, is cognitionis gradum tertium in Mathesi intendit. Quamobrem ea ipsi observanda sunt, quæ de tertio cognitionis gradu acquirendo inculcavimus capite primo. Inprimis autem animum attendere debet ad præparationem, quæ demonstrationi præmittitur; cum ea opus quoque habeat in resolutione problematum geometricorum in Algebra, & in solutionibus, præsertim algebraicis, problematum in ceteris Matheseos partibus.

§. 136. Elementa Arithmeticæ & Geometriæ, per Mathesin universam, & in omni cognitione mathematica, quam philosophicæ contra distinguimus (§. 14 *Disc. prælim.*), apprime necessaria sunt, ita ut eorum notitia nemo carere possit, qui in ceteris Matheseos partibus ad cognitionis gradum secundum atque tertium adspirat. Quo majore igitur studio ac industria in illis fuerit versatus, eo felicius in reliqua Mathesi progredietur. Id etiam obtinebit, quod hodie in plerisque Mathematicis, & in seipso desideravit Vir summus NEWTONUS (§. 101), ut methodum Geometrarum veterum cum algebraica recentiorum conjungat, & utriusque compos reddatur: cujus insignem experietur usum, si ad summa quævis in Mathesi contendat, & exemplo NEWTONI naturam mathematice tractare voluerit; inprimis si quando volupe fuerit mathematicam rerum naturalium cognitionem in systema redigere, quantum fert ætas nostra, præsertim ubi ante officio suo satisfecerint Philosophi.

§. 137. Trigonometria plana, non minus quam Sphærica, primum in usum Astronomiæ fuit inventa. Quamobrem indispensabilis usus est in Astronomia, adeoque eam negligere nequit, qui nobilissimæ huic scientiæ operam dare decrevit. Postea quoque

quoque ad praxin geometricam in campo fuit applicata; quemadmodum capite ultimo Trigonometriæ planæ ostendimus. Quamobrem eidem quoque studere tenentur, qui praxin geometricam in campo exercere voluerint. Applicata eadem fuit ad varia problemata in Geographia, Hydrographia, Gnomonica, Mechanica, Architectura militari, & Opticis disciplinis: ut adeo commendanda veniat ad hasce quoque Matheseos partes animum appellentibus. Multo igitur illustrior est ejus usus, quam qui olim fuerat.

§. 138. Qui in sola praxi acquiescunt, iis satisfaciunt perpauca ista problemata, quæ capite secundo continentur; addituri ea, quæ continentur tertio, ubi Geometriam practicam curæ cordique habent. Hoc unicum notandum est, quod usum Canonis sinuum & tangentium, una cum Canone logarithmorum tam sinuum atque tangentium, sibi familiarem reddere teneantur, qui in usum praxeos Trigonometriam planam addiscunt; additis problematis, quibus in Arithmetica usus logarithmorum docetur (§. 349 *& seqq. Arithm.*), una cum definitione logarithmorum, & theorematis eorum naturam explicantibus (§. 334 *& seqq. Arithm.*); sed absque demonstratione.

§. 139. Exempla, quibus calculum trigonometricum illustravimus, adeo distincte repræsentavimus, ut ideam exemplarem resolutionis problematum animo insinuent, & resolutionis vicem tueri possint. Quamobrem ii, quos sola praxis juvat, eandem sibi familiarem reddere tenentur: id quod uno alteroque exemplo facile obtinetur. Exempla autem complura facile comminiscitur, qui numeris in exemplo proposito datis substituit pro arbitrio alios. Inprimis etiam suademus omnibus, quotquot praxin geometricam in campo exercere voluerint, ut exempla proprio marte addant problematis, quæ hunc in usum traduntur capite tertio. Reperiuntur autem ad imitationem eorum, quæ dedimus capite secundo. Nimirum non alia re opus est, quam ut data numeris exprimantur: id quod nihil difficultatis habet; præsertim cum in expendendis problematis data a quæsitis semper veniant distinguenda (§. 26). Quodsi hoc feceris, calculus erit idem, qui in problematis citatis: quæ etiam ratio est, cur eundem in textu non apposuerimus, ne præter necessitatem essemus prolixiores.

§. 140. Qui praxin oculatam desiderant, vel theoriæ tantummodo rationem habent; illos demonstrationes superaddere & in Trigonometria eodem modo versari debere, quem pro secundo & primo cognitionis gradu acquirendo supra præscripsimus, me vel tacente, intelligitur. Nihil adeo prætermittere tenentur, quæ in Elementis nostris continentur. Et

quam-

quamvis Canon sinuum atque tangentium, cum naturalis, tum artificialis, jam fuerit constructus, ut nullus amplius problematum, quæ in capite primo in hunc finem traduntur, videatur usus; ea tamen negligenda non sunt, ut appareat, quomodo Canones isti construi potuerint, & quomodo ex theoria praxis, ad quam tendit, deducatur.

§. 141. Inprimis hoc proderit iis, qui ad cognitionis gradum tertium adspirant. Ex hisce enim perspiciunt, quomodo ex cognitis alia incognita ratiocinando colligantur, & quomodo haud raro praxes prorsus inexpectatæ eædemque longe utilissimæ ex theoriis deriventur, quarum tantam prævidere non licebat utilitatem. Sane non alia de causa, postquam Canon sinuum & tangentium jam fuit constructus, Mathematici tamen recentiores alios eosdem construendi excogitarunt modos, quam quibus usi sunt illorum conditores. Non alia de causa, postquam docuimus Canonis sinuum atque tangentium constructionem, adjecimus scholion (§. 27 *Trigon.*), in quo monemus, eundem adhuc multis aliis modis construi posse; laudavimusque URSINUM, qui nonnulla præclara dedit, & in Algebra, ubi de serierum doctrina agitur, ostendimus, quomodo pro sinibus & tangentibus, nec non pro logarithmis reperiantur series infinitæ, ex quibus per approximationem deducuntur numeri, qui satisfaciunt.

§. 142. Trigonometria non modo pars quædam Artis inveniendi specialis est, cujus usus in aliis Matheseos partibus elucet (§. 137); sed tota etiam ita digesta, ut appareat, quomodo singula fuerint inventa, modo observare volueris, quæ de acquirendo cognitionis gradu tertio præcepimus capite primo. Ab ea igitur regulas generales Artis inveniendi non modo abstrahere licet; verum si præscripto a nobis modo, ad quem hic provocamus, pertractetur, ad ipsam quoque Artem inveniendi acquirendam aliquid conferet. Quamobrem studium trigonometricum rite instituendum tam iis, qui ad tertium cognitionis gradum in Mathesi adspirant, quam illis, qui Artem inveniendi in genere acquirere volunt, commendandum.

CAPUT IV.

De Studio Algebræ, seu Analyseos mathematicæ in specie.

§. 143. Analysis mathematica est ipsa Ars inveniendi, qua hodie utuntur Mathematici in veritatibus mathematicis investigandis. Huic adeo operam dare debent, quotquot ad cognitionis gradum tertium in Mathesi

Matheſi adſpirant. Etſi enim demonſtrationum more noſtro facta reſolutio etiam analytica ſit, ut eodem modo ex hypotheſi data inveniri poſſit, quo demonſtrandum quod demonſtratur; non tamen iis detegendis ſufficit, ad quæ Analyſis recentiorum ducit, tota vulgo Algebræ nomine appellari ſolita. Etenim, per Algebram, paucis cognitis, invenire licet quæ, ſi more veterum detegenda eſſent, longam rerum inventarum ſeriem ſupponerent. Quid, quod facili labore eruantur, quæ Herculeo inveſtiganda eſſent? Hæc ſane ratio eſt, cur inventa Mathematicorum recentiorum longiſſimo intervallo poſt ſe relinquant inventa Veterum, & quod uno ſeculo plura fuerint detecta, quam tot ſeculis inveniri potuerint, quibus Matheſis antea fuit exculta. Sane ſi ARCHIMEDES & APOLLONIUS noſtro ævo reviviſcerent; in ſtuporem rapérentur, viſis inventis recentiorum, quæ per Algebram fuerunt in apricum producta: neque enim unquam ſibi perſuaſiſſent, patere ad talia mortalibus aditum.

§. 144. Non tamen omnia per calculos algebraicos erui poſſunt, quæ ad Geometriam ſpectant. Patet id ex ipſa Geometria elementari. Etenim quæ ibidem de lineis perpendicularibus, de paralleliſmo linearum, de angulis, de congruentia & ſimilitudine triangulorum, aliiſque nonnullis demonſtrantur, per Algebram inveſtigari nequeunt. Pendent enim hæc a ſitu linearum, quem ad ſe invicem habent. Calculus vero algebraicus eſt calculus magnitudinum, non ſitus. Unde LEIBNITIUS in Analyſi recentiori adhuc deſiderari monuit calculum ſitus, a calculo magnitudinum prorſus diverſum; quem tamen nec ipſe dedit, nec dedit adhuc alius, ſed in deſideratis numeramus.

§. 145. Similiter Analyſin Veterum, qualem loquitur noſtra demonſtrationum analyſis, non eam eſſe qua, Algebra inventa, carere poſſimus, haud difficulter oſtenditur. Etenim antequam problemata geometrica, vel alia in Matheſi mixta ad Geometriam puram reducta, per Algebram ſolvuntur, reducendæ ſunt ad æquationes. Hæc vero reductio non modo ſupponit præparationem methodo Veterum inveniendam, verum etiam ipſamet per eandem methodum eruenda. Accedit ſubinde occurrere problemata, etiam in altioribus, quæ methodo Veterum multo brevius & elegantius ſolvuntur, quam per calculum algebraicum, qui haud raro admodum perplexus & nimis longus eſt. Accedit, quod abſque omni theoria calculo algebraico minime ſit locus. Hinc qui problemata phyſico-mathematica, vel etiam mechanico-phyſica ſolvunt, quædam tanquam cognita ſumere tenentur. Contingit autem haud raro, ut ſumant nondum ſatis explorata, vel ſi ea demonſtrare voluerint, quæ certa ſunt & methodo Veterum

rigide demonstrari poterant in dubitationem adducant ; ut adeo, quæ per calculum ex assumtis eruuntur, vel incertitudini obnoxia fiant, vel suspecta reddantur acutioribus, rigori Veterum adsuetis. Immo nullum est dubium, quin plura irrepserint a veritate aliena, ita ut inventa recentiorum Mathematicorum revisione quadam indigerent, & haud pauca firmiori fundamento superstrui mererentur. Nec alia ratio est, cur inter recentiores Mathematicos agitentur controversiæ, quales Veteribus erant ignotæ. Optime igitur sibi consulunt, qui methodum Veterum cum algebraica Recentiorum conjungunt. Et merito dolemus cum NEWTONO (§. 101), quod, illa neglecta, cito nimis pede ad hanc hodie properent, qui inter Mathematicos eminere volunt.

§. 146. In Analysi nostra, primo loco occurrit Arithmetica speciosa, quam etiam literalem appellare solent. Primo loco agitur de signis tam primitivis, quam derivativis. Occurrunt nempe signa quantitatum, & operationum arithmeticarum, quas vulgo species Arithmeticæ vocant. Quantitates, cum sint numeri indeterminati (§. 13 *Arithm.*), per determinatos explicabiles sunt. Quamobrem suadendum tyronibus, ut literas, quibus indigitantur quantitates, per plures numeros diversos explicent. Quoniam vero eædem quantitates etiam sub se comprehendunt quamlibet magnitudinem ; igitur non minus consultum est, ut etiam per magnitudines, veluti per lineas, explicentur. Linearum enim, & magnitudinum quarumvis determinatarum ratio ad aliam homogeneam, quæ pro unitate sumitur, per numeros determinatos definiri potest ; cum numeri revera omnes, tam rationales, quam irrationales, nonnisi rationem ad unitatem exprimant. Nimirum, quod literis generaliter, hoc est, indeterminate designatur, per numeros determinate exprimitur ; itidemque per magnitudines determinatas ; quatenus harum ratio ad aliam homogeneam pro unitate assumtam numeris, sive rationalibus, sive irrationalibus, exprimi potest : sit ita, quod hoc variis modis fieri possit pro diversitate ejus, quæ pro unitate sumitur, nec semper hoc præstare valeamus. Qui theoriam entis universalis, ab ipsa Mathesi abstrahendam, perspectam habet, multo intimius quæ dixi perspiciet, quam qui ab omni Philosophia prorsus alienum habet animum.

§. 147. Qui Artem inveniendi in genere curæ cordique habent ; modo universalia a specialibus abstrahere didicerint, multa animadvertent ad Characteristicam universalem spectantia, quam esse partem Artis inveniendi ipsa Arithmetica universalis, & calculus differentialis docet, suoque ostendemus loco, si quando ad Artem inveniendi explicandam ordo nos deducet. Ipsa autem

Ars Characteristica universalis plurimum lucis affundet, tum notationi numerorum in Arithmetica, tum signis, quibus utimur in calculo literali, sive communi, sive differentiali. Ceterum hic notandum est, signa primitiva, quæ in alia resolubilia non sunt, respondere notionibus confusis; derivativa vero distinctis: quemadmodum suo loco demonstrabimus. Qui enim novit differentiam, quæ inter notiones distinctas & confusas, quoad usum earundem, intercedit, quanta sit utilitatis huc adverti animum facile perspiciet.

§. 148. Ipsum algorithmum in integris satis perspicue explicavimus. Tyrones sibi eundem familiarem reddent, ubi diversis modis exempla literalia explicaverint per numeros determinatos, si ita visum fuerit, etiam per concretos, quemadmodum ostendimus (§. 28, 30 *Analys.*). Qui in Arte inveniendi generali proficere volunt, iis consultum est, ut ex ipsis hisce exemplis in numeris concretis datis addiscant, quomodo algorithmus literalis ex notionibus communibus deducatur, per quas primum inventoribus innotuerunt regulæ, quibus in eodem utimur; quamvis idem, utut non eadem facilitate, jam ex Elementis Arithmeticæ ac Geometriæ addisci poterat. Plurimum enim prodest ut noris, omnem tandem cognitionem humanam ex notionibus communibus fuisse deductam, in quocunque scientiarum genere. Et in Ontologia jam me monuisse memini, EUCLIDEM Elementa sua reduxisse ad notiones communes; consequenter, per ea, omnem Mathesin. Hoc notasse etiam usui erit in Mathesi mixta: demonstrabitur autem in Arte inveniendi generali, aliter fieri hoc minime posse.

§. 149. In multiplicatione quoad usum signorum fictiones occurrunt, veluti si quantitas sive positiva, sive negativa, per privativam multiplicanda venit (§. 34, 36 *Arithm.*). Unde liquet usus fictionum, ad conservandam notionum universalitatem. Etsi autem regulas, in subsidium vocata Geometria, demonstravimus; ut ad imaginationem reducantur, quæ vi intellectus concipienda; consultum tamen est, ut tyrones exempla statim in numeris addant, in iis regularum veritatem perspecturi, vel ipsas etiam regulas ex iisdem deducturi, quemadmodum in Elementis Germanicis feci. Clarius enim in numeris liquet, cur addendum sit, quod plus fuerat subtractum, vel subtrahendum, quod plus fuerat additum, ubi conceptibus universalibus, utpote nimium abstractis, nondum fueris adsuetus: id quod initio studii algebraici supponi nequit.

§. 150. Algorithmus fractorum literalis cum numeroso idem est; cum quantitates, quæ literis designantur, sint numeri indeterminati; regulæ autem

autem hujus algorithmi ex notione numeri generali fluant; consequenter ex iis deducantur, quæ numeris determinatis & indeterminatis communia sunt. Hinc tyrones sibi consulunt, si literis numeros substituant determinatos, ut clarius appareat, nihil hic occurrere diversitatis. Quæ vero problemate 7, & ejus corollariis, ac scholiis (§. 45 *& seqq. Analys.*), de seriebus infinitis per divisionem prodeuntibus docentur, initio prætermitti possunt ab iis, quorum attentio facile defatigatur; donec multo inferius in doctrina de seriebus infinitis iisdem habuerint opus, ubi attentio nihil amplius difficultatis facessit, cum multo usu jam major gradus fuerit acquisitus.

§. 151. Multiplicatio & divisio potentiarum, & elevatio ad potentiam, atque extractio ex radice, a Logarithmorum doctrina pendet, quam in Arithmetica tradidimus. Quamobrem, nisi hic in tenebris versari volueris, illam ante tibi perspectam reddere debes, quam ad Algorithmum dignitatum accedas. Inprimis autem hic notanda est reductio quantitatum irrationalium ad formam rationalium, & unitatis ad x^0 (§. 57, 55 *Analys.*), quoniam hæc reductio non modo multiplicem, eundemque prorsus eximium & inexpectatum, in altioribus habet usum; verum etiam apertissime loquitur, quantum intersit inter characteres primitivos & derivativos: id quod Arti characteristicæ generali, quam partem quandam Artis inveniendi esse supra jam monuimus, notiones fœcundas suppeditat.

§. 152. Usus hujus reductionis analyticus in Arithmetica irrationalium conspicitur; præsertim ubi ea, quæ nos de eadem tradimus, cum illis conferre velis, quæ vulgo in eadem docentur, veluti cum calculo irrationalium in Elementis Algebræ OZANAMI. Sane tractatio nostra tota vere analytica est, qualem requirit Analysis recentiorum mathematica. Et qui ad cognitionis gradum tertium adspirant, hinc discunt, quemnam facere teneantur characterum derivativorum usum; cumque inferius per Algebram eruamus (§. 146 *Analys.*) quæ hic ex charactere derivativo, regulis Artis characteristicæ generalis convenienter, deducuntur; hinc porro discere licet, quomodo ex characteribus, derivativis, modo magis naturali & ad Analysin Veterum propius accedente, eruantur, ad quæ Algebra via quadam extraordinaria ducit: sit ita quod tyrones, quibus intimius singula perspicere nondum datur, Algebræ magis fidant, quam Arti characteristicæ, quemadmodum indigitavi in scholio problematis 19 (§. 60 *Analys.*). Illustratur quoque doctrina fictionum in Arte inveniendi utilium, radicibus imaginariis, de quibus in scholio tertio problematis 13 (§ 71 *Analys.*). diximus. Et perplexa EUCLIDIS

de irrationalibus doctrina, ope hujus characteristicæ, ab omni perplexitate liberari, eidemque plena lux affundi potest; ut non amplius habeant, quod de obscuritate illius conquerantur, qui eandem ex Elementis hodie vulgo eliminare solent.

§. 153. Quibus calculus irrationalium sub initium molestus est, ii eundem prætermittant, & statim ad usum calculi literalis in inveniendis theorematis se transferant, absoluto algorithmo integrorum & fractorum; donec multo usu calculum literalem magis familiarem sibi reddiderint, majusque acumen acquisiverint ejus applicatione, & attentione majori uti didicerint. In ipso autem progressu patebit, quandonam calculo irrationalium habeas opus; ut gradum sistere & ad ea, quæ in anterioribus neglecta fuerunt, regredi tenearis.

§. 154. Sola Arithmetica literalis sufficit ad invenienda longe plurima, quæ in Elementis *Euclideis* docentur; ita ut, qui eam didicit, absque ullo negotio eadem facilitate theoremata *Euclidea* reperire possit, qua exemplis illustrantur. Ostendimus hoc capite tertio. Neque in problematis resolvendis, quæ ibidem proponuntur, alia notanda sunt, quam ut attendatur, quomodo datorum denominatio fiat, & ut literis designatæ quantitates numeris quoque exprimantur; quo pateat quid intersit discriminis inter exempla universalia & singularia, & hisce illis lux quædam affundatur, qua indigent tyrones. Observandum tamen, calculum in casu singulari instituendum esse, juxta regulas calculi universalis seu literalis, ubi iste pleniori luce fulgere debet. Ex. gr. in problemate 20 (§. 81 *Analys.*) jubemur determinare differentiam quadratorum, quorum radices unitate differunt. Diximus radicem unam n, alteram $n + 1$. Dicantur in casu singulari 7 & $7 + 1 = 8$. Quodsi quadratum majoris per calculum universalem reperias, erit $7.7 + 2.7 + 1 = 64$; Quadratum minus $= 7.7$, Differentia $2.7 + 1 = 14 + 1 = 15$. Ita nimirum constabit, calculum universalem etiam exerceri posse in numeris, & sic absque calculo literali eadem detegi posse, quæ per literalem eruuntur; quemadmodum & in Arithmetica fecimus, ubi v. gr. in genesin numerorum quadratorum & cubicorum inquisivimus. Consultius tamen est uti calculo literali, qui hoc commodo gaudet, ut numeri determinati ab indeterminatis sua sponte sese distinguant: cum si notis numericis uti volueris, artificiis demum opus sit, quibus hoc fiat. Ita in allato exemplo $2.7 + 1 = 14 + 1$, numerus binarius 2 est determinatus, idem in omnibus exemplis, sed 7 est indeterminatus, qui in omni exemplo alio alius. Collatio autem calculi literalis cum calculo universali, in exemplis singularibus, usui esse poterit

terit ad invenienda artificia, quibus absque ulla confusione calculus universalis in numeris utiliter exercetur. Nostrum non est ea hic docere uberius, quæ Ars inveniendi jure suo sibi vindicat. Etsi autem calculus universalis in numeris instituendus superfluus videri poterat, literali invento; falluntur tamen, qui ita sentiunt. Facit enim ad facile demonstrandum haud pauca in gratiam eorum, qui ad Analysin animum appellere nolunt, nec difficiles demonstrationes capiunt; quemadmodum patet per ea, quæ de genesi numerorum quadratorum & cubicorum in Arithmetica docentur. Neque nullus quoque ejus usus est in Analysi speciosa, prout ex sequentibus constabit. Taceo alia, quæ in ejus favorem dici poterant.

§. 155. Multa hic facillime, absque ullo fere negotio, eruimus theoremata, quæ in Elementis EUCLIDIS extant, eorumque plura erui poterant, nisi hæc specimina sufficerent. Alia vero investigavimus per Algebram. Enimvero jam supra monuimus (§. 144), per calculum literalem, qui nonnisi magnitudinum calculus est, non omnia in Geometria demonstrari posse theoremata, sed quædam pendere a situ; ad quæ investiganda & analytice demonstranda, peculiaris requiratur calculus situs. Quodsi Analysis situs fuisset reperta; non inconsultum foret integra Elementa EUCLIDIS analytice demonstrari; ut inter methodum Veterum, & Analysin Recentiorem clarius pateret differentia. Quodsi quis eam investigare voluerit, is novas condere tenetur definitiones situs notionem involventes; veluti quod *Punctum* sit situs sui unicum, quod *Circulus* sit figura plana, in cujus perimetro singula puncta ad punctum quoddam intra eam dato eundem situm habent, quod *Linea* una sit ad alteram *perpendicularis*, si punctum quodcunque in ea assumtum sit situs sui ad idem punctum alterius unicum. Dicitur autem *situs sui unicum*, quod ad aliam magnitudinem datam, seu punctum aliud datum, cum habet situm, ut nullum aliud præter ipsum eundem situm habere possit. *Eundem* vero *situm* habent, inter quæ idem extensum, veluti eadem linea recta poni potest (§. 5 *Geom.*). Præterea opus est novo calculo, calculo nempe situs: quem investigaturus perpendere tenetur, calculum in genere esse inventionem characteris derivativi ex aliis, sive primitivis, sive derivativis, per continuam æquivalentium substitutionem (§. 298 *Psych. empir.*). Hinc enim conficitur, diversos determinandos esse situs possibiles eorumque excogitandos characteres, & ut hos legitime combinare liceat, requiri axiomata quædam generalia aut, si mavis, regulas quasdam generales, quibus perficitur combinatio & substitutio.

Sed

Sed nobis minime vacat, ut in talibus investigandis ingenii nostri vires exerceamus, qui magnum adhuc campum emetiri tenemur, antequam Philosophiam universam ad umbilicum perduxerimus. Sufficit aliis monstrasse viam, qua sit ad metam contendendum. Reddat eandem proprio ingenio & propria industria perviam, qui hanc attingere voluerit.

§. 156. Quanta vero sit vis Artis characteristicæ, non modo ex singulis problematis, sed vigesimo præsertim nono, ejusque corollariis (§. 95 *& seqq. Analyſ.*) perspicitur; in quo binomium ad dignitatem quamcunque evehere docemur; quod deinde ad extractiones radicum (§. 98 *Analyſ.*), & ad infinitinomium ad dignitatem datam evehendum transferimus (§. 102 *Analyſ.*). Huc animum advertere debent non modo, qui in Analysi Recentiorum feliciter progredi voluerint, verum etiam qui eidem, Artis generalis inveniendi causa, operam navant.

§. 157. Quoniam vero non uno artificio analytico utimur in problematis istis per calculum literalem solvendis; singulis autem artificiis insunt generales notiones, quæ ad Artem inveniendi generalem spectant; eas inde abstrahere tenentur, qui Artis generalis inveniendi gratia in Analysi Mathematicorum versantur: ut vero hoc facere possint, acquirere sibi tenentur acumen pervidendi abstracta in concretis, quod quomodo comparetur docebimus in philosophia morali, ubi praxin virtutum intellectualium, inter quas etiam sibi acumen istud locum vindicat, expositurí sumus. Quodsi vero quis in addiscenda Mathesi eo modo versatus fuerit, quem capite primo præscripsimus, & inprimis in repræsentatione definitionum, propositionum, & demonstrationum symbolica industriam suam exercuerit, atque inprimis ad animum probe revocaverit, quæ in scholio generali ad algorithmum integrorum de abstrahendis regulis generalibus, juxta quas intellectus in eodem dirigitur, inculcavimus; is se hujus acuminis compotem fieri animadvertet: quod quomodo fiat, nunc exponere non lubet, ne extra oleas evagari videamur. Quemadmodum vero Mathesis & Philosophia mutuas sibi suppetias ferunt; ita quoque ad acumen istud ipso usu acquirendum haud parum confert Logica, qualem nos tradidimus idiomate Latino. Immo Ontologia etiam, & Psychologia, adjumento esse poterit. Quamobrem autor fui, ut, absolutis Arithmeticæ ac Geometriæ Elementis, studium Philosophiæ cum mathematico conjungatur. Et si quis in Arte inveniendi generali ex studio Matheseos proficere voluerit; ei suademus, ut, postquam in Philosophia fuerit cum laude versatus, Mathesin universam denuo pertractet, & huc inprimis animum advertat, quod ad usum facultatum in veritate cognoscenda

cenda

cenda uſui eſſe poteſt. Nullum enim dubito fore, ut perſpicillis philoſophicis uſus plus videat, quam cum iiſdem deſtitueretur.

§. 158. Inprimis autem opera danda eſt, ut tempeſtive adſuefiamus formulis algebraicis, tam per numeros, quam per lineas, explicandis. Quamobrem conſultum eſt, ut data exprimantur, tum numeris, tum lineis, & tam in formula ſubſtituantur pro literis numeri, quam figuræ conſtruantur juxta formulam: id quod cum in præſenti capite facillime ſuccedat, plurimum confert ad formulas per Algebram erutas, geometrice præſertim, minori moleſtia conſtruendas. Ex. gr. in problemate 24 (§. 90 *Analyſ.*), partes totius ſunt Q & q, & prodit aggregatum ex Q^2 & $Q^2 + 2Qq + q^2 = 2Q(Q+q) + q^2$. Quodſi fiat $Q = 4$ & $q = 3$, erit $Q + q = 7$, $Q^2 = 16$, $(Q+q)^2 = 49$, adeoque $Q^2 + (Q+q)^2 = 65$. Sed $2Q = 8$, adeoque $2Q(Q+q) = 56$. Eſt vero $q^2 = 9$. Quare $2Q(Q+q) + q^2 = 65$. Habes itaque etiam examen, quali inprimis indigent tyrones, ut tanto clarius perſpiciant, quod per calculum fuit erutum a veritate non eſſe alienum. Etſi enim exempla ſingularia non evincant veritatem in univerſali; tyronibus tamen magis ſatisfaciunt, quam ſi animum ad calculum advertentes nullibi a ſe aberratum eſſe obſervent. Neque deſtituitur ſumma probabilitate, ſi quidem formula analytica cum exemplo in numeris conſentit. Quoniam enim numeri nullo conſilio eliguntur, ſed potius ſumuntur, prout eos caſus obtulerit; vix credibile eſt te caſu incidere in numeros, qui ex ratione ſingulari ſatisfaciunt formulæ, in omni caſu minime veræ. In præſenti caſu dubium hoc eſſe nullum, quod quis movere poterat, oſtendi nullo negotio poterat, ſi calculus univerſali ratione inſtituatur etiam in numeris. Etenim ſi $Q = 4$ & $q = 3$, habebis $2.4^2 + 2.4.3 + 3^2 = 2.4(4+3) + 3^2$, hoc eſt, $2.16 + 2.12 + 9 = 8(4+3) + 9$, ſeu $32 + 24 + 9 = 32 + 24 + 9$. Vides autem pro numeris 4 & 3 ſubſtitui poſſe duos alios quoſcunque, ceteris ſemper eodem modo ſeſe habentibus. Sed nolim tyrones talibus defatigari, niſi tempeſtive adſuefieri voluerint calculo, univerſali ratione in numeris inſtituendo: quo in caſu conſultum foret, ut numeri determinati, in omni caſu iidem, qualis hic binarius ter occurrit, virgula transverſa notentur, nempe ut ſcribatur $\not{2}.4^2 + \not{2}.4.3 + 3^2 = \not{2}.4(4+3) + 3^2$. Quodſi Q & q explices per lineas & conſtruas tam quadratum ex compoſita $Q + q$, quam ex una Q, & deinde rectangulum ex compoſita Q & q in rectam Q bis ſumtam atque quadratum lineæ alterius q, formulam geometrice repræſentabis. Sed utriuſque figuræ æqualitatem intuitive non cognoſces,

quemadmodum numerorum, qui calculo secundum formulam instituto prodeunt. Hoc tamen non obstante figurarum constructio non omni utilitate caret. Neque enim figuræ eum in finem construuntur, ut examinis vicem subeant; sed ut discamus, quomodo formulæ analyticæ geometrice construantur, & earum sensus per figuras explicetur. Subinde tamen accidit, ut non minus veritatem formulæ intuendam præbeant figuræ, quemadmodum numeri. Taceo quod mechanicæ demonstrationi, de qua supra diximus, hic sit locus, si ad principium congruentiæ confugias & partes a figura una rescissas alteri superimponas, prout ipse usus docuerit. Enimvero quibus talia inutilia videntur, is ea prætermittat. Neque enim omnia conducunt omnibus.

§. 159. Nimirum calculus literalis, & ejus applicatio ad solutionem problematum, doceri poterat pueros & adolescentes; quorum captui consulitur, si, quæ abstracta sunt, ad sensum & imaginationem reducantur. In omni Philosophia utilis est hæc reductio; ut eidem nunquam satis adsuefieri possit, qui in hac inoffenso pede progredi voluerit. Quamobrem qui, intellectus perficiendi gratia, in Algebra versantur, talia negligere non debent, quæ superflua ac puerilia videntur aliis, qui in nuda veritatum mathematicarum cognitione acquiescunt. Maximæ quoque utilitatis est ad recte philosophandum, si actus imaginationis ab operationibus intellectus discernere valeas, ne abortus imaginationis cum notionibus realibus confundas: quemadmodum accidit summis etiam Mathematicis, qui imaginaria a realibus separare non didicere, neglectis exercitiis, quæ huc facere poterant.

§. 160. Difficilis est tyronibus doctrina de ratione quantitatum, quam in Arithmetica demonstravimus; præsertim si theoremata non exponantur per numeros, & demonstratio ad exempla non applicetur. Delectabuntur itaque, quando in problemate 32 (§. 124 *Analyf.*) videbunt, quomodo per calculum literalem, absque ullo negotio, omnia pateant; ut ad ea capienda sensuum magis usu, quam intellectus operationibus opus sit. Hæc ipsa autem voluptas, non modo amorem studii algebraici, sed & alacritatem idem prosequendi instillabit. Consultum vero est, ut literæ non minus per numeros rationales, quam irrationales explicentur: id quod non modo universalitatem theorematum per calculum erutorum confirmabit, verum etiam exercitio calculum irrationalium reddet magis familiarem. Immo, ne multitudine theorematum hic coacervatorum obruaris, sed ut singula absque molestia memoriæ infigantur, nisi hoc jam factum fuerit in Arithmetica, hoc ipso obtinebis. Quoniam vero theoremata verbis pure enun-

enunciata in usum futurum memoriæ mandanda sunt (§. 21); non minus consultum est, ut singula verbis enuncies. Hoc modo enunciatorum facilior quoque erit comparatio cum theorematis in Arithmetica propositis; cumque ea tota nitatur distinctis notionibus, faciet idem institutum ad notiones confusas ad distinctas revocandum, & animum impatientem reddet ad acquiescendum in confusis, per quas nobis veritatem perspicere videmur: id quod haud parum proderit in Philosophia ad præcavendam præcipitantiam, qua in periculum errandi adducimur, & in errorem haud raro præcipites damur. Theorema primum, quo investigatur ratio factorum communem efficientem habentium, multiplicatis scilicèt duabus quantitatibus, rationem quamcunque inter se habentibus, a & ma, per eandem tertiam c, ita repræsentatur:

$$\frac{a : ma}{c \quad c}$$

$$ac : mac = a : ma$$

Per numeros rationales explicabitur hoc modo:

$$\frac{8 : 12}{3 \quad 3}$$

$$3.8 : 3.12 = 8 : 12$$

$$\text{seu } 24 : \quad 36 = 8 : 12$$

Quodsi 24 dividas per 36 & 8 per 12; fractionibus $\frac{24}{36}$ & $\frac{8}{12}$ reductis, prodibit utrobique $\frac{2}{3}$, idem nempe exponens (§. 136 *Arithm*), quemadmodum requirit proportio (§. 149, 155 *Arithm.*).

Per numeros irrationales explicabitur hoc modo:

$$\frac{\sqrt{5} : \quad \sqrt{3}}{\sqrt{7} \quad \sqrt{7}}$$

$$\sqrt{5}.\sqrt{7} : \sqrt{3}.\sqrt{7} = \sqrt{5}.\sqrt{3}$$

$$\text{seu } \sqrt{35} : \quad \sqrt{21} = \sqrt{5} : \sqrt{3}$$

Quodsi denuo $\sqrt{35}$ dividas per $\sqrt{21}$ & $\sqrt{5}$ per $\sqrt{3}$, prodibit utrobique exponens idem $\sqrt{1\frac{2}{3}}$.

§. 161. Quodsi existimes, committi hoc pacto circulum vitiosum, cum fractionum reductio ad minores terminos supponat rationum doctrinam, & calculus quoque irrationalium eadem nitatur; non unum est, quod respondeo. Primum constat, calculum fractionum & irrationalium erui posse per Algebram, quemadmodum specimine quodam docuimus (§. 146 *Analys.*), & quod idem imitari detur in casibus aliis, etiam in algorithmo fractionum, monuimus (§. 147 *Analys.*). Sane per Algebram reperiri posse reductionem fractionum ad minores terminos, quod dubio careat, exemplo singulari hoc docere lubet. Sit fractio reducenda $\frac{9}{12}$ Fiat

$$\frac{9}{12} = y$$

$$\text{erit } 9 = 12y \quad | \; 3$$

$$3 = 4y \quad | \; 4$$

$$\frac{3}{4} = y$$

adeoque $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

 Quodsi

Quodsi pro $\frac{9}{12}$ substituas $\frac{na}{ma}$ vel si mavis *na* : *ma*; habebis regulam, quæ in Arithmetica ad fractiones ad minores terminos reducendos præscribitur. Cumque calculus hic nitatur axiomatis notissimis, intelligi etiam poterit ab iis, qui Algebram nondum didicerunt. Deinde notandum est, nos calculum fractorum & irrationalium jam tradidisse, independenter a problemate 32 (§. 124. *Analys.*), adeoque absque circulo vitioso a nobis illustrationis gratia adhiberi posse, quæ aliter jam demonstrata sunt, ut eorum, quæ traduntur, appareat consensus. Quamprimum vero scrupulus iste te angit, tollitur extemplo eo, quem diximus, modo. Quodsi quis Elementa Arithmeticæ & Geometriæ methodo analytica recentiorum demonstrare vellet; is calculum literalem cum numeroso in Arithmetica combinare poterat, & algorithmum fractorum, nullis suppositis de ratione quantitatum theorematis, per Algebram elicere tenetur, antequam per calculum literalem demonstret theoriam rationum. Ceterum hic notari velim, quam facile committatur circulosus vitiosus, qui non advertitur, ab iis, qui extra systema propositiones aliquas demonstrare volunt; ut agnoscatur necessitas systematum veri nominis in omni scientiarum genere, & ut principia, quibus utimur in demonstrando, desumantur ex systemate, in quo propositiones demonstrandæ vel non occurrunt, vel saltem non anteriore loco, quam principia ista, collocantur. Videmus etiam per præcipitantiam judicare eos, qui demonstrationi cuidam circulum vitiosum simpliciter imputant, qui nonnisi in relatione ad certum aliquod systema committitur; ubi nondum demonstraverunt, non posse condi systema, in quo veritates ita sibi invicem subordinentur, ut demonstrationi isti absque circulo vitioso sit locus. Ad talia omnino animum advertere tenentur, quotquot intellectus perficiendi curam gerunt.

§. 162. Inprimis etiam attentionem meretur problema 29 (§. 95. *Analys.*), quo theorema generale pro binomio ad dignitatem quamcunque evehendo investigatur, ope solius calculi literalis; quatenus scilicet ostendit, quomodo theoremata infinita ad unicum reduci possint, ita ut unum æquipolleat infinitis; ut præjudicium illud evellatur animo, quasi intellectus finitus non sit capax infiniti. Falsum enim esse hinc intelligitur, quod aliis quoque speciminibus comprobabitur in sequentibus, intellectum infinita comprehendere non posse; cum hic formulas numero infinitas sub una quadam contentas exhibeamus. Rationem, cur hoc fieri possit, perspiciet, qui attenta mente perpendere voluerit, quæ hic docentur. Nec minus idem problema singularem attentionem meretur,

tur, ob artificia ſingularia, quibus in eodem ſolvendo utimur, & quorum uſus etiam eſt in aliis, immo quæ artificia heuriſtica generalia ſuggerunt, extra Matheſin etiam uſurpanda.

§. 163. Elementa nimirum Analyſeos ita conſcripſimus, ut paucas præſcripſerimus regulas, reliqua vero artificia ipſo uſu inſinuentur: quibus cum utendum ſit, non modo in eo problemate ubi primum adhibentur, verum etiam in aliis ubi adhiberi poſſunt; ſi reflectendo ſuper iiſdem diſtincta eorundem notio animo imprimitur, & facilius eadem memoria retinentur, & eorum ſtatim meminimus, quando iiſdem denuo opus habemus, nec tentatis demum fruſtra aliis in ea caſu incidimus. Generalia vero Artis inveniendi præcepta ut inde abſtrahat, qui artificia quibus utimur nondum diſtincte animo concepit, & in rationes eorum inquiſivit, prorſus impoſſibile eſt. Quoniam generalia conſtituuntur ſimilitudine latente in ſpecialibus; ingenii quoque acumen mirifice augetur generalium iſta abſtractione, quam juvant regulæ de notione generis ex data notione ſpeciei formanda (§. 710 *Log.*), & de notione generum ſuperiorum ex notionibus inferiorum derivanda (§. 711 *Log.*), quemadmodum applicationem extra Matheſin adjuvant regulæ de notionibus ſpecierum ex notione generis (§. 712 *Log.*), & de notionibus ſpecierum aliarum ex notione ſpeciei unius deducenda (§. 714 *Log.*); quas ſingulas & ipſas a Matheſi abſtrahi poſſe, exempla docent, quibus problemata hæc illuſtravimus in Logica.

§. 164. Nemo a nobis requiſiverit, ut artificia ſpecialia, quibus utimur, ad notiones generales revocemus, & alias ſpeciales determinemus, quibus extra Matheſin in aliis veritatibus inveſtigandis opus eſt. Hæc enim pertinent ad Artem inveniendi generalem, quam ſuo loco, ſi Deo viſum fuerit, explicaturi ſumus: ubi in notis adjectis doceri poterit, quomodo ab artificiis analyticis Mathematicorum abſtrahantur, quæ in ea ex notionibus ontologicis, & pſychologicis, aliiſque Philoſophiæ principiis, demonſtrantur. Sufficit excitaſſe attentionem illorum, qui ſtudium Philoſophiæ cum mathematico conjungunt, ea methodo philoſophantes, qua nos utimur.

§. 165. Enimvero progrediamur ad Algebram proprie ſic dictam. Algebra primum non erat niſi regula arithmetica, quæ inſtar regulæ trium in eadem docebatur, & in numeris tantummodo exercebatur. Arithmetica literali a VIETA, Gallo, inventa, latior patebat ejus uſus; cum ſub literis, non ſolum numeri ſeu quantitates diſcretæ, ſed & magnitudines ſeu quantitates continuæ comprehenderentur. Unde calculum literalem VIETÆ ad Geometriam elementarem applicabat

GHETALDUS Italus in Libris *de Resolutione & Compositione mathematica*. Cum HARRIOTTUS Anglus, Arithmeticam literalem ope characteristicæ magis perfeciſſet, & CARTESIUS genuina characteriſtica potentiarum uſus, (quemadmodum jam obiter monuerat KEPLERUS in *Harmonica*, & rationem deſignationis perſpicue multo ante docuerat STIFELIUS in *Arithmetica integra*, numerorum coſſicorum naturam ex genuinis fundamentis eruens,) Algebram quoque ad Geometriam ſuperiorem applicaret; illuſtrior adhuc ejus evaſit uſus. Nos igitur ut in tradenda Algebra gradatim progrederemur, primum eam exercere docuimus in problematis arithmeticis determinatis; deinde etiam in indeterminatis; mox in problematis Geometriæ elementaris; tandemque in problematis Geometriæ ſublimioris. Quoniam vero Geometria ſublimior aliud adhuc calculi genus requirit, in quo quantitates ſupponuntur infinite parvæ, methodo a KEPLERO in *Stereometria* primum quaſi obiter indicata, a CAVALERIO in *Geometria Indiviſibilium magis promota* & a STEPHANO præſertim DE ANGELIS, atque GREGORIO A S. VINCENTIO ulterius exculta; hoc quoque calculi genus, cum reductione quantitatum ad ſeries infinitas per diviſionem MERCATORIS, & extractiones radicum *Newtonianas*, combinatum, explicavimus; & Algebræ uſum, adhibito hoc calculo in Geometria ſublimiori, multo latiorem expoſuimus. Ceterum cum in Geometria elementari omiſerimus theoremata nonnulla, quæ difficilius demonſtrantur; qualia ſunt de multiſectione anguli, ſeu diviſione circuli & arcus in partes quotcunque æquales, & de inveſtiganda ſoliditate corporum regularium, nec non de inſcriptione quorundam polygonorum in circulo ab EUCLIDE demonſtrata; Geometriam vero ſublimiorem methodo Veterum demonſtratam prorſus non attigerimus; quæ hic deſiderari poterant, per Algebram inveſtigare docuimus, ut una eademque opera & Ars inveniendi exerceretur, & theorematum ſcitu neceſſariorum cognitio acquireretur. Quoniam enim non cujuſvis eſt in numeris, & lineis, atque figuris conſeneſcere, & ab omnibus ſtudium Philoſophiæ cum mathematico conjungi conſultum ſit; plerique etiam non alio fine Matheſin puram tractare debent, quam ut in Philoſophia aliiſque ſtudiorum generibus felicius progrediantur; Elementa Arithmeticæ ac Geometriæ abunde ſufficere exiſtimavimus, ut genuinam methodum, ſine qua ad ſolidam rerum cognitionem in quocunque ſcientiarum genere perveniri minime datur, nobis familiarem reddamus; præſertim ſi demonſtrationes noſtro more reſolvantur, & ſingula analytice repræſententur, quemadmodum capite primo

primo præcepimus; & ceterarum veritatum mathematicarum facillimo modo acquirendam esse duximus cognitionem.

§. 166. Studium algebraicum ut facilitaremus, primas tantummodo exposuimus regulat (§. 141, 143 *Analys.*), easque statim applicavimus ad exempla; problematis eo consilio electis, ut vel artificium aliquod analyticum animo insinuent, vel veritatem quandam cognitu necessariam doceant. Ita problemate statim 38, quod in hoc genere primum est, (§. 144 *Analys.*) ostendimus, dari proprietates numerorum singulares, quibus ab omnibus aliis distinguuntur, & quæ differentiam eorum numericam constituunt. Hoc ipso illustratur doctrina de differentia numerica individuorum, in Ontologia a nobis tradita, & in Cosmologia, ac Psychologia demonstrata; ex doctrina autem de origine idearum in intellectu divino, prorsus a priori deducta, ex ipsa natura & attributis Dei, entis omnium primi, multo clarius elucescens, scholæ autem non satis animadversa, multo minus expensa. Quoniam vero exemplum nonnisi singulare est, numeri nempe nonnisi duodenarii; sequente statim problemate (§. 145 *Analys.*) theorema generale eruere docemus, tum ut pluribus exemplis confirmetur idea tam nobilis, multique per philosophiam omnem, tam practicam quam theoreticam, usus, tum ut uberius explicetur artificium problemata particularia, immo singularia, ad universalitatem revocandi; cujus jam specimina quædam dedimus in anterioribus, veluti cum problema generale de binomino ad dignitatem quamcunque evehendo (§. 95 *Analys.*), de radice quacunque inde extrahenda (§. 98 *Analys.*) & de infinitinomio ad dignitatem quamcunque evehendo proponeremus (§. 102 *Analys.*), & regulas de permutatione quantitatum, seu variatione ordinis earundem, ad universalitatem revocaremus. Similiter problemate 40 (§. 146 *Analys.*), specimine quòdam docui per Algebram investigari posse talia, quæ aliis etiam modis erui possunt, & in scholio (§. 147 *Analys.*) monui, idem in aliis quoque eodem modo procedere. Quod vero utilitate sua non destituatur, eandem veritatem pluribus modis diversis investigari, supra jam monuimus (§. 161). Illustravimus differentiam, quæ intercedit inter solutionem problematum in numeris abstractis & concretis (§. 161 *& seqq. Analys.*), & artificia reductionis insinuavimus (§. 163, 183, 184 *Analys.*). Cum de proportione harmonica & contra harmonica, nec non de numero pronico, & numeris polygonis, aliisque figuratis nihil dixerimus in Arithmetica, ne ejus theoriam nimium extenderemus, & a studio Geometriæ nimis diu detineremus tyrones, studii mathematici facile effecturi desertores; defectum

istum

istum hic supplemus, dum theoremata præcipua ad theoriam istorum numerorum spectantia per Algebram eruere docemus (§. 186 *& seqq. ac* §. 206 *& seqq. Analys.*). Idem a nobis factum esse in reliquis capitibus, qui animum huc advertere libuerit, facile deprehendet.

§. 167. Inprimis autem singularem attentionem meretur artificium prorsus singulare, quo in summandis quadratis & cubis, quorum radices in serie numerorum naturali progrediuntur, utimur (§. 200 *Analys.*), & quod mox ad summandas potentias quascunque numerorum naturalium transferimus (§. 203 *Analys.*), ac deinde ad summandos numeros polygonos (§. 212 *Analys.*), & ad summandos quoque pyramidales adhibemus (§. 216 *Analys.*). Quantum enim eodem præstetur, abunde intelliget, qui quæ hac methodo eruuntur conferre voluerit cum *Arithmetica infinitorum* WALLISII & inprimis BULLIALDI. Facile autem apparet, methodum hanc ad alia problemata arithmetica solvenda transferri posse, perinde ac calculus summatorius in Geometria amplissimum habet usum. Nec puto faciliori modo potentias, & numeros figuratos summari posse. Loquuntur autem hæc ipsa problemata, & problema de binomio ad dignitatem infinitam evehendo, ac radice quacunque ex eodem extrahenda, ut alia taceamus, quam ardua problemata per calculum literalem, & Algebram solvi possint, etiamsi paucissima theoria fueris instructus; ut adeo methodi hæ, in Arte inveniendi, præ methodo Veterum sese maxime commendent. Per eas enim aditus ad ea patet, quæ a nostra cognitione intervallo quam longissimo adhuc sunt remota. Clarius idem elucescet in sequentibus. Unde si quis in Mathesi inventorem agere voluerit, ei Analysis Mathematicorum recentiorum nunquam satis commendari potest.

§. 168. Per universam Analysin, in solvendis problematis, calculum integrum distincte exhibuimus; ut quilibet tyro proprio marte intelligat, quomodo problema fuerit solutum, & quomodo ordine in solutione sit progrediendum, quem præscribunt regulæ generales ab initio expositæ. Lineis quoque distinximus ea, quæ ex anterioribus concluduntur, ab iis, ex quibus colliguntur per communem algorithmum. Non tamen hoc ipso solutiones reddidimus prolixiores, quin potius in minus easdem spatium haud raro coarctavimus. Et qui citra confusionem, quæ errorem facile parit, absque ulla molestia, problemata solvere voluerit; eo modo calculum instituere tenetur, quo eundem in contextu repræsentamus. Quilibet adeo experietur, nullibi ipsi esse hærendum, modo attentionem afferre voluerit. Equidem, brevitatis gratia, nonnisi speciminibus quibusdam ostendimus,

quo-

quomodo formulæ algebraicæ verbis explicentur, ut prodeant regulæ, per quas problema solvitur in dato quocunque casu particulari; nec non quomodo theoremata ex calculo eruantur. Suadendum tamen tyronibus, ut idem faciant in singulis problematis. Sentient utilitatem, ubi in hoc labore sese præstiterint diligentes. Explicavimus formulas per numeros; ut discant tyrones, quod eædem instar regulæ sint, quæ per calculum eruuntur universalem. Initio tamen utilitate sua non caret, si solutionem algebraicam tentent in exemplis singularibus, numeris in locum literarum, quibus quantitates datæ designantur, surrogatis, quemadmodum exemplo aliquo ostendere lubet. In problemate 41 (§. 148 *Analys.*), datur duarum quantitatum summa & eorundem factum, quæruntur quantitates ipsæ. Quare si sit summa $a = 14$, factum $b = 48$; resolutio talis erit:

Sit summa $= 14$, semidiffer. $= x$
factum $= 48$, erit Quantitas

$$\begin{array}{r} \text{maj.} = 7 + x \\ \text{min.} = 7 - x \\ \hline -7x - x^2 \\ 49 + 7x \\ \hline \text{Factum} = 49 - x^2 \end{array}$$

Ergo

$$\begin{array}{c} 49 - x^2 = 48 \\ \hline 1 - x^2 = 0 \\ \hline 1 = x^2 \\ \hline 1 = x. \end{array}$$

Quare $7 + x = 8$, & $7 - x = 6$.

§. 169. Quodsi problemata quoque per Algebram numerosam solvas; non modo hinc elucescet discrimen inter Algebram numerosam & speciosam, & hujus præ illa præstantia agnoscetur; cum per istam nonnisi exempla computentur, per hanc vero solutiones, adeoque veritates universales detegantur; verum etiam calculus algebraicus reddetur familiarior & clarior. Hoc vero suademus nonnisi primis tyronibus. Qui enim in calculo jam fuerint versati, istiusmodi exercitiis non amplius habebunt opus. Consultum vero est exemplum calculi numerosi conferri cum calculo specioso; tum ut appareat, quantum conveniant, quantum differant, tum ut numerosus lucem affundat specioso. Quodsi quis universalitatem in calculo numeroso conservare velit, haud difficulter idem præstabitur, quemadmodum exemplum modo allatum, & hic alia forma exhibitum, docet:

$$\begin{array}{c} 7^2 - x^2 = 48 \\ \hline 7^2 = 48 + x^2 \\ \hline 7^2 - 48 = x^2 \\ \hline \sqrt{(7^2 - 48)} = x \end{array}$$

Vides nimirum, in quolibet casu, a quadrato semisummæ 7^2 subtrahendum esse factum & ex residuo extrahendam radicem, ut habeas semidifferentiam numerorum quæsitorum. Quodsi Veteres hoc animadvertissent,

ſent, per Algebram numeroſam, ante inventum calculum literalem, non minus veritates univerſales eruiſſent, quam nunc per ſpecioſam erui ſolent. Si enim in calculo numeroſo univerſalitatem conſerves, ſpecioſo prorſus æquipollet, quemadmodum collatio utriuſque calculi intuenti extemplo prodit. Immo hoc pacto etiam, eodem ſucceſſu, per Algebram numeroſam ſolvi poterant problemata geometrica, quemadmodum nunc ſolvuntur per ſpecioſam. Sed de hoc dicemus ſuo loco. Ratio in aprico eſt. Per calculum ſpecioſum obtinentur ſolutiones univerſales, quia idem in omni caſu particulari, & pro literis, quibus quantitates datæ deſignantur, numeri quilibet ſubſtitui poſſunt, ſalvo calculo integro. Idem vero ſuccedere eodem modo in calculo numeroſo, qui univerſalitatem conſervat, per ſe patet. Quoniam ſigna primitiva, qualia ſunt quibus exprimuntur quantitates datæ, prorſus arbitraria ſunt; notis autem numericis ſignificatum univerſalem imponere licet; univerſum a ſingulari, quem habent, abſtrahere licet: veluti ut 14 non ſignificet ſummam ex duobus numeris determinatis, (quas hic eſſe 8 & 6 ſolutio prodit), ſed ſummam ex duobus quibuſcunque numeris, immo generalius ex duabus quibuſcunque quantitatibus compoſitam, veluti ſi ſignificet lineam in duas quaſcunque partes diviſam; & ſimiliter 48 non denotet factum ex duobus numeris determinatis iiſdem cum anterioribus, quorum ſumma eſt 14, ſed potius factum ex duobus quibuſcunque aliis, cum illis tantummodo iiſdem qui ſummam conficiunt, vel generalius ex duabus quibuſcunque quantitatibus, cum illis iiſdem ex quibus ſumma componitur; veluti quando 14 ſignificet lineam in duas quaſcunque partes diviſam, ſi 48 denotet rectangulum ex parte una in alteram.

§. 170. Non difficile fuiſſet Veteribus hæc animadvertere; ſi quidem in univerſalia in iis, quæ cognoſcebant, latentia mentis aciem intendere voluiſſent, & a notatione numerorum notiones Artis characteriſticæ univerſales abſtraxiſſent: ad quod faciendum non defuit ipſis acumen, ſed defecit tantummodo attentio ad ea quæ, pro ſcopo præſente, ſatis cognita atque perſpecta deprehendebant. Diſcant hinc velim omnes, quibus puerilia, aut ſaltem ſuperflua videntur, quæ ad tractandam Matheſin præcipimus; quantum non modo ſibi, verum etiam ſcientiæ deſint, qui, quæ ſe ſatis intelligere arbitrantur, ea nulla amplius attentione dignantur, & vulgarium meditationem ad ſublimia nitentibus non convenire arbitrantur. Multo luculentius hæc patebunt, ubi Artem inveniendi explicare licuerit. Nos experti, quantum valeat vulgarium meditatio, nulli dubitamus, quin in Philoſophia univerſa, præſertim in Phyſica, & Philoſophia morali, im-

mo

mo ipſa civili, dudum principia certa, per quæ ad remotiora paratur aditus, conſtituiſſent Philoſophi; ſiquidem ad notiones communes, ex maxime vulgaribus derivandas, ſufficientem attentionem afferre voluiſſent. Neque vero exiſtimandum eſt, convenire hæc iis, quibus ad ſublimiora non conceditur aditus. Etenim non leve acumen requiritur, ut notiones communes, quas ſuppeditant obvia, non modo ad diſtinctas & determinatas revoces, ſed & inde univerſales abſtrahas. Quænam enim, quæſo, ratio eſt, cur notionum communium, admodum fertilium, quemadmodum vel EUCLIDIS Elementa teſtantur, immo ipſa quoque Algebra confirmat, non cum hactenus fecerint uſum Philoſophi, nec etiam in dirigendis actionibus viri prudentes, quem facere poterant, niſi quod negligantur ab iis, qui acumine alios vincunt. Sane cur Mathematici ſummi, quorum acumen accuſari nefas, genuinam demonſtrationis formam non apprehenderint, ratio alia non eſt, quam quod eandem attentione ſufficiente dignati minime fuerint, ſine qua diſtinctam ejus notionem conſequi minime datur. Conſtat autem, quantum ſibimetipſis defuerint, tum ubi demonſtrationes more Veterum in ipſa Matheſi dare voluerunt, tum quando extra eandem veritates quaſdam demonſtrare conati ſunt. Quo majore acumine maxime vulgaria perluſtrantur, eo profundiora in iis latentia in apricum proferuntur.

§. 171. Poſtquam uſum Algebræ in ſolvendis problematis Arithmeticis determinatis oſtendimus, ad problemata indeterminata progredimur capite ſecundo. Applicamus in eo Algebram ad problemata pleraque DIOPHANTI, a quo horum ſolutio *Analyſis Diophantea* appellari ſuevit. Ex quo Algebra ad Geometriam, præſertim ſublimiorem, & inprimis ad problemata phyſico-mechanica applicata fuit; Analyſis Diophantea negligi cœpit, ita ut præter OZANAMUM in *Elementis Algebræ*, vix quiſquam fuerit alius, qui ultra *Diophànteos* limites eandem promovere conatus fuerit. Quam minus recte autem hoc fiat, jam LEIBNITIUS monuit, qui ejus præclarum uſum in Analyſi infinitorum obſervavit. Singularibus in iis artificiis haud raro opus eſt, tum ſi denominationem ſpectes, tum ſi reductionem conſideres. Quamobrem ſuadeo, ut, qui horum problematum ſolutionem expendit, in rationem inquirat, cur denominatio hoc modo fuerit facta & reductio hoc modo inſtituatur, ubi aliquid inuſitati occurrit. Ex. gr. in problemate 92 (§. 230 *Analyſ.*), quo ſummam duorum quadratorum in duo alia quadrata dividere jubemur, ubi latus quadrati majoris dicitur a, minoris b; latus quæſiti unius appellatur $a-z$, latus alterius $yz-b$. Ratio denominationis non patet per communes

 regulas

regulas: per eas enim dicendum erat latus unum x, alterum y (§. 141 *Analyſ.*). Enimvero ſi denominatio hoc modo fiat, habebimus $a^2 + b^2 = x^2 + y^2$, conſequenter $x = \surd (a^2 + b^2 - y^2)$. Sed hæc ſolutio nulla eſt, cum in Analyſi Diophantea ſolutio quæratur in numeris rationalibus. Quamobrem in ſcholio (§. 231 *Analyſ.*) monuimus, cur ad vitandam irrationalitatem, latera quadratorum quæſitorum ſumſerimus $a - z$ & $yz - b$. Enimvero cum idem non fecerimus in ceteris, ſed propriæ diſcentis meditationi reliquerimus; neceſſe eſt ut ad rationem generalem animum advertens ſpecialem ex conditione calculi eruat.

§. 172. Quoniam in problematis indeterminatis facilius aberratur, ubi ſingularia artificia adnibenda ſunt; tyronibus ſuadendum, ut problemata generaliter ſoluta etiam in numeris aliquoties ſolvant, quo artificia iſta ipſis magis familiaria reddantur. Conſultum etiam eſt, ut, ubi formulas generales per numeros explicaverint, examen addant, quo numeros repertos conditionem in problemate præſcriptam habere innoteſcit. Ex. gr. in problemate 87 (§. 225 *Analyſ.*), reperiuntur numeri 11 & 6, quorum partes aliquotæ numeris ſuis additæ efficere debent eandem ſummam. Quoniam 11 eſt numerus primus, quem quippe ſola unitas metitur (§ 75 *Arithm.*), præter unitatem partem aliquotam aliam non habet (§. 30, 74 *Arithm.*). Unitas igitur ſi eidem addatur, ſumma efficitur 12. Aſt ſenarii partes aliquotæ ſunt 1, 2 & 3, quas ubi addas ipſi numero 6; habebis itidem ſummam 12. Similiter, per formulam generalem determinantur duo numeri 104 & 116. Illius partes aliquotæ ſunt, 1, 2, 4, 8, 13, 26 & 52: hujus vero 1, 2, 4, 29 & 58. Eſt vero $1 + 2 + 4 + 8 + 13 + 26 + 52 + 104 = 210$, & $1 + 2 + 4 + 29 + 58 + 116 = 210$. Nec inconſultum eſt, ut etiam in hac Analyſi formulæ algebraicæ verbis explicentur, quemadmodum ſupra præcepimus (§. 168); ſi quis præſertim Matheſin non ſibi ſoli diſcit, ſed intellectus potiſſimum perficiendi gratia eidem incumbit. Etenim non leve exercitio opus eſt, ut, quicquid animo concipis, verbis diſtincte enuncies. Niſi vero hac facultate polleas, in ſtudio philoſophico, & quocunque alio ſcientiarum genere, accurata methodo nunquam uteris. Extra Matheſin non habemus characteres & figuras, quibus imaginatio juvatur, & defectus diſtincte enunciandi, quæ concipiuntur vi intellectus, ſuppletur. Inprimis autem uſui eſt, ut quam maxime abſtracta verbis perſpicuis accurate enunciare valeas; ubi tibi propoſitum fuerit, ex perceptionibus obviis eruere notiones univerſales quæ iiſdem inſunt, & veritatibus in caſu particulari agnitis omnem ſuam tribuere

ampli-

amplitudinem, quam habere possunt: id quod mirifice conducit ad omnem cognitionem promovendam, & prudentiam, qua ad recte agendum opus habemus, amplificandam. Immo augebitur eodem medio notiones distinctas formandi facultas, quæ non adeo facile acquiritur, quemadmodum vulgo putatur, præsertim ubi cum abstractis tibi fuerit negotium. Scholastici in distinguendis iis, quæ diversa sunt, satis fuerunt acuti; sed quæ confuse perceperunt distincte concipere, & verbis perspicuis accurate enunciare non valuerunt. Quamobrem Metaphysicam tenebris involverunt, nec ratiocinando quicquam ex notionibus confusis colligere potuerunt; ut scientia nobilissima in terminologiam versa fuerit, ac proinde a nonnullis perperam pro Lexico quodam philosophico habita. CARTESIUS vero, qui notionum distinctarum usum indispensabilem in scientiis perviderat, Ontologiam in eorum numerum retulit quæ contemni merentur; & in Physicis, imaginaria cum realibus confudit, ut ad veritatem liquidam pertingere non potuerit; Philosophiam vero practicam, quam excoli maxime interest, prorsus intactam reliquit; etsi ipsi propositum esset Philosophiam reformare, cujus defectus abunde agnoscebat.

§. 173. Sed dicta sufficiant de applicatione Algebræ ad problemata arithmetica. Progrediamur itaque ad problemata geometrica, quæ capite tertio traduntur. Problemata geometrica duo singularia habent. Etenim plerumque artis est invenire æquationem; nec ea tam obvia est, quemadmodum in problematis arithmeticis puris, ubi scilicet numeri dantur abstracti. Deinde non minoris artis est formularum algebraicarum, per quas determinatur quæsitum, constructio geometrica. Immo subinde difficultate non caret, ut reperias, quid quæri debeat, ut in commodam incidas solutionem. Quamvis vero problemate 110 (§. 250 *Analys.*) præscribantur regulæ generales de invenienda æquatione; eædem tamen non ita determinatæ sunt, ut in dato quolibet casu statim appareat, quanam earum utendum sit ad æquationem inveniendam, sed haud raro variis id tentandum est modis. Similiter in problemate 111 & 112 (§ 252, 253 *Analys.*) docuimus, quomodo construantur æquationes simplices & quadraticæ omnes; monuimus tamen in scholio (§. 254 *Analys.*), quod hoc modo raro incidamus in constructiones concinnas, quales sunt, quæ in Elementis Geometriæ extant, cum tamen concinnæ potissimum desiderentur. Quamobrem modus quo pervenitur ad æquationem, & quo æquatio ultima, per quam determinatur quæsitum, construitur, majorem attentionem meretur, quam qua in

problematis arithmeticis usi fuimus; ut pateant artificia, quibus utimur, in aliis casibus similibus, quando occurrunt, imitanda. Ut autem constructionem concinnam reperias, primo tentanda est per regulas generales, quæ præscribuntur. Deinde dispiciendum, quomodo omnes linearum determinationes eidem schemati includantur, in quo lineæ singulæ commodum nanciscantur situm; ut prodeat schema, quod visum minime offendit, & in quo citra molestiam lineæ ex loco uno in alterum transportantur. Nulla adhuc datur constructionum elegantium theoria, in qua elegantia, quam ipsi tribuimus, ad notiones distinctas reducitur; quamvis ea non impossibilis sit. Pendet ea a principiis generalibus pulchritudinis entis compositi, quam & ipsam nemo hactenus explicavit. Insunt Architecturæ civili notiones quædam generales, quæ huc faciunt; sed nemo hactenus ad eas, quantum publice constat, animum advertit. Quamobrem hactenus, in casu omni, demonstrari nequit, constructionem, quam dedisti, esse eam, in qua nihil desiderari possit. Et haud raro, casui magis quam arti tribuendum, quod in constructionem incidas, quæ pulchritudine sua sese commendat. Neque vero existimandum est, si vel in nostris Analyseos Elementis, vel apud autores alios, occurrunt constructiones elegantes; eas ex formula algebraica juxta regulas generales resoluta primo statim conamine deductas fuisse. Quin potius pro certo tenendum, eas haud raro multum negotii fecisse inventoribus, antequam ad eam formam deducerentur, quam habent. Ceterum ut dicta intelligantur, specialia quædam addenda sunt.

§. 174. In problemate 113 (§. 255 *Analys.*), quo, ex data perimetro & area trianguli rectanguli, hypothenusam invenire, ipsumque triangulum construere docemus, non minus æquationis investigatio, quam trianguli constructio singularia quædam habent, quæ attentionem merentur. Quodsi in investiganda æquatione via ordinaria, quam monstrant regulæ generales, incedere voluissemus, hoc modo æquatio inventa fuisset.

$AB + BC + CA = a \qquad AC = x$

$\text{Area} = b^2 \qquad AB = y$

erit

$AB + BC = a - x$

$BC = a - x - y$

Duæ cum inveniendæ sint æquationes, alteram suppeditat theorema Pythagoricum, vi cujus $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (§. 417 *Geom.*), alteram vero area trianguli $= \frac{1}{2}$ AB. BC (§. 392 *Geom.*). Habemus itaque

$$x^2 = 2y^2 + a^2 - 2ax + x^2 - 2ay + 2xy$$
$$0 = 2y^2 + a^2 - 2ax - 2ay + 2xy$$
$$2ax - 2xy = 2y^2 + a^2 - 2ay$$
$$x = \frac{2y^2 + a^2 - 2ay}{2a - 2y}$$

$$b^2 = \tfrac{1}{2}ay - \tfrac{1}{2}xy - \tfrac{1}{2}y^2$$
$$\tfrac{1}{2}xy = \tfrac{1}{2}ay - \tfrac{1}{2}y^2 - b^2$$
$$xy = ay - y^2 - 2b^2$$
$$x = \frac{ay - y^2 - 2b^2}{y}$$

Quam-

Quamobrem

$$\frac{2y^2 + a^2 - 2ay}{2a - 2y} = \frac{ay - y^2 - 2b^2}{y}$$

$$2y^3 + a^2y - 2ay^2 = 2a^2y - 4ay^2 - 4ab^2 + 2y^3 + 4b^2y$$

$$0 = a^2y - 2ay^2 + 4b^2y - 4ab^2$$

$$2ay^2 - 4b^2y - a^2y = -4ab^2$$

$$y^2 - \frac{4b^2 + a^2}{2a}y = -2b^2$$

Fiat $\frac{4b^2 + a^2}{2a} = m$,

erit $y^2 - my = -2b^2$
$\frac{1}{4}m^2 \quad \frac{1}{4}m^2$

$$y^2 - my + \frac{1}{4}m^2 = \frac{1}{4}m^2 - 2b^2$$

$$\left.\begin{matrix} y - \frac{1}{2}m \\ \frac{1}{2}m - y \end{matrix}\right\} = \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - 2b^2)}$$

$$y = \frac{1}{2}m \pm \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - 2b^2)}$$

Vides hic, quam prolixus evadat calculus, si viam ordinariam ingrederis stricte inhærens regulis generalibus. Incidis in æquationem quadraticam affectam; cum in solutione, quam in textu dedimus, æquatio sit simplex, adeoque primi gradus. Quodsi y per constructionem geometricam determinare volueris, primo eruendus est valor ipsius m. Est vero $m = \frac{4b^2 + a^2}{2a} = \frac{2b^2}{a} + \frac{1}{2}a$. Unde patet, te eadem opera, si æquatione in contextu utaris, reperisse hypothenusam, qua hic valorem m reperis, quo in constructione geometrica æquationis ultimæ hic opus habes: ut adeo dubitari non possit, constructionem quoque fore multo prolixiorem, & intricatiorem ea, quam in contextu exhibemus. Abbreviatur calculus, & æquatio multo simplicior eruitur, quia problema ad æquationem reducturus uteris theoremate de compositione quadrati, cujus radix binomia (§. 261 *Arithm.*); adeoque plures veritates cognitas supponis, quam si viam ordinariam ingrederis; & ad circumstantias particulares animum attendis, quarum viam ordinariam ingressus nullam habes rationem. Nihil itaque hic singulare occurrit, quod non eodem modo locum habeat in aliarum regularum generalium applicatione. Qui ea attentione utitur in addiscenda Mathesi, quam in capite primo inculcavimus; rationem hanc jam didicit in Practica Italica, ubi, ob circumstantias singulares, ope theorematum quæ tanquam cognita præsupponuntur, & quorum in regula trium opus non habemus, calculus abbreviatur. Discas hinc velim, quod, si nostro more in studio Arithmeticæ & Geometriæ versatus acumen quoddam tibi comparaveris, te in studio quoque algebraico fore acutiorem, & dum eidem incumbis, in majore luce versaturum. Acumen vero, hoc studio algebraico auctum, non uno nomine sese tibi commendabit, ubi ad Philosophiam & alia addiscendum

dum, progredieris, immo in ipsa praxi vitæ. Enimvero constructio quoque trianguli rectanguli, ex perimetro & area datis, attentionem meretur. Vulgo triangula rectangula construimus ex datis cruribus, quibus ad angulum rectum junctis determinatur hypothenusa: quæ etiam ratio est, cur problema per regulas generales solventes investigamus cruris y valorem. Construi vero etiam potest triangulum rectangulum data hypothenusa & altitudine: quæ constructio denuo uberiorem theoriam supponit, quam communis; quod facile animadvertes, ubi fundamentum, quo nititur constructio, perpendere volueris. Unde vides cur, inventa hypothenusa, etiam quæsiverimus altitudinem. Et quoniam inventa in numerum cognitorum refertur, x non amplius spectatur tanquam magnitudo incognita, sed pro cognita habetur; ut adeo constructionem præter necessitatem efficeres prolixiorem & intricatiorem, si pro x valorem inventum in æquatione $y = b^2 : \frac{1}{2}x, = 2b^2 : x$ substituere velles. Immo commodius accidit, si retineas $y = b^2 : \frac{1}{2}x$, quam si, reductione modo ordinario facta, sumas $y = 2b^2 : x$. In quo denuo latet quoddam artificium, quod in geometricis constructionibus formularum algebraicarum utile est, & quo etiam in sequentibus utimur.

§. 175. Regulas arithmeticas non adscripsimus, brevitatis gratia; non modo, quod geometricarum constructionum hic potissimum habetur ratio; verum etiam quod ex anterioribus satis manifestum supponimus, quomodo formulæ algebraicæ arithmetice explicentur, & regulæ arithmeticæ inde deducantur. Non tamen ideo tyrones negligere debent formularum per numeros explicationem, & regularum arithmeticarum enunciationem. Etsi vix opus esse videatur, exemplo præsenti rem declarari; ut tamen consulamus minus perspicacibus, id fecisse non nocebit. Æquatio itaque $x = \frac{1}{2}a - 2b^2 : a$ hanc suppeditat solutionem arithmeticam, adhibito artificio, quod sub finem paragraphi præcedentis commendavimus: 1. Quæratur ad perimetrum dimidiam $\frac{1}{2}a$, & latus quadrati areæ æqualis b, tertia proportionalis, quæ erit $\frac{2b^2}{a}$. 2. Hæc subtrahatur a semiperipheria $\frac{1}{2}a$, relinquetur hypothenusa quæsita. Arithmetice explicabis formulam hoc modo. Sit $a = 12$, $b^2 = 6$. Erit $\frac{1}{2}a = 6$, adeoque $x = 6 - \frac{12}{12} = 6 - 1 = 5$.

§. 176. Qui ex solutionibus problematum proficere voluerit, quantum datur; is negligere minime debet theoremata, quæ offerunt æquationes. Quamobrem in problemate, quod nunc perlustramus, docuimus, quomodo theorema ex æquatione secunda, seu penultima eruatur. Enimvero ipsa etiam æquatio ultima theorema

rema non inelegans suppeditat. Cum enim $2b^2 : a$ vel $b^2 : \frac{1}{2}a$ sit differentia inter semiperimetrum trianguli rectanguli $\frac{1}{2}a$ & hypothenusam x, extemplo patet theorema sequens: *Differentia inter hypothenusam & semiperimetrum trianguli rectanguli est tertia proportionalis ad semiperimetrum & latus quadrati areæ trianguli æqualis.* Non video quid obstet, quominus hoc theorema ceteris Geometriæ elementaris adscribi possit; nisi quod usum, quem habere possit, non prævideas: nullum enim esse demonstrare minime vales. Sane si hæc ratio sufficeret ad theoremata ex Mathesi eliminanda, multa ex eadem arcenda & olim fuissent, & nunc essent; quorum egregius prorsus, successu temporis, comparuit usus, & in posterum comparebit. Ecquis prævidere poterat usum, quem habet comparatio progressionum arithmeticarum & geometricarum, cui inventum logarithmorum longe utilissimum deberi constat, & qua STIFELIUS usus in algebraicis æquationibus intimius explicandis? Quodsi igitur hanc comparationem tanquam inutilem rejicere voluissent Mathematici, locum in Mathesi eidem denegaturi, quod usum ejus minime prævidenrent; logarithmorum doctrina & ardua illa, quæ in Mathesi sublimiori ab eadem pendent, forsan hodienum non essent detecta. Inventores non solliciti esse debent, num, quod investigandum sibi sumunt, utile sit, sed num quod investigaverunt sit verum. Utilitas enim sua veluti sponte sese manifestabit, ubi in veritate investiganda progrediuntur, quam prævidere nullo modo poterant. Multum obest incremento scientiæ, si qui eam promovere possunt ac volunt, hoc præjudicio tenentur, quod de veritatis inveniendæ utilitate prima moveri debeat quæstio. Hæc enim cura tangere debet nonnisi eos, qui ab aliis inventa certo fine addiscunt; etsi cautione multa opus sit, ubi utilitatem ex vero æstimare voluerint; ne, quemadmodum plerumque accidit, quæ maxime utilia sunt pro inutilibus reputentur.

§ 177. Forsan non inconsultum judicaveris, ut constructiones ex calculo erutæ, itemque theoremata hinc derivata etiam more Veterum, seu synthetice demonstrentur. Non improbo consilium, ubi hoc facile fieri potest, & ea fini problemata quædam per leges rationum reduximus, quemadmodum problema 116 (§. 259 *Analys.*); ubi ipsa reductio demonstrationem quæsitam continet, modo singulæ analogiæ verbis enuncientur. Enimvero, cum per Algebram solvantur problemata, quæ a cognitione nostra adhuc procul sunt remota; defectu principiorum ad ratiocinandum requisitorum, per quæ ratiocinando colligi poterat quæsitum, quemadmodum in Geometria fecimus; multa haud raro theoremata interme-

dia essent invenienda, antequam demonstratio synthetica dari posset. Unde facile intelliges eam non esse in potestate tua. Sume exempli loco theorema, quod modo (§. 176) elicimus: In triangulo rectangulo differentia hypothenusæ a semiperimetro est tertia proportionalis ad semiperimetrum & latus quadrati triangulo æqualis. Si demonstrationem syntheticam dare volueris; hæc analogia ex aliis notis colligenda per theoremata de ratione quantitatum. Enimvero in Geometria elementari nihil adhuc demonstratum est de perimetro trianguli rectanguli. Quamobrem alia adhuc invenienda essent theoremata, antequam demonstrationem consummatam dare possis, quales dedimus in Geometria. Nobis jam non vacat eam in rem inquirere, ut exemplo dicta confirmaremus. Nemini igitur suademus, ut tempus in quærendis istiusmodi demonstrationibus fallat, quod longe utilius in exercenda Analysi consumere datur. Quodsi vero obvia fuerit demonstratio, eam addi non dissuademus.

§. 178. Si existimaveris demonstrationes syntheticas dari posse, si vestigiis calculi insistens verbis enuncies, quæ per eum patent, & in reddendis rationibus ad leges calculi confugias; totus falleris: neque enim forma demonstrationis mutabitur, si characteribus expressa verbis enunncientur. Abunde hoc videre licet in *Phoronomia* HERMANNI, cujus prætensæ demonstrationes syntheticæ seu lineares, quas vocat, quantum distent a demonstrationibus *Euclideis* nullo negotio deprehendet, qui cum fuerit in resolvendis demonstrationibus more nostro versatus resolutionem demonstrationum *Hermannianarum* tentare voluerit. Præstat igitur in analysi acquiescere, quam per eandem reperta minus recte demonstrare. Sane ipse NEWTONUS (quod citra injuriam in maxima Viri summi merita dictum esto,) multa, corollariorum instar, absque ulla demonstratione subjicit propositionibus, quæ subinde prolixam desiderant demonstrationem, si *Euclideo* more evincenda eorundem veritas; immo corollariorum loco habet quæ absque ulla demonstratione pateant lectori, quæ posita propositione minime ponuntur. Exempli loco est, quando problema inversum virium centripetarum in sectionibus conicis pro corollario directi habet, cum tamen conversio per se minime pateat; nec quis ferret, in Geometria elementari, si, ex parrallelismo linearum demonstrata angulorum æqualitate, per modum corollarii absque demonstratione inferret: Ergo etiam parallelæ sunt lineæ, si anguli alterni fuerint æquales. Non omnes propositiones posse converti, ex doctrina logica de conversione satis manifestum est. Quamobrem ubi conversio per rationes logicas non statim patet, conversa utique

demon-

demonſtranda eſt. Immo cum ex principiis logicis demonſtrandum foret, propoſitionem converti poſſe; Geometris veteribus conſultius viſum ex principiis propriis, aliunde non ſupponendis, demonſtrare converſam. Nos vero, qui omnibus juſtum ſtatuere pretium ſolemus, demonſtrationes logicas in numerum artificiorum heuriſticorum referimus, per quas reperire, nonnunquam ſaltem conjectare licet, propoſitionem aliquam datam & demonſtratam converti poſſe. Qui intellectus perficiendi gratia Matheſi operam navat, is a rigore demonſtrandi ne latum quidem unguem recedere tenetur; ne methodi confuſæ notiones & de eadem concepta præjudicia noceant extra Matheſin: quod quam facile fieri poſſit, jam in ſuperioribus monuimus (§. 100, 101).

§. 179. Ceterum, cum demonſtrationibus ſyntheticis confundendæ non ſunt demonſtrationes, quibus evincitur conſtructionem juxta formulam per calculum erutam rite eſſe factam. In his enim ſupponimus quæſitum eo modo determinandum eſſe, quemadmodum exigit formula algebraica. Quoniam nos conſtructiones ad formulam retulimus, earundem demonſtrationes in ipſa conſtructionum explicatione jam continentur. Quodſi vero illas verbis enunciare velles, demonſtratio ubique adjicienda foret, de qua hic ſermo eſt. Ita in exemplo noſtro, ubi triangulum rectangulum conſtruendum ex formulis $x = \frac{1}{2}a - 2b^2 : a$ & $y = b^2 : \frac{1}{2}x$ (§. 255 *Analyſ.*); conſtructio pure enunciabitur hoc modo: Fig. Algebr. Tab. XII. Fig. 113.
1°. Erigatur ad perimetrum BD perpendicularis AB, quæ ſit ad latus quadrati areæ trianguli æqualis in ratione dupla; fiatque BG ipſi lateri huic æqualis. 2°. Quæratur ad BD, AB & BG quarta proportionalis BH. 3°. Fiat BC ſemiperimetro æqualis; & ex C in I transferatur modo inventa BH. 4°. Super BI deſcribatur ſemicirculus; & ad BO dimidiam ipſius BI, & BE dimidiam ipſius AB, quæratur tertia proportionalis BK. 5°. Ducatur denique ex puncto K diametro BI parallela KL. Quodſi 6°. punctum L cum extremis diametri B & I rectis BL & LI connectatur, prodibit triangulum rectangulum quæſitum BLI. Hoc modo ſi enunciaveris conſtructionem, ut prodeat reſolutio problematis, quali forma exhibentur reſolutiones in Geometria elementari; demonſtratio ſequens adjicienda utique eſt, ut manifeſtum evadat, ſuppoſitis formulis algebraicis tanquam veris, ſeu, uti loqui amamus, iiſdem conceſſis, conſtructionem eſſe veram. Nimirum quoniam $BD = a$, $AB = 2b$, $BG = b$; erit quarta proportionalis $BH = 2b^2 : a$. Quare cum ſit $BC = \frac{1}{2}a$ & $CI = BH$, erit $BI = x$, ſeu hypothenuſa trianguli rectanguli conſtruendi per formulam primam. Jam quia porro $BO = \frac{1}{2}x$, $BG = BE = b$, erit BK

$= b^2 : \frac{1}{2}x$, adeoque altitudo trianguli rectanguli construendi. Quoniam itaque recta KL est ipsi BI parallela & BLI semicirculus super hypothenusa trianguli descriptus; erit BLI triangulum rectangulum, cujus hypothenusa $\frac{1}{2}a - 2b^2 : a$ & altitudo $= b^2 : \frac{1}{2}x$. Quod erat construendum. Suppono nimirum hic tanquam notum, quomodo triangulum rectangulum datæ altitudinis supra hypothenusa sit construendum. Quodsi enim notum non sit, demonstratio ex principiis Geometriæ elementaris facile contexitur. Etenim angulus BLI, cum sit in semicirculo *per constr.* rectus est (§. 317 *Geom.*), adeoque BLI triangulum rectangulum, cujus hypothenusa BI (§. 91, 95 *Geom.*). Linea KL est diametro BI parallela, & KB ad BC perpendicularis, *per construct.* consequenter perpendicula inter easdem intercepta KB & ex L in BI demissum æqualia sunt (§. 226 *Geom.*). Enimvero KB est altitudini trianguli æqualis, *per construct.* & perpendiculum ex L in BI demissum ipsa trianguli BLI altitudo (§. 227 *Geom.*). Patet itaque si supra hypothenusa describatur semicirculus & in ejus altero extremo erigatur perpendicularis altitudini æqualis, per ejus vero summitatem ducatur recta diametro parallela & punctum, in quo hæc secat semicirculum, connectatur cum extremis diametri; triangulum rectangulum datæ altitudinis supra hypothenusa data esse constructum. Problema hoc, cum sua demonstratione, Elementis Geometriæ inseri poterat; ex cujus quippe principiis eodem prorsus modo demonstratur, quo problemata cetera ibidem demonstrantur.

§. 180. Cum formulæ algebraicæ contineant regulas, per quas ex datis determinatur quæsitum; & per calculum ac demonstrationem æquationis, nisi hæc in conditione seu hypothesi problematis continetur, verum esse constet, quod sic determinetur quæsitum, quemadmodum vult formula; qui constructiones ex formulis erutas pure enunciat, & easdem deinde hisce convenienter factas demonstrat, in demonstrando sese non minus exercet, quam si in demonstrationibus Arithmeticæ & Geometriæ elementaris versetur. Quamobrem qui methodum demonstrandi sibi familiarem reddere intendunt, eadem extra Mathesin feliciter usuri; iis omnino suadendum, ut constructiones pure enuncient, & ad eam formam redigant qua resolutiones problematum in Geometria elementari exhibentur, atque deinde demonstrationes, cum quibus jam nobis negotium est, superaddant.

§. 181. Et quoniam problematum simplicium reductio per leges rationum, cujus exempla quædam dedimus (§. 259, 266, 289 *Analys.*), & reductio quadratici ordinis ad lineas reciprocas (§. 263, 265, 278 *Analys.*) propius accedit ad Analysin Ve-

terum,

terum, & demonſtrationes ad formam Veterum componendas formaliter continet; eam negligere minime debet, qui methodum Veterum cum methodo Recentiorum conjungere voluerit. Probe nimirum notandum eſt, ſignorum uſu non variari ipſam methodum, quæ in modo ratiocinandi conſiſtit, ſed tantummodo facilitari & clariorem reddi; quemadmodum demonſtrationes Veterum eædem manent, ſi noſtro more reſolutæ, ope Artis characteriſticæ, ſymbolice repræſentantur. Sane per hoc, quod in Geometria elementari utamur ſignis, quorum in Algebra uſus eſt, demonſtrationes non fiunt algebraicæ, quemadmodum hebetiores judicant; ſed tantummodo brevius & clarius exprimuntur. Vocabula non minus ſigna ſunt, quam ſigna alia, quæ in locum eorum ſurrogantur. Quemadmodum itaque eadem manet demonſtratio, ſi vocabula idem ſignificantia ſibi mutuo ſubſtituis, prouti in verſionibus accidere ſolet, ubi v. gr. Latinis ſubſtituis Germanica, vel Gallica; ita nec alia evadit, ſi vocabulis alia ſigna ſubſtituis, quæ cum ipſis idem ſignificant. Ita perinde eſt, ſive dicas, triangulum BDE ſimile eſt triangulo BAC, ſive ſcribas, △ BDE ∽ △ BAC: etenim ſi verbis reddere volueris, quæ ita ſcripſiſti, verbis iſtis eadem efferre teneris; perinde ac dicendum eſt, *das Dreyecke* BDE *iſt dem Dreyecke* BAC *ähnlich*, ubi Germanice reddere volueris, quod Latine dictum fuerat.

§. 182. In problemate 114, (§. 257 *Analyſ.*) quo, data area trianguli rectanguli, cujus latera ſunt in proportione continua, inveniri jubentur latera; & reductio, & conſtructio ſingularia habet, quæ attentionem tyronum merentur. In reductione notandus eſt modus, quo eliminatur quantitas alterutra incognita, utpote a regula generali recedens (§. 141 *Analyſ.*). Notanda quoque eſt applicatio calculi irrationalium, qua formula efficitur ſimplicior. In conſtructione autem notatu dignum eſt artificium, quo numeri irrationales in lineis exhibentur, & radices quoque quadrato-quadratæ per Geometriam elementarem conſtruuntur. Quæ enim in aliquo problemate ſingularia occurrunt, ad ea advertendus eſt animus, cum eidem inſinuentur artificia, quibus utendum in caſu ſimili, quoties is occurrit. Et ſelecta dicuntur problemata, quæ vel in veritatum cognitu neceſſariarum notitiam nos deducunt, vel artificia ſuggerunt, quibus Ars inveniendi locupletatur, ipſo uſu rectius diſcenda, quam per præcepta; cum hæc non ſatis intelliguntur, niſi per exempla. Quamobrem qui in Analyſi proficere voluerit, non ſine ſingulari attentione circa ſingula problemata verſari tenetur; ut, ſi qua nova occurrunt, ea comparatione cum regulis generalibus inſtituta advertat & memoriæ infigat.

§. 183. Non commemoramus hic alia, quæ in ceteris problematis annotabit attenta mente & ſolutionem & conſtructionem perluſtrans; ne præter neceſſitatem juſto prolixiores videamur. Unum tamen eſt, quod notaſſe non piget, ſcilicet ex problemate 124 (§. 275 *Analyſ.*) patere, per Algebram ſubinde prodire formulas, quæ ſtatim dant conſtructionem, quam Veteres ſuo modo invenerunt. Patet in hoc problemate ratio, quod in æquatione inveſtiganda inſiſtamus iiſdem principiis, quibus uſi Veteres in eruenda conſtructione. Et quamvis problema ſequens (§. 279 *Analyſ.*) de latere Pentagoni inveniendo contrarium inſinuare videatur; videbis tamen, ſi attentius rem conſideres, nos totos in eo eſſe, ut inveſtigemus relationem lateris Pentagoni ad latus Decagoni & Hexagoni regularis eidem circulo inſcriptorum ſimul, qua nititur conſtructio Veterum. Eam vero non dare regulas reductionis generales; ſed utendum hic eſſe ſingulari artificio ſubſtitutionis; quo neglecto, per æquationem $x^2 = 4b^2 - b^4 : a^2$, vel per $\frac{10}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ longe alia prodiret conſtructio, quam dedere Veteres. Immo niſi relatio lateris Pentagoni ad latus Decagoni & Hexagoni ſimul, ex inventis Veterum, nobis cognita & perſpecta fuiſſet; non facile adfuiſſet ratio, cur de iſta ſubſtitutione cogitaſſemus. Duo igitur hic probe notari velim, cum in veritate inveſtiganda multum relictum ſit tentaminibus, in problematum reſolutionibus algebraicis & præſertim in formularum conſtructionibus, operam dandam eſſe ut problema & ejus conſtructio efficiatur dependens a veritatibus aliis jam inventis; quæ dependentia in methodo Veterum, qua uſi ſumus in Geometria elementari, & in demonſtrationibus propoſitionum ſyntheticis, unice attenditur, & ut ea fini tententur ſubſtitutiones, quibus locus eſſe poteſt. Elucefcit hinc uſus, quo commendatur ſtudium in veritatibus nobis jam notis analytice inveſtigandis, ſi nempe proponantur tanquam quærendæ. Iſtiuſmodi enim inveſtigationes efficient, ut animum attendas ad artificia, quæ alias eundem non ſubirent, & quibus poſthac felici ſucceſſu uſurus es in inveſtigandis iis, quæ nondum cognita, ſed adhuc latent. Neque enim ſufficit, artificia quædam eſſe in poteſtate noſtra; verum etiam requiritur ratio, cur eadem mentem noſtram ſubeant, quando iiſdem commode utimur: id quod ex principiis noſtris pſychologicis abunde patet. Ratio autem iſta non ſemper a nobis pendet, ſed a caſu, qui poteſtati noſtræ ſubducitur. Quodſi vero artificia nobis fuerint familiaria, quoniam iiſdem jam ante uſi ea attentione convenienete memoriæ infiximus; probe conſcii varia eſſe tentanda, ubi veritas latens eruenda; eadem nobis in memoriam revocamus: id quod

quod denuo per principia nostra psychologica manifestum est; ut nihil affirmetur, quod non ex iisdem demonstrari possit, si demonstratio exigatur; quamvis defectum demonstrationis hic suppleat experientia domestica, si quis dictis fidem habere voluerit.

§. 184. Forsan nec inconsultum erit quædam adhuc moneri circa examen Regulæ *Renaldinianæ* polygonum regulare quodcunque circulo inscribendi. Constat ex Elementis EUCLIDIS, constare modum, quo trigonum, quadratum, pentagonum, octogonum, decagonum, quindecagonum circulo inscribitur, & idem patet ex anterioribus. Quamobrem totum examen huc redit, ut investigetur valor lateris cujusdam polygoni, aut saltem partis ejusdem, per regulas demonstratas; deinde vero idem valor eruatur per regulam RENALDINI; quæ si vera fuerit, valor per eam inventus erit alteri æqualis. Quodsi ergo hosce duos valores æquales ponas, & exinde eruas contradictionem; hinc patebit, regulam *Renaldinianam* esse falsam, cum alteram veram esse constet. Nimirum hinc agnoscitur illam contradicere veritati manifestæ, adeoque, per principia logica, quibus nititur tota methodus demonstrandi per indirectum, colligitur eam falsam esse debere. Examen adeo præsens pendet a principio contradictionis, & in applicatione methodi demonstrandi per indirectum consistit. Eodem artificio utimur etiam in aliis; veluti si quis dederit Quadraturam circuli; sumta diametro pro unitate, valorem peripheriæ eruimus in fractionibus decimalibus, quia constat numeros LUDOLPHI notissimos cum veritate consentire. Quodsi enim ab his diversi prodeant, prætensam quadraturam circuli veritati contradicere, adeoque falsam esse colligitur. Novi equidem quod huic examini manus victas dare nolint, qui circuli quadraturam sibi invenisse videntur: sed hi sunt, qui ignorant, quomodo numeros suos eruerit LUDOLPHUS, & quales sint methodi recentiorum, quibus investigantur series infinitæ pro circulo, unde iidem numeri deducuntur. Valeat hic pervulgatum istud: Cum ignorante principia non est disputandum.

§. 185. Quantum intersit discriminis, inter constructionem elegantem & minus elegantem, clarissime elucescit, ubi utramque constructionem * trianguli rectanguli, ex data area una cum angulo uno obliquo, inter se conferre volueris. Ipsa vero hæc collatio etiam manifestabit rationem, cur constructio secunda prima sit elegantior. Constructio secunda simplicitate sua sese ita commendat, ut in Geometriam referri possit. Habet autem hoc singulare constructio, quod recta simul repræsentet sinum totum, & rectam datam; sicque loco quartæ proportionalis invenienda sit

* Probl. 149.

ſit tertia, ſingulari modo per conſtructionem trianguli rectanguli determinata, qui ab eo longius recedit, quem in Elementis Geometriæ docuimus; etſi hujus quoque fundamentum in illis ipſis contineatur. Quodſi quis conſtructionibus æquationum in Algebra ſedulam operam navaverit; is varias ſolutiones ex Elementis demonſtrandas deteget, quæ in uſum conſtructionum elegantium in Algebra non ſine tyronum commodo, poſthac Geometriæ elementari inſerentur; ut hæc ampliorem nanciſcatur uſum, & ſtudium conſtruendi formulas algebraicas facilitetur.

§. 186. Problema 152, cum duobus ſequentibus (§. 325 *& ſeqq. Analyſ.*) inter difficilia referri ſolet. Ita autem eadem reſolvimus, ut nec tyronibus quicquam difficultatis faceſſant. Præmittitur, in reſolutione primi, theorema quod tanta facilitate ex principiis Geometriæ elementaris demonſtratur, ut ipſum in iiſdem Elementis locum mereatur. Hoc ipſo autem exemplo docemur, quod in uſum Analyſeos & Geometriæ ſublimioris, ſupplementum quoddam Elementorum Geometriæ conſcribi poſſet, quo ſtudium algebraicum & Matheſeos mixtæ multum facilitaretur. Sane ſi hoc ipſum theorema, quod ad reſolvendum problema præſens primus adhibuit NEWTONUS, ab EUCLIDE jam fuiſſet traditum; Mathematici alii non tantopere in reſolvendo hoc problemate deſudaſſent. Confirmat igitur problematis præſentis reſolutio ea, quæ ſuperius (§. 176) inculcavimus de non contemnendis theorematis, quæ nullum uſum habere videntur, ſeu quorum ſaltem uſum prævidere minime licet. Vi hujus theorematis, ſolo calculo literali, abſque regulis Algebræ, ex ſinu & coſinu anguli ſimpli eruuntur ſinus & coſinus dupli, tripli, quadrupli, quintupli, ſextupli, ſeptupli &c. ita ut hoc problema jam ſuperius c. 3. exhibere potuiſſemus, ubi uſus calculi literalis in inveniendis theorematis explicatur. Apparent adeo denuo, quam ardua ſolo calculo literali eruantur, etiamſi Algebra prorſus ignota ſupponatur. Inprimis vero animum attendi convenit ad artificium, quo ex theorematis particularibus eruitur univerſale. Conſiſtit hoc in reductione ad theorema generale de binomio ad dignitatem quamcunque evehendo; & reductio ipſa nititur comparatione formularum particularium problematis præſentis cum formulis particularibus problematis ſuperioris. Principium hoc reductionis ampliſſimum habet uſum in omni Arte inveniendi, etiam extra Matheſin; quemadmodum jam in Pſychologia me monuiſſe memini. Inprimis autem reductio problematis unius ad aliud, quod notius & ſimplicius, in Geometria ſublimiori & in calculo integrali uſum prorſus eximium habet. Quamobrem con-

consultum est hoc artificium tempestive observari. Tollit reductio hæc, in casu præsente, omnem laborem, eumque valde molestum, quo alias opus foret, si eodem modo legem progressionum in infinitum, quam formulæ particulares loquuntur, ex earundem comparatione elicere velles; quemadmodum supra fecimus, cum theorema generale de binomio ad dignitatem quamcunque evehendo investigaremus. Ostendi etiam, quomodo ex formula cosinus multipli, expungatur valor sinus simpli, per legem substitutionis, ut cosinus multipli determinetur per solum simplum atque sinum totum. Hoc modo eruuntur alia theoremata particularia; & universale quoque aliud prodiret, si eadem substitutione valores b^2, b^4, b^6, b^8, &c. eliminare velles. Quem calculi molestia non deterret, is eundem tentare potest; quamvis non opus habeamus hisce theorematis, cum dato sinu facile reperiatur cosinus (§. 16 *Trigonom.*). Ceterum hic quoque elucet, quomodo infinita theoremata comprehendantur uno generali. Sed cum hic nihil occurrat, quod non jam animadversum fuerit in problemate 29 (§. 95 *Analys.*); plura ea de re non addimus. Corollarium vero, quod adjicitur, attentionem meretur, ut notes alibi etiam profutura. In eodem scilicet ostendimus, quod idem theorema inserviat determinandis chordis arcuum multiplorum, quo sinus angulorum multiplorum determinantur: immo quod hinc etiam pendeat multiplicatio arcus, & consequenter anguli per datum numerum. Notandum igitur hic est; in scientiis, problematum quoque æquipollentiam esse perpendendam; non modo, ne entia præter necessitatem multiplicentur, verum etiam ut, in solutione problematis investiganda, seligamus illud quod facilius solvi potest. Sane, in nostro casu, non adeo prona erat solutio, si loco sinus anguli multipli investigandam tibi proposuisses chordam arcus multipli. Neque enim meditatio te duxisset ad theorema geometricum, cui debetur solutionis problematis præsentis facilitas. Multum in philosophia usum habet, ut æquipollentia agnoscantur. Quamobrem qui, intellectus perficiendi gratia, Mathesi operam navant, ea probe notare tenentur, ad quæ hic attentionem excitamus.

§. 187. Problema de tangente arcus multipli ex data tangente simpli invenienda, quod operosissime solvitur ab aliis, hic nullo fere negotio solvitur, si nostram solutionem cum aliis solutionibus compares. Notanda igitur sunt artificia, quæ facilitatem solutionis pariunt. Primum artificium, idque palmarium, in eo consistit, quod problema hoc consideretur tanquam dependens ab altero de inveniendo sinu anguli multipli ex dato sinu simpli. Unde intelligitur, quantæ sit utilitatis, ut

ut dependentiæ problematum a se invicem habeatur ratio. Quoniam vero hoc pacto prodit formula, tangentem anguli multipli ex datis sinu & cosinu simpli, non ex tangente simpli determinans, quod quærebatur; ideo, per legem substitutionis, valores sinus & cosinus simpli eliminamus, ut eorum loco introducatur tangens anguli simpli. Duæ sunt quantitates exterminandæ, nimirum *a* & *b*. Singulari autem ratione hic accidit ut, cum una earundem *a*, eliminetur etiam altera *b*: quod nisi succederet, substitutione nihil efficeres, propterea quod valorem ipsius *a*, per tangentem *t* expressum, ingreditur simul *b*, & vicissim valorem *b*, per *t* expressum, simul *a*. Atque hæc forsan ratio fuit, cur problema nostrum independenter a problemate sinus & cosinus anguli multipli inveniendi solvendum esse visum fuerit. Unde patet veritatem investigaturum non nimis tribuere debere iis, quæ apparent; & , nisi impossibilitas fuerit demonstrata, non obstante apparentia tentandum esse, quod successu cariturum videtur. Tentaminibus enim in veritate investiganda multum esse tribuendum nemo diffitebitur, nisi qui eorum usum nondum fuit expertus. Ceterum hic quoque attentionem meretur artificium, quo utimur in abbreviando calculo, eoque a perplexitate tædiosa liberando; dum pro coëfficientibus substituimus literas majores, pro quibus deinde, calculo absoluto, iterum reponuntur earundem valores. Etsi enim eodem artificio jam antea fuerimus usi, veluti in problematis 54 & 81 (§. 165, 213 *Analys.*); applicatio tamen in casu præsenti non statim cuilibet succurrit, nisi qui in anterioribus ad idem artificium animum attendit, & distincta notione comprehensum memoriæ infixit; quemadmodum ex natura animæ, vi principiorum nostrorum psychologicorum, facile demonstratur. Ea enim dedimus in Psychologia principia, per quæ ratio a priori dari potest, in casu dato, eorum quæ in anima contingere observamus. Denique notandum est, quomodo formula pure enuncietur, ut prodeat solutio facillima intellectu, in locum formulæ surroganda. Continet ea legem progressionis in infinitum, qua nituntur formulæ particulares, qualem in anteriori problemate deduximus ex formulis particularibus in usum generalis eruendæ. Ceterum, quæ hic annotavimus de problemate tangentis multipli ex tangente simpli arcus inveniendæ, eadem etiam tenenda sunt de problemate secantis anguli multipli ex data secante simpli invenienda (§. 328. *Analys.*).

§. 188. Quæ hactenus de Algebra tradidimus, non progrediuntur ultra terminos ab Arabibus assignatos, a quibus eandem accepimus; nisi quatenus ope Arithmeticæ literalis, seu calculi universalis, ad quem animum non

non adverterunt Arabes, multo amplior efficitur illius usus, ut per eam pateat accessus ad ea, quæ inaccessa videbantur. Ante inventam vero Arithmeticam literalem, Algebram ulterius provehere studuerunt Itali; nec infelici prorsus successu. Cum enim Arabes in æquationibus quadraticis subsisterent; SCIPIO FERREUS, ulterius progressus, dedit regulas ex æquationibus cubicis extrahendi radicem, a CARDANO publici juris factas; LUDOVICUS vero *Ferrariensis* etiam ex æquatione biquadratica radicem extrahere docuit. Neque Algebra in hunc usque diem ulterius promota, ex quo, ope calculi literalis & calculi differentialis, adeo amplificatus est ejusdem usus, ut nihil videatur a cognitione nostra adeo remotum, quin ad ipsum aperiat aditum. Etsi enim DE TSCHIRNHAUSEN invenisse sibi visus est methodum universalem quamcunque æquationem affectam reducendi ad puram; eamque Analysi suæ demonstratæ inserere nullus dubitavit CAROLUS REYNEAU; tentanti tamen apparebit, eam non succedere, nisi in æquationibus cubicis, ad quas etiam eandem tantummodo applicavit DE TSCHIRNHAUSEN & qui eandem approbavit REYNEAU: eandem enim methodum ad æquationes altioris gradus applicaturus, incides in æquationes, quæ superioris gradus sunt quam resolvenda; id quod monendum utique fuerat, ne Algebra complementum suum videatur nacta, a quo tamen longissimo intervallo adhuc distat. Non difficile fuerat Dn. DE TSCHIRNHAUSEN hoc observare, modo applicationem in superioribus æquationibus tentasset, nec nimia forsan in vires suas confidentia, quæ ipsum non in unum errorem seduxit, difficultates oblatas pro superabilibus reputasset, quæ omnino insuperabiles sunt, saltem hactenus superari minime possunt. Quoniam itaque methodus universalis, extrahendi radicem exactam ex æquatione quacunque data, desiderabatur, nec adeo facile erat eandem reperire; ad extractionem radicis per approximationem confugerunt Analystæ, & methodum ingeniosam jam dedit FRANCISCUS VIETA. Alii alio modo idem tentarunt; quod prolixe recenseri nostri jam non est instituti: neque enim nobis propositum est historiam Algebræ scribere, sed ea tantummodo enarrare, quæ scitu necessaria sunt lectori Elementorum nostrorum Analyseos, ut majore luce fruatur, nec quasi in tenebris versetur, ignorans, cur ea de extractione radicum ex æquationibus altioribus tradamus, quæ capite quinto continentur. Nos hic retinuimus methodum facillimam, (quam Arithmetici nostrates, *die Rechenmeister*, in Algebra numerosa *Cossicam mechanicam* appellarunt; & quam etiam adhibuit NEWTONUS, & RAPHSON in peculiari Tractatu multis exemplis

illustravit); sed nostro more captui tyronum magis accommodatam; qua radix æquationis reperitur in fractionibus decimalibus tam exacta, quantum desideratur. Et quoniam HALLEIUS regulas duas universales investigavit, alteram rationalem, alteram irrationalem, quæ merito commendatur; easdem eadem methodo investigare docuimus, qua in exemplis singularibus usi sumus, & quæ breviori ac trita magis via ad easdem ducit, quam qua HALLEIUS ad easdem pervenit. Methodus hæc in praxi satisfacit, nec ea ulteriorem Algebræ perfectionem desiderat. Neque enim in praxi desiderantur numeri irrationales, quales prodeunt per inventas generales formulas radicum in æquationibus cubicis (§. 358 *Analys.*); sed numeri rationales. Quando vero ex irrationali actu extrahenda radix; eam quærimus in fractionibus decimalibus, quales reperimus per methodum, de qua jam nobis sermo est. Applicatio autem formularum irrationalium plerumque plus pareret laboris quam methodus approximandi. Immo si in formula, substitutis numeris pro literis, extrahenda foret radix altioris gradus; non inutiliter recurreremus ad methodum approximandi, qua statim uti poteramus (§. 365 *Analys.*). Non tamen ideo damnamus, si quis in extrahendis radicibus ex æquationibus superioribus ulterius progrediatur: facit enim ad perfectionem theoriæ, seu incrementum scientiæ, & ad Artem inveniendi locupletandam. Enimvero, cum de commoda methodo extrahendi radicem ex æquatione quacunque data, sive exacte, sive per approximationem, laborarent Mathematici; in naturam æquationum inquisiverunt & quomodo eædem præparentur, sicubi opus est, investigarunt. Unde enata sunt problemata ista, quæ initio hujus capitis explicantur.

§. 189. Problemata ista intellectu facilia sunt ei, qui in anterioribus attentionem suam suumque acumen desiderari minime passus; ut adeo opus non sit quædam de iis moneri. Calculum in singulis adeo perspicue repræsentavimus, ut in eodem versantes levi saltem attentione opus habeant ad problematum solutionem intelligendam. Usus autem eorum, quæ de natura æquationum docentur, elucescit ex problemate 165 (§. 351) de extrahenda radice rationali, si quam habet æquatio; id quod rarissime accidit. Duplicem proposuimus methodum. Altera nititur principio substitutionis; altera vero principio de natura æquationum, quod scilicet æquationes altiores prodeant per multiplicationem simplicium. Atque hæc posterior ingeniosior est priori. Non amplius turbabit tyrones, quod alterum æquationis membrum hic ponatur o, modo in anterioribus fuerint satis attenti; quoniam per reductionem aliquoties prodit

dit talis æquationum forma. Quando primum tale quid occurrit, attoniti quasi hærent tyrones, quod aliquid nihilo æquale esse debere existiment, non advertentes ad diversitatem signorum, ut ipsis succurreret axioma, Si æqualia ab æqualia subtrahuntur, nihil relinquitur. Nimirum hic differentia nulla est: differentia autem nulla per fictionem quandam nihilo æqualis ponitur. Proprie enim loquendo ei, quod non est, nullum prædicatum positivum competere potest; juxta canonem tritissimum scholasticorum, Non entis nulla sunt prædicata. Æqualitas est prædicatum, quod quantitatibus convenit: quod vero nullum est, cum non sit in quantitatum numero, nec æquale dici potest alteri. Fingitur adeo nihil quantitatis esse aliquam quantitatis speciem; ut de eo prædicatum, quod nonnisi quantitatibus convenire potest, enunciari possit fiducia axiomatis, Quamlibet quantitatem æqualem esse sibimetipsi. Nugari videretur, qui extra usum in calculo talia proponeret; veluti si demonstrare vellet, nihilum æquale esse nihilo. Hac tamen demonstratione subsistit fictio adeo utilis in calculo algebraico. Simile quid obtinet, si alterum æquationis membrum fuerit quantitas privativa; ubi tyrones perspicaciores, ad diversitatem signorum in altero æquationis membro non attenti, vel saltem ignari, quantitates privativas excedere positivas, hærent, existimantes aliquid poni minus nihilo, seu quod aliquid est æquale esse debere ei quod nihilo minus est; cum tamen revera minus nihilo ponatur ei quod minus nihilo est æquale; quatenus, in calculo, fingimus quantitatis defectum per eam, quæ deficit, æstimabilem esse veram quantitatem. Fictiones istiusmodi plurimum habent utilitatis in calculo, nec iisdem carere possumus. Nodum in scirpo quærit, qui contra eas difficultates facessit. Ad fictiones recurrendum est etiam extra Mathesin, nisi nescire velis, quæ scitu maxime necessaria sunt. Ita, in Jure naturali, Civitatem fingimus instar personæ liberæ, quæ sui juris est, & cui per naturam suam certa competunt jura; immo individuum unum physicum in plura moralia dividimus, & individuum morale physico contradistinguimus, tanquam personam diversam ab eo; immo unum eundemque hominem distinguimus a se ipso, quasi duæ sint personæ, quarum una alteri obligatur, & uni in alteram competunt certa jura: qua fictione utitur ipse Apostolus, dum hominem novum veteri contradistinguit. Nec ignotæ sunt istiusmodi fictiones in Jure Romano. Exemplo sit postliminium; ut taceamus alia, ubi fictiones non adeo manifestæ sunt, alio loco a nobis commemorandæ. Quodsi dicas, in explicanda æquationum natura poni $x = -b$, adeoque quantitatem positivam æqualem

lem privativæ: id quod utique contradictorium sit; cum quantitates privativæ positivis heterogeneæ sint, adeoque ratio æqualitatis, qualem supponit æquatio, inter eas intercedere nequeat (§. 24 *Analyſ.*). Enimvero cum, in æquationibus compositis, radix non minus quantitas negativa, quam positiva esse possit; ea autem designetur litera x; quamdiu valor ejus ignoratur, signum eidem adjiciendum dubium est: in casu autem dubio signo $+$ afficitur: id quod etiam in sequentibus fiet, ubi utile est non attendi signorum diversitatem. Quando itaque in formatione æquationum sumitur $x=-b$, non supponitur, quantitatem positivam privativæ æqualem esse, sed tantummodo sumitur, eadem litera x indigitari posse non minus quantitatem positivam, quam negativam; cum signa primitiva sint prorsus arbitraria; & quantitatem privativam subinde utiliter considerari instar positivæ, quando fictionem istiusmodi fert natura rei, nec ea in errorem seducit.

§. 190. In resolutione problematis 168 (§. 358 *Analyſ.*), quo ex æquatione cubica extrahi jubetur radix, singulare occurrit artificium, quo quantitas incognita x dividitur in duas partes indeterminatas y & z, & harum ope æquatio data transmutatur in aliam, quæ duas incognitas indeterminatas continet. Etenim hoc ipso obtinetur, ut lege comparationis terminorum utraque determinetur, & sic inveniatur quæsitum per partes. Nimirum, quia y & z indeterminatæ sumuntur, ideo licet ponere $3y^2z+3z^2y=py+pz$ & $y^3+z^3=q$; non alia de causa, quam quia commodum accidit, ut per primam æquationem eruatur valor unius indeterminatæ z, qui in æquatione altera substitutus dat valorem ipsius y atque z determinatum. Æquatio $y^6-qy^3=-\frac{1}{27}p^3$ duas habet radices; quarum altera quod sit $=y$, altera vero $=z$, ex eo liquet, quia ex æquatione prima $3y^2z+3z^2y=py+pz$, reperitur $y=p:3z$, perinde ac $z=p:3y$, & valor ipsius y in altera $y^3+z^3=q$ substitutus dat æquationem $z^6-qz^3=-\frac{1}{27}p^3$, eandem cum anteriore. Manifestum enim est æquationem, quæ ducit ad valorem determinatum quantitatis cognitæ, duas habere debere radices, quarum una denotat y, altera vero z; etsi perinde sit quam ipsi y, quam vero ipsi z tribuere velis; cum quantitates y & z pro arbitrio assumantur, ut pro majore & minore habere possis, quam volueris. Hoc artificio jam usi sumus in investiganda regula tollendi secundum terminum ex æquatione data (§. 343 *Analyſ.*), ut nempe coëfficiens secundi termini propter indeterminatam z poni possit nihilo æqualis. Diversa tamen in præsenti casu ejus applicatio est.

§. 191. Limites æquationum eo modo investigare docuimus, (§. 356 *Analyſ.*), qui in *Commentariis ad Geometriam*

metriam CARTESII proponitur. Habet enim hoc singulare ea methodus; quod Algebram, quæ tota nititur ratione æqualitatis, extendat ad rationem inæqualitatis, ubi inæqualia, mediante signo $>$ vel $<$, eodem modo inter se comparantur, quo in Algebra æqualia mediante signo $=$, & reductio per similia axiomata instituitur, quo eadem in Algebra fieri consuevit. Hanc ipsam vero methodum, etsi hactenus attentione sua indignam eam judicaverint Analystæ, etiam alibi usui esse posse, exemplo aliquo facili monstrare lubet. Ponamus quæri, qualis sit ratio, quam habent duæ quantitates inæquales ad eandem tertiam. Resolutio problematis ita sese habet:

Sit major $= x$ Data tertia $= a$
minor $= y$

erit

$$\frac{x > y}{ax > ay} \quad a$$

Fiat $x : a = t : v$

erit $x = \dfrac{at}{v}$

adeoque $\dfrac{a^2 t}{v} > ay$

$$\frac{at}{v} > y$$

$$\frac{t}{u} > \frac{y}{a}$$

Ergo ob $\dfrac{t}{v} = \dfrac{x}{a}$

$$\frac{x}{a} > \frac{y}{a}$$

hoc est $x : a > y : a$

Habemus adeo theorema: *Majus ad idem majorem rationem habet, quam minus*, istiusmodi analysi investigatum, qua problemata algebraice solvuntur. Non alio fine proponimus hoc problema, quam ut ideam quandam hujus methodi animo tyronum ingereremus. Consultum igitur erat, ut exemplum eligeremus facile, & ex anterioribus jam notum. Videbimus deinceps applicatione methodorum, quæ nobis innotescunt, ad exempla notissima & maxime vulgaria haud raro detegi maxime ardua: sit ita, quod methodorum inventores, ne ardua nullo fere negotio detexisse videantur, eas applicent ad exempla, quæ sublime quid spirant & intellectu difficilia deprehenduntur.

§. 192. Extractio radicis ex serie infinita (§. 366 *Analys.*), etiam artificium quoddam singulare habet; quod consistit in diversa applicatione assumtionis quantitatum indeterminatarum lege comparationis determinandarum; quo supra jam usi sumus in tollendo secundo termino ex æquatione data (§. 343 *Analys.*), & in extrahenda radice ex æquatione cubica (§. 358 *Analys.*). Series enim assumtitia, qua exprimitur valor ipsius x, qui quæritur, coëfficientes habet indeter-

indeterminatos, lege comparationis determinandos. Ut vero determinari possint, perinde ac superius lege substitutionis; æquatio proposita, cujus coëfficientes determinati sunt, transmutatur in aliam, quam coëfficientes indeterminati cum determinatis simul ingrediuntur; quemadmodum fecimus in extractione radicis ex æquatione cubica (§. 358 *Analys.*); etsi alio principio hic nitatur coëfficientium indeterminatorum determinatio, cujus ratio ex ipso contextu liquet, & quod affine est ei, quo eodem fine usi sumus in tollendo secundo termino ex æquatione data (§. 343 *Analys.*), quamvis ob aliam rationem. Patet hinc, quam utile sit ut artificia analytica, quibus in resolutione problematum utimur, inter se conferantur, quo pateat eorum, quæ eadem sunt, diversa applicatio. Quodsi enim in rationem applicationis inquisiveris; id non modo efficiet, ut eadem in casu eodem recurrente facilius memoriam subeat; verum etiam hoc ipso consequeris, ut eandem, prout casus exigit, ipsemet variare possis. Istiusmodi autem disquisitiones apprime necessariæ sunt ei, qui in Arte inveniendi generali proficere vult studio Algebræ, & intellectui conciliare gestit eam habitudinem, qua ad artificia heuristica diversimode applicanda opus habet. Problema, de quo jam loquimur, maximæ utilitatis est: continet enim methodum, quæ *Regressus serierum* nomine venit, & cujus maxima est utilitas in Geometria sublimiori; quemadmodum suo loco ostendemus. Equidem problema hoc tanta perspicuitate exposuimus, ut tyro in anterioribus cum laude versatus idem absque ulla difficultate intelligat, nisi calculi molestias fugiat; quodsi tamen quis ab iisdem abhorreat, idem tamdiu seponat, donec regressu serierum ad solvenda problemata opus habuerimus.

§. 193. Extractiones radicum ex æquationibus, de quibus diximus in capite præsente, usum tantummodo habent in solutionibus problematum arithmeticis. Quamobrem docendum quoque erat, quomodo æquationes altiores geometrice construantur. Per rectas & circulum eædem construi nequeunt: sed confugiendum hic est ad lineas curvas. Quamobrem cum de lineis curvis, præter circulum, nihil doceatur in Geometria elementari; nostrum erat ante docere, quomodo Algebra ad Geometriam sublimiorem, quæ de curvis agit, applicetur; ut ejus ope curvarum descriptiones, & proprietates, ac symptomata, hoc est, prædicata absoluta & conditionata, inveniantur. Applicationem hanc debemus CARTESIO, qui eam docuit in Geometria, sed non ad captum tyronum. Facile tamen reperiri poterat, si quis ad vulgaria animum attendere voluisset. Tota enim in

hoc

hoc consistit, ut curva definiatur per æquationem, & ex ea, adhibitis artificiis in Algebra usitatis, eliciantur curvarum constructiones, proprietates, & symptomata. Ecce igitur tibi facillimam ad hanc methodum, quæ inexhaustæ utilitatis est in Geometria subliminori, viam. Constat ex elementis Geometriæ (§. 327 *Geom.*), Tab. II. Fig. 17. semiordinatam PM esse mediam proportionalem, inter abscissam AP & complementum diametri PB; si utamur terminis in doctrina de Curvis receptis, & initio capitis sexti explicatis. Quare si sit diameter AB $=a$, abscissa AP$=x$, semiordinata PM$=y$, erit complementum diametri PB$=a-x$; consequenter

$$AP : PM = PM : PB$$
$$x : y = y : a-x$$

adeoque $y^2 = ax - x^2$

Habemus adeo æquationem, quæ circulum definit. Quodsi jam ponamus, nos nescire, qualis sit hæc curva; ea, quæ de eadem nobis innotescere possunt, hoc modo eruimus.

Sit $y = 0$

erit $ax - x^2 = 0$

$ax = x^2$

$a = x$

Patet itaque 1°. curvam secare rectam AB in B.

Sit $x = 0$

erit $y^2 = 0$

$y = 0$

Unde liquet 2°. curvam secare rectam AB in A.

Sit $x = \frac{1}{2}a$

erit $y^2 = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2$

$= \frac{1}{4}a^2$

$y = \frac{1}{2}a$

Videmus itaque, 3°. si ex medio rectæ AB erigatur perpendicularis CD, æqualis AC, curvam transire per punctum D.

Quoniam eadem curva transit per A & B (*vi num.* 1 *&* 2); evidens est, 4°. eam concavitatem rectæ AB obvertere. Et quoniam patet, singula sese eodem modo habere debere, si semiordinatæ ex altera parte sumantur; porro liquet, 5°. curvam esse in se redeuntem. Quæratur jam magnitudo rectæ MC, ex puncto C, in medio rectæ AB assumto, ad extremitatem semiordinatæ PM, seu punctum in curva M ductæ.

Sit $AC = \frac{1}{2}a$ $MC = z$

$AP = x$

erit $PC = \frac{1}{2}a - x$

adeoque $PC^2 = \frac{1}{4}a^2 - ax + x^2$

$PM^2 = ax - x^2$ per naturam curvæ.

Ergo ob $MC^2 = MP^2 + PC^2$, $z^2 = \frac{1}{4}a^2$

$z = \frac{1}{2}a$

6°. Recta igitur ex puncto C in quodlibet peripheriæ punctum M ducta æqualis est rectæ AC, seu dimidiæ rectæ AB; consequenter rectæ omnes ex eodem puncto C in periphe-

riam ductæ æquales sunt (§. 87 *Arithm.*): quæ est proprietas circuli, per quam definiri solet in Geometria elementari.

Hinc vero porro 8° liquet, Curvam hanc describi, si recta CA circa punctum fixum C in gyrum agatur: quæ est definitio circuli realis.

Ponamus $y = \frac{1}{2}a$

erit $y^2 = \frac{1}{4}a^2 = ax - x^2$

$$x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = 0$$

$$\left.\begin{matrix} x - \frac{1}{2}a \\ \frac{1}{2}a - x \end{matrix}\right\} = 0$$

$$x = \frac{1}{2}a$$

Quoniam superius (*n.* 3) reperimus $y = \frac{1}{2}a$, si fiat $x = \frac{1}{2}a$; ideo patet, 9°. In nullo alio puncto, quam in C semiordinatam rectæ dimidiæ AB æqualem esse posse.

Si sit $PM = y$, $PC = v$, $CM = \frac{1}{2}a$ (*n.* 6); erit per theorema Pythagoricum:

$$\frac{1}{4}a^2 = y^2 + v^2.$$

adeoque $\frac{1}{4}a^2 > y^2$

$$\frac{1}{2}a > y$$

$$y < \frac{1}{2}a$$

Quamobrem 10°. ubivis extra centrum, semiordinata minor dimidia recta AB: consequenter cum minor sit semiordinata in centro erecta CD (*n.* 3), semiordinatæ autem sint chordarum dimidiæ; 11°. diameter chordarum maxima est.

Sit distantia semiordinatæ a centro $PC = v$, $PM = y$, erit

$$\frac{1}{4}a^2 = y^2 + v^2 \ (n. 6).$$

Et si alia $PC = t$, PM alia $= z$,

erit $\frac{1}{4}a = z^2 + t^2$

Quare $z^2 + t^2 = y^2 + v^2$.

fit $t > v$

erit $z^2 < y^2$

$$z < y$$

12°. Semiordinata itaque z tanto minor alia quacunque semiordinata y, quanto magis a centro distat; consequenter chordæ tanto minores, quanto a centro remotiores.

Sit $AB = a$, $AP = x$, erit $PB = a - x$, adeoque Tab. III. Fig. 18.

$AP^2 = x^2$

$PM^2 = ax - x^2$, ex natura Curvæ

$AM^2 = ax$

Similiter $PB^2 = a^2 - 2ax + x^2$

$PM^2 = ax - x^2$

$MB^2 = a^2 - x^2$

$AM^2 = ax$

$$MB^2 + AM^2 = a^2 = AB^2$$

Quoniam $AB^2 = AM^2 + PB^2$, triangulum AMB rectangulum est, consequenter 13°. angulus AMB in semicirculo rectus.

Et quia $AM^2 = ax$, $BM^2 = a^2 - ax$;

erit $a : AM = AM : x$

$a : BM = BM : a - x$

hoc est $AB : AM = AM : AP$

$AB : BM = BM : PB$

Est

Est igitur 14°. Chorda media proportionalis inter diametrum AB & segmentum adjacens.

Tab. II. Fig. 19. Quodsi quæratur recta TM ex puncto quocunque T intra circulum assumto in peripheriam ducta; ducatur, per centrum C & punctum T, recta AB, quæ erit diameter circuli, & ex puncto peripheriæ M demittatur perpendicularis MP, quæ erit semiordinata. Sit jam

$$AC = CB = a \qquad AP = x$$
$$BT = b \quad \text{erit} \quad PC = a - x$$
$$\text{erit } CT = a - b \qquad PT = 2a - b - x$$

Porro

$$PM^2 = 2ax - x^2, \text{ ex natura circuli}$$
$$PT^2 = (2a - b^2) - 4ax + 2bx + x^2$$

$$TM^2 = (2a - b)^2 - 2ax + 2bx$$
$$= (2a - b)^2 - 2(a - b)x$$
$$= TA^2 - 2CT.\ AP$$

Est adeo 15°. Quadratum rectæ TM æquale excessui quadrati rectæ TA supra rectangulum ex duplo distantiæ puncti T a centro C in abscissam AP puncto M respondentem. Hoc theorema in Elementis non extat: ex eo tamen consequuntur, quæ in iis demonstrantur. Nimirum quia 2CT constans est; decrescente abscissa AP decrescit quoque rectangulum ex AP in 2CT; & cum quadratum rectæ TA non minus constans sit, quo minus fuerit rectangulum ex 2CT in AP, eo major evadet excessus quadrati rectæ TA supra hoc rectangulum; consequenter eo majus erit quadratum rectæ TM, quippe eidem æquale, adeoque etiam ipsa recta TM. Et quando TM incidit in diametrum, seu punctum M in A, quadratum ipsius TM æquale evadit quadrato ipsius TA; consequenter TA major est qualibet TM, adeoque maxima rectarum, quæ ex puncto T in peripheriam duci possunt. Incidimus adeo 16°. in theorema *63* (§. 303 *Geom.*)

Ante invenimus (*n.* 14) $AM^2 = AB.\ AP$, hoc est, quod quadratum chordæ sit æquale rectangulo ex diametro in abscissam. Quamobrem, cum crescente abscissa AP crescat arcus AM, crescat etiam rectangulum ex diametro AB in abscissam AP; ideo patet 17°. quadratum chordæ majoris esse majus quadrato chordæ minoris; consequenter chordam majorem subtendere arcum majorem, quam minor, seu chordam arcus majoris majorem esse, chordam minoris minorem. Tab. II. Fig. 18.

Alia ex æquatione ad circulum deducuntur, in ipsa Analysi præsertim infinitorum, qua in Geometria sublimiori carere minime possumus. Ex hactenus dictis abunde patet, quomodo applicatione Algebræ ad ea, quæ ex EUCLIDE notissima sunt, methodus definiendi curvas per æquationes, & ex iis deducendi earum geneses ac constructiones, proprietates, aliaque symptomata, innotescere potuerit. De sectionibus conicis APOLLONIUS similiter demonstravit theoremata, quorum ope per æquatio-

nes definiuntur, quemadmodum in hoc capite fecimus. Quamobrem apparuit, eandem methodum ad conicas quoque sectiones applicari posse. Atque sic enata est methodus tractandi curvas per æquationes, seu Algebram ad Geometriam sublimiorem applicandi. Hæc non eo fine a nobis adducuntur, ut inventorum laudi detrahamus; sed ut discamus, vulgarium meditationem ducere ad maxime ardua; & ea neglecta inventores sibimetipsis obesse, si quando per ambages quærunt, quæ obvia sunt recta via incedentibus; utque tyrones ideam hujus methodi animo concipiant, quæ in ejus applicatione ad altiora facem præfert. Qui recta via in inveniendo progreditur, ex iis, quæ cognita atque trita sunt, colligit quæ nondum patent, parum sollicitus, quamnam utilitatem sint habitura, quæ deteguntur. Sed de his dicemus, ubi Artem inveniendi ex instituto exposituri sumus.

§. 194. Diximus superius (§. 169), nondum invento calculo universali, Algebram numerosam jam applicari potuisse ad Geometriam, ut per eam detegerentur theoremata & problematum constructiones. Immo ipsa etiam applicatio ad Geometriam sublimiorem fieri poterat non sine successu. Dictis igitur fidem facere nostrum est uno alteroque exemplo. Ponamus ex. gr. quæri relationem rectarum AT & TE, ex eodem puncto T extra circulum dato ductarum; quarum altera AT circulum tangit in A, altera TE eundem secat. Tab. II. Fig. 20.

Sit diameter $BE = 1$, $TB = x$
erit $AC = \frac{1}{2}$, $TC = \frac{1}{2} + x$
sit porro $AT = 2$, $TE = 1 + x$

Quoniam AT perpendicularis ad AC (§. 308 *Geom.*), erit

$TC^2 = AC^2 + TA^2$ (§. 417 *Geom.*)

adeoque $(\frac{1}{2})^2 + 2 . \frac{1}{2} x + x^2 = (\frac{1}{2})^2 + 2^2$

$2 . \frac{1}{2} x + x^2 = 2^2$

sed $2 . \frac{1}{2} = 1$, per cond. probl.

ergo $1x + x^2 = 2^2$

hoc est $(1+x)x = 2^2$

sive $TE . TB = AT^2$

Quamobrem $TE : AT = AT : TB$

Habemus itaque duo theoremata: 1°. Quadratum tangentis, in hypothesi problematis, est æquale rectangulo ex secante in ejus portionem extra circulum. 2°. In eadem hypothesi tangens est media proportionalis inter secantem & ejus portionem extra circulum.

In Algebra speciosa diametrum appellamus *a*, tangentem *b*. Cum hæc signa sint primitiva, perinde est sive diametrum *a*, sive 1, & num tangentem *b*, an vero 2 dicas, modo in calculo universalitatem conserves, ut in locum 2 quemcunque numerum alium surrogare possis, sive rationalem, sive irrationalem, sive integrum, sive fractum, qui in dato casu exprimit rationem ad diametrum tanquam unitatem.

Pona-

Tab. I. *Fig. 3.* Analyſ. Ponamus porro problema 13 (§. 255 *Analyſ.*) ſolvendum eſſe per Algebram numeroſam, ſed univerſaliter, quemadmodum ſolvitur per ſpecioſam. Solutio hæc erit:

ſit $AB + BC + CA = 6 \quad AC = x$

Area $\triangle = 2^2$, erit $BC + BA = 6 - x$

$AC^2 = x^2$

Cum ſit $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (§. 417 *Geom.*) & $AB^2 + BC^2 = (AB + BC)^2 - 2\, AB.\, BC$ (§. 216 *Arithm.*); erit $AC^2 = (AB + BC)^2 - 2AB.\, BC$ (§. 91 *Arithm.*). Eſt vero $(AB + BC)^2 = 6^2 - 2.\, 6x + x^2$ & $2AB.\, BC = 4.\, 2^2$ (§. 392 *Geom.*). Quamobrem

$$x^2 = 6^2 - 2.\, 6x + x^2 - 4.\, 2^2$$

$$0 = 6^2 - 2.\, 6x - 4.\, 2^2$$

$$2.\, 6x = 6^2 - 4.\, 2^2$$

$$x = \frac{6}{2} - 2.\, \frac{2^2}{6}$$

Patet itaque hypothenuſam trianguli rectanguli x eſſe æqualem exceſſui ſemiperimetri $\frac{6}{2}$ ſupra tertiam proportionalem ad ſemiperimetrum $\frac{6}{2}$ & latus quadrati 2 areæ trianguli æqualis. Unde liquet, problema geometrice conſtrui, ſi ad ſemiperimetrum & latus quadrati areæ trianguli æqualis quæratur tertia proportionalis, & hæc ex ſemiperimetro auferatur.

Æquatio pro circulo erat $y^2 = ax - x^2$, ubi a diametrum denotat, ſive igitur diametrum dicas a, ſive 1 aut 2, modo obſerves ea, quæ ad univerſalitatem calculi conſervandam præcepimus; ex æquatione $y^2 = 1x - x^2$, vel $y^2 = 2x - x^2$ eadem erues, quæ paulo ante ex altera eruimus (§. 194).

Immo nondum invento calculo litterali poterant quoque quantitates datæ exprimi literis, quibus in Geometria lineas indigitamus, veluti in exemplo primo.

Diameter $= BE \quad TB = x$ Tab. II. *Fig. 10.*

radius $= AC \quad TC = AC + x$

tangens $= AT \quad TE = BE + x$

Unde reſultat æquatio

$$AC^2 + 2AC.\, x + x^2 = AC^2 + AT^2$$

$$2AC.\, x + x^2 = AT^2$$

$$(BE + x)\, x = AT^2$$

h. e. $TE.\, TB = AT^2$

vel in problemate altero

Periph. $\triangle = AB + BC + CA \quad AC = x$ Tab. I.

Area $\triangle = DE^2 \quad AC^2 = x^2$ *Fig. 3.* Analyſ.

$BC + CA = AB + BC + CA - x$

Unde reperitur ut ante æquatio:

$$x^2 = (AB + BC + CA)^2 - 2\,(AB + BC + CA)\, x + x^2 - 4DE^2$$

$$0 = (AB + BC + CA)^2 - 2\,(AB + BC + CA)\, x - 4DE^2$$

$$2\,(AB + BC + CA)\, x = (AB + BC + CA)^2 - 4DE^2$$

$$x = \tfrac{1}{2}\,(AB + BC + CA) - 2DE^2 : (AB + BC + CA)$$

 Simi-

Tab. II. Fig. 17. Similiter si diameter circuli dicatur AB, semiordinata PM, abscissa AP; æquatio ad circulum est $PM^2 = AB \cdot AP - AP^2$: unde eadem deducuntur, quæ ex æquatione $y^2 = ax - x^2$ deduximus.

Talia monemus, ut appareat Veteribus plura in potestate fuisse, quam existimavere, propterea quod ad studium mathematicum non eam attentionem attulerunt, quam in superioribus commendavimus, ut methodos intimius perspiciamus, ea discernentes, quæ sunt legum methodi, ab iis, quæ characteristicæ tribuenda, & ut characteristicæ ubivis commodum faciamus usum: neque enim iidem characteres æque satisfaciunt in omni casu, sed alii aliis non sine utilitate haud raro substituuntur. Neque vero est, quod excipias, nos in calculo universali numeroso, & substitutis linearum appellationibus communibus, adhibere artificia ex characteristica, qua in Algebra speciosa utimur, petita; veluti dum potentias linearum designamus per exponentes, numeris vel literis majoribus quibus lineæ denotantur adscriptos instar apicum. Etenim hanc denotationem jam indicavit KEPLERUS in *Harmonica*, calculo literali adhuc ignorato, & per ea eadem patere poterat, quæ de natura numerorum cossicorum, quos vocat, tradidit STIFELIUS in *Arithmetica integra*, multo ante, quam VIETA de Arithmetica literali cogitaret, & HARIOTUS atque CARTESIUS eandem ulterius perficerent. Et quamvis recentior characteristica commodior sit; ipsa tamen methodus per eam non variatur, quæ etiam absque omni characteristica subsistit: sit ita, quod, deficiente characteristica commoda, subinde tantæ suboriantur molestiæ, quas devorare non est cujusvis, & ea requiratur attentio, ut ab errore immunem te præstes, quam non quivis afferre valet. Hæc ignorare non potest, qui ad characteristicam, qua hodie in Arithmetica utimur, eam attentionem attulerit, quam in superioribus commendavimus; & quæ acumen istud, quo ea quæ sunt legum methodi, ab iis quæ characteristicæ debentur separantur, confert.

§. 195. Circulus per æquationem algebraicam definiri potest, quia punctorum omnium M ad diametrum AB constans quædam relatio est, quæ exprimitur per relationem semiordinatæ ad abscissam; demittendo scilicet ex puncto quolibet M perpendiculum PM in diametrum AB, ut abscindatur AP. Unde facile intelligitur idem succedere debere in aliis curvis ubi similis relatio obtinet. Quamobrem cum constet, APOLLONIUM de parabola, hyperbola, & ellipsi, seu sectionibus conicis, tale quid demonstrasse; statim prævidere licet methodum, qua in circulo usi sumus, in iisdem quoque adhiberi posse. Enimvero possunt puncta cur- Tab. II. Fig. 18.

væ

væ referri ad quamcunque aliam rectam positione datam: id quod cum usui sit in sequentibus, exemplo circuli hoc ipsum declarare lubet. Ducatur recta AL, quæ circulum in C tangat; erit ea ad radium GC perpendicularis (§. 308 *Geom.*). Ducatur quoque DA, quæ circulum tangit in D, adeoque ad radium DG perpendicularis (§. *cit.*); cum etiam CG sit perpendicularis ad GD (§. 143, 78 *Geom.*), erit AL diametro DE parallela (§. 258 *Geom.*), & AD ad eandem perpendicularis (§. 230 *Geom.*), adeoque semiordinata (§. 370 *Analys.*). Ducatur semiordinata alia quæcunque PM, continuanda donec diametro DE in Q occurrat; erit MQ ad DE perpendicularis. Sit AC=DG=a, AP=x, PM =y; erit QM=$a-y$; adeoque per naturam circuli, cum sit

Tab. II Fig. 21.

$$QM^2 = DQ.\ QE$$

erit, $a^2 - 2ay + y^2 = 2ax - x^2$

Quæ æquatio circulum definit respectu tangentis AL.

Fiat jam $x = 0$, erit

$$a^2 - 2ay + y^2 = 0$$
$$a - y = 0$$
$$a = y$$

hoc est, in origine abscissæ A semiordinata AD est radio circuli æqualis.

Sit $x = a$, erit

$$a^2 - 2ay + y^2 = 2a^2 - a^2$$
$$= a^2$$
$$y^2 - 2ay = 0$$
$$y - 2a = 0$$
$$y = 2a$$

hoc est, semiordinata CN diametro circuli æqualis, seu perpendicularis CN ad AC curvæ in N occurrit.

Sit $x = 2a$, erit

$$a^2 - 2ay + y^2 = 4a^2 - 4a^2$$
$$= 0$$
$$a - y = 0$$
$$a = y$$

hoc est semiordinata LE radio circuli æqualis.

Quodsi quæratur recta GM, cum sit per theorema Pythagoricum

$$GM^2 = MQ^2 + QG^2$$

erit $GM^2 = 2a^2 - 2ay + y^2 - 2ax - x^2$

est vero ex natura curvæ

$$a^2 - 2ay + y^2 = 2ax - x^2$$

Ergo $GM^2 = a^2$

$$GM = a$$

Quare si ponamus, nos ignorare, ad quam curvam sit æquatio; patet hinc eam esse ad circulum.

Nimirum quando ex æquatione data eruuntur, quæ de curva cognosci possunt, tum semper supponitur, non constare, ad quamnam curvam sit æquatio. Quodsi semicirculus DNE ad rectam AL referretur, semiordinata PO foret y, adeoque QO=$y-a$. Quamobrem cum eadem prodiret, quæ ante æquatio; alterum ejus membrum $a^2-2ay+y^2$ duas habet radices $a-y$ & $y-a$: id quod indicio est, semiordinatam recta AC & minorem, & majorem esse posse; consequenter ex ipsa æquatione intelligitur

gitur, curvam a semiordinata secari in duobus punctis. Quoniam itaque in C eandem nonnisi in uno puncto N secat; id indicio est, quod in C eandem tangat. Similiter quia in A & L semiordinata nonnisi unum valorem habet; hinc conficitur, quod semiordinatæ AD & LE curvam similiter tangere debeant. Unde liquet curvam esse in se redeuntem, & ejus puncta referri ad lineam, quæ tota extra curvam cadit, ab ea tamen non distat. Distantia enim a tota curva æstimatur ex perpendiculari minima, quæ hic nulla est.

Suadendum omnino est, ut tyrones notent, quomodo curvæ agnoscantur, & a se invicem distinguantur; nimirum relatione punctorum ad rectam quandam positione datam, & circulum referant ad varias rectæ positiones, ut totius methodi vim ac potestatem rectius ac intimius perspiciant. Hoc enim pacto non modo nihil difficultatis habebit, quod in capite præsenti occurrit; verum etiam doctrina de Locis geometricis, quæ omnem rectæ illius positionem possibilem supponit, non perturbabit tyronem. Immo in genere notandum est, si ad maxime obvia & notissima applicentur methodi novæ, in quas incidimus; haud raro talia offerri, circa quæ hærent etiam exercitatiores, ubi in applicatione methodi ad nondum cognita occurrunt. Exemplum suppeditat æquatio, quam modo dedimus pro circulo $a^2 - 2ay + y^2 = 2ax - x^2$. Etenim si sumis, eam explicare relationem quadrantis DMC ad rectam AC, & ponis AP $=$ AC, seu $x = a$, per ea, quæ vidimus in æquatione præcedente (§. 193), prodire debere videtur $y = 0$. Unde miraris, ubi prodit $y = 2a$. Verum enimvero ubi consideras, æquationem $a^2 - 2ay + y^2$ habere duas radices, alteram nimirum $a - y$, alteram $y - a$, & priori respondere QM, posteriori autem QO; hinc disces, per æquationem $a^2 - 2ay + y^2 = 2ax - x^2$ tam semicirculi superioris DNE, quam inferioris DCE ad rectam AL relationem exprimi; consequenter in puncto C, ubi valor unus ipsius PM sive $y = 0$, etiam prodire debere valorem alterum ipsius $y = 2a$, recta nimirum PO in CN degenerante. Quodsi tale quid occurreret in tractatione æquationis, cui, quænam curva respondeat, adhuc ignoratur; unde hoc fiat, non adeo facile animadverteres, & multum omnino olei ac operæ perderes, antequam ex perturbatione eluctari valeres. Similiter ubi ponis $x = 0$ & $x = 2a$, prodit $a^2 - 2ay + y^2 = 0$, adeoque $y - a = 0$ & $a - y = 0$, quæ utraque æquatio dat eundem valorem nempe $y = a$. Unde vides, in contactu D & E, duas radices æquales habere æquationem; quemadmodum deinceps supponitur in methodo tangentium, & sine quo principio CARTESIUS ad methodum suam tangentium non pervenisset.

Non

Non addimus plura, cum hactenus dicta abunde sufficiant ad persuadendum utilitatem meditationis eorum, quæ nobis notissima sunt, ut eorundem ope detegantur alia, quorum alias cogitatio animum nunquam subiisset.

§. *196.* Quodsi hanc methodum, quam adeo fœcundam experiris in circulo, etiam ad curvas alias, quas tractarunt Veteres, applicare volueris; non omnes promiscue per æquationes definiri posse animadvertes, ubi eodem modo puncta eorum refers ad rectam quandam positione datam. Non succedet in Spiralibus ARCHIMEDIS, nec in Quadratice DINOSTRATIS, quemadmodum sub finem capitis videbimus. Quoniam itaque ex iis, quæ de circulo diximus, & per sectiones conicas confirmantur, didiceris, quod æquatio curvam definiens supponat constantem relationem puncti cujuslibet ad eandem rectam positione datam; hinc utique patet, non dari posse æquationem ad curvam, cujus puncta ad rectam positione datam constantem relationem minime habent. Atque adeo non miraberis, nec hærebit aqua, ubi curva offertur, quæ per istiusmodi æquationem explicari nequit. Et patet ratio, cur CARTESIUS curvas distinxerit in algebraicas & non algebraicas, quarum illas vocat geometricas, has vero mechanicas; propterea quod existimavit, illas solas in Geometriam recipi posse, has vero ex eadem excludi debere; quod ignoravit æquationes differentiales, de quibus dicemus in Analysi infinitorum, & quarum ope non minus algebraice tractantur curvæ, quæ a CARTESIO mechanicæ appellantur, quam quas geometricas appellat. Et sic patet ratio divisionis Curvarum in algebraicas & transcendentes, quam tradimus (§. 377, 380 *Analys.*)

§. *197.* Notandum vero est artificium, quo æquatio curvæ particularis reducitur ad generalem, quæ infinitas curvarum species sub se comprehendit: id quod fit exponentium indeterminatorum surrogatione in locum determinatorum: quo artificio jam usi sumus in anterioribus, veluti in theoremate generali de binomio ad dignitatem quamcunque evehendo (§. *95* *Analys.*). Probe quoque notandum est, quod in istiusmodi æquationibus observanda sit lex homogeneorum, quæ præcipit, ut termini singuli æquationum habeant dimensiones numero æquales, hoc est, ut unus valor prodeat, ductis tot rectis in se invicem, quot in se invicem sunt ducendæ, ut prodeat quilibet alter. Etsi enim in Geometria non detur magnitudo, quæ ultra solidum, quod trium dimensionum est & tribus rectis in se invicem ductis resultat, assurgit; in Algebra tamen fictione non inutili admittuntur hypersolida, quæ ductu quotlibet rectarum in se invicem in infinitum resultant. Nititur hæc fictio princi-

pio, quod inter duas lineas infinitæ cadere poſſint lineæ mediæ continue proportionales, quemadmodum ex geneſi potentiarum in infinitum progredientium liquet; veluti ſi ponas numeros in progreſſione geometrica 1, 2, 4, 8, 16, 32, &c. in infinitum, hoc eſt 1, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5 &c. in infinitum, ubi inter 1 & 2^2 una, inter 1 & 2^3 duæ, inter 1 & 2^4 tres, inter 1 & 2^5 quatuor cadunt numeri medii continue proportionales, & ſic porro in infinitum. Etſi enim hic numeri omnes, quorum ductu in ſe invicem reſultant termini ulteriores, ſint inter ſe æquales; conſtat tamen, vel ex Geometria elementari, (in qua v. gr. rectangulum reducitur ad quadratum eidem æquale, & parallelepipedum ad cubum ſibi æqualem,) ea, quæ ductu linearum inæqualium in ſe oriuntur, reduci poſſe ad talia, quæ oriuntur ductu totidem æqualium in ſe invicem. Sufficiant hæc in gratiam tyronum dicta, ut ipſis aliqua lux affundatur in conſiderandis hyperſolidis, quæ Algebra admittit. Inprimis autem attentionem meretur æquatio, quæ eminenter continet omnes æquationes ad algebraicas curvas. Etenim in eo latent tria artificia, nimirum 1°. quod æquationis alterum membrum ſit nihilum, de quo artificio jam ſupra diximus (§. 189); 2°. quod terminus unus repræſentet in caſu particulari plures, ut adeo coëfficientes explicandi ſint non uno, ſed diverſis modis, 3°. quod in æquatione nulla habeatur ratio ſignorum, quæ in particularibus variant æquationibus, ſed termini omnes afficiantur ſigno +, ne opus ſit plures formare æquationes generales; ubi omnes particulares ſub una comprehendi poſſunt, quod ſane artificium maximi faciendum. Enimvero ut applicatio formulæ generalis manifeſta evadat, lubet eam applicare ad circulum. Æquatio generalis eſt:

$$ay^m + bx^n + cy^r x^s + df = o.$$

Æquatio ad circulum:

$$y^2 + ax - x^2 = o$$

Vides hic abeſſe xy, nec ullum adeſt membrum conſtans ex mere cognitis, adeoque $cy^r\, x^s + df = o$, conſequenter formula generalis contracta hæc relinquitur:

$$ay^m + bx^n = o$$

Eſt igitur

$$ay^m = y^2$$

adeoque $a = 1$, $m = 2$

Porro

$$bx^n = + ax \qquad bx^n = - x^2$$

adeoque $b = a, n = 1$ $\qquad$ $b = -1, n = 2$

Docet adeo hoc ipſum exemplum, quomodo terminus unus in generali comparetur cum pluribus in particulari, ut coëfficientes indeterminati in generali determinentur ex particulari. Patet etiam, quomodo ſignum + in formula generali non obſtet, quo minus coëfficiens negati-

vus

vus determinetur ex particulari, dum hic reperitur $b = -1$. Habet nimirum b in casu præsenti valorem duplicem, alterum positivum $+a$, alterum negativum -1.

§. 198. Qui quæ de circulo diximus probe perpendit, ei non hærebit aqua circa ea, quæ de sectionibus conicis aliisque curvis in præsenti capite, & de locis geometricis in sequente demonstrantur. Incepimus a parabola, quæ est sectionum conicarum simplicissima. Æquatio ejus $y^2 = ax$. Quodsi fiat

$$x = 0$$

$$\text{erit } y^2 = 0$$

$$y = 0$$

Tab. II. Fig. 22. Atque adeo patet 1°. in origine abscissæ A curvam secare rectam datam, ad quam refertur, AX.

Sit alia abscissa AP $= v$, eidem respondens semiordinata PM $= z$, erit $z^2 = av$.

Ponamus $v > x$

erit $av > ax$
adeoque $z^2 > y^2$

$$z > y$$

2°. Crescentibus adeo abscissis, semiordinatæ quoque crescunt; consequenter curva in infinitum continuari potest, & ab axe AX continuo magis magisque recedit.

Si fiat $x = a$

erit $y^2 = a^2$

$$y = a$$

3°. Quando igitur abscissa parametro æqualis, etiam semiordinata eidem æqualis est, consequenter si abscissa parametro æqualis, semiordinata & abscissa æquales sunt.

Sit $y = \frac{1}{2}a$

erit $ax = \frac{1}{4}a^2$

$$x = \frac{1}{4}a$$

4°. Si ergo semiordinata semiparametro æqualis, quarta diametri parte a vertice A seu origine sua distat.

Quodsi æquationem ad parabolam cum æquatione pro omnibus curvis algebraicis conferre volueris; cum hæc sit:

$$ay^m + bx^n + cy^r x^s + df = 0$$

pro parabola vero

$$y^2 - ax = 0$$

& in hac deficiat xy & terminus constans ex mere cognitis respondens ipsi df, æquatio generalis contrahitur in

$$ay^m + bx^n = 0$$

estque $ay^m = y^2$ $bx^n = -ax$

adeoq; $a = 1, m = 2$ $b = -a, n = 1$

Hæc addere libuit, ut appareat, eodem modo tractari posse æquationem ad parabolam, qua tractavimus æquationem ad circulum. Cetera enim patent per resolutionem problematum in hoc capite propositorum.

§. 199. De methodo tangentium, qua utimur problematis 181; 189, 208, (§. 410, 440, 491 *Analyſ.*), quædam adhuc annotanda ſunt. Tangentes curvarum facillime determinantur per calculum differentialem, quemadmodum in Analyſi infinitorum docemus. Quoniam vero ſectiones conicas referre minime licet ad diametrum, niſi præſuppoſita tangente, cui ſemiordinatæ ſunt parallelæ & quæ ex puncto contactus ducitur; ideo neceſſarium fuit tangentem determinari per Algebram communem. Adhibuimus itaque methodum CARTESII, quæ nititur hoc principio, quod in contactu duæ radices evadant æquales: id quod ſuperius in circulo reperimus (§. 195). Ponamus enim rectam TR ſecare curvam in M & N; evidens eſt, quod, ſi abſciſſæ AP & AQ dicantur x, eiſdem reſpondere duas ſemiordinatas PM & QN, per quas y in æquatione explicari poteſt. Ducatur alia tr, quæ eandem curvam ſecat in punctis m & n: habebimus denuo duas ſemiordinatas pm & qn, per quas explicatur y in æquatione data. Patet autem abſciſſam unam PM continuo creſcere, & alteram QN continuo decreſcere, donec punctis M & N in contactu coincidentibus, in æquatione data una alteri fiat æqualis. Ad hæc qui animum advertit, nullo negotio deprehendet, quomodo ad methodum iſtam pervenire licuerit. Patebit autem ſuo loco, ſubtangentem per hanc methodum prodire eandem in ſectionibus conicis, quæ invenitur per calculum differentialem. Etſi autem hæc methodus videatur univerſalis, ad tantas tamen in curvis altioribus calculi perplexitates deducit, quæ vix videntur ſuperabiles. Unde in ea perficienda plurimum deſudarunt Geometræ, donec tandem ope calculi differentialis obtentum fuerit quod quærebatur.

Tab. II. Fig. 23.

§. 200. In Ellipſi $ay^2 = abx - bx^2$ (§. 420 *Analyſ.*). Quodſi hic ponas

$$x = 0$$

erit

$$ay^2 = 0$$

$$y^2 = 0$$

$$y = 0$$

Quamobrem patet, 1°. in origine abſciſſarum curvam ſecare rectam poſitione datam, ad quam refertur.

Si fiat $x = a$

erit $ay^2 = a^2b - a^2b$
$= 0$

adeoque denuo $y = 0$

Unde liquet, 2°. curvam quoque ſecare rectam, ad quam refertur, ſi abſciſſa fit datæ a æqualis, adeoque concavitatem obvertere eidem rectæ: ex quo porro ſequitur, cum ex altera parte eodem modo ſeſe habeant, quæ modo reperimus, curvam eſſe in ſe redeuntem.

Fiat

Fiat $b = a$

erit $ay^2 = a^2x - ax^2$

$y^2 = ax - x^2$

3°. Æquatio adeo ad ellipsin degenerat in æquationem ad circulum, ut circulus pro specie quadam ellipseos haberi possit, nacturus nomen ellipseos æquilateræ, nisi jam antea nomine circuli insignita fuisset hæc curva.

Quodsi a ponatur infinita, erit in æquatione ad ellipsin

$$\frac{bx^2}{a} = 0$$

adeoque $y^2 = bx$

Cum adeo æquatio ad ellipsin degeneret in æquationem ad parabolam, ideo liquet 4°. In locum ellipseos, cujus axis infinitus est, surrogari posse parabolam eandem cum ellipsi parametrum habentem.

Quodsi quis hæreat in infinitate axis elliptici, & in eo, quod hinc colligatur $\frac{bx^2}{a} = 0$; is evolvat, quæ in Ontologia de infinito mathematico demonstravimus.

§. 201. Eodem modo in hyperbola quoque generalia quædam ex æquatione ejus colliguntur. Æquatio ad hyperbolam est: $ay^2 = abx + bx^2$, seu $y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$.

Sit $x = 0$

erit $y^2 = 0$

$y = 0$

Patet ergo 1°. in origine abscissarum curvam secare rectam positione datam, ad quam ea refertur.

Sit $x = a$

erit $y^2 = ab + a^2b : a$
$= ab + ab = 2ab$

$y = \sqrt{2ab}$

Unde liquet 2°. si abscissa fuerit axi transverso æqualis, semiordinatam fore mediam proportionalem inter axem transversum & duplam parametrum.

Sit $x = b$

erit $y^2 = b^2 + \frac{b^3}{a}$

$y = \sqrt{(b^2 + \frac{b^3}{a})}$

Patet adeo 3°. si abscissa fuerit parametro æqualis, semiordinatam esse mediam proportionalem inter parametrum & compositam ex parametro & tertia proportionali ad axem transversum & parametrum.

Sit alia abscissa v, alia semiordinata eidem respondens z; erit per naturam curvæ

$$z^2 = bv + \frac{bv^2}{a}$$

Quare si $v > x$

erit $bv > bx$

$$\frac{bv^2}{a} > \frac{bx^2}{a}$$

$$bv + \frac{bv^2}{a} > bx + \frac{bx^2}{a}$$

$$y^2 > z^2$$

$$y > z$$

Patet itaque 4°. crescente abscissa crescere semiordinatam; adeoque curvam continuo magis magisque ab axe recedere; consequenter in infinitum continuari.

Quodsi æquationem pro hyperbola cum generali pro omnibus algebraicis conferre volueris; cum sit

$$ay^m + bx^n + cx^r y^s + df = 0$$

$$ay^2 - abx - bx^2 = 0$$

erit $cx^r y^s + df = 0$

$$ay^m = ay^2$$

$$a = a, m = 2$$

$$bx^n = -abx \quad bx^n = -bx^2$$

$$b = -ab, n = 1 \quad b = -b, n = 2$$

Reliqua in ipsa Analysi reperiuntur.

§. 202. Enimvero applicemus eandem methodum ad æquationem pro hyperbola intra asymptotos. Quoniam $xy = ab$,

erit $x = \frac{ab}{y}$

Fiat, $x = 0$

erit $\frac{ab}{y} = 0$

adeoque, $y =$ infinit.

Patet itaque 1°. in origine abscissarum semiordinatam esse infinitam.

Similiter cum sit $y = \frac{ab}{x}$

Si ponamus $x =$ infinit.

erit $\frac{ab}{x} = 0$

adeoque $y = 0$

Unde liquet 2°. rectam, in qua sumuntur abscissæ cum curva non concurrere nisi intervallo infinito, seu ab eadem non distare nisi intervallo infinite parvo; quatenus ab quantitas ordinaria per infinitam divisa dat particulam infinite parvam, quæ respective nihilum est.

Sit jam alia abscissa v, semiordinata alia z; erit per naturam curvæ

$$z = \frac{ab}{v}$$

Ponamus $v > x$

erit $\frac{ab}{v} < \frac{ab}{x}$

adeoque $z < x$

Videmus ergo 3°. crescente abscissa decrescere semiordinatam; consequenter lineam curvam continuo magis magisque ad eam appropinquare rectam, in qua sumuntur semiordinatæ.

Quoniam itaque hæc cum curva non concurrit nisi infiniro intervallo, aut potius ab eadem non distat nisi quantitate infinite parva, quando illa

illa in infinitum continuatur (*vi num.* 2); & in origine abſciſſarum ſemiordinata infinita (*vi num.* 1); curva continetur inter duas rectas, quæ in infinitum excurrunt, & ad quas curva continuo propius propiuſque accedit, nunquam tamen eaſdem ſecat. Continetur adeo inter aſymptotos. Ex hoc exemplo apparet, quomodo ex æquatione colligatur, quod curva, quæ per eam definitur, habeat aſymptotos.

§. 203. Sed demus etiam exemplum in curva quadam ſuperioris generis, cujus æquatio perplexa videtur. Sit itaque $x^4 + 2bx^3 + y^2x^2 + b^2x^2 = a^2b^2 + 2a^2bx + a^2x^2$, quam invenimus pro Conchoide prima ſive ſuperiore (§. 538 *Anal.*); erit

$$y^2x^2 = a^2b^2 + 2a^2bx + a^2x^2 - x^4 - 2bx^3 - b^2x^2$$

$$y^2 = \frac{a^2b^2}{x^2} + \frac{2a^2b}{x} + a^2 - x^2 - 2bx - b^2$$

Fiat $x = 0$

erit $\overline{x^2 - 2bx} = 0$

$$\frac{a^2b^2}{x^2} + \frac{2a^2b}{x} = \frac{a^2b^2}{0^2} + \frac{2a^2b}{0} = \text{infin.}$$

adeoq; $a^2 - b^2 = 0$, reſpectu $\frac{a^2b^2}{0^2} + \frac{2a^2b}{0}$

Quare $y^2 = \text{infin.}$

$y = \text{infin.}$

Patet itaque 1°. in origine abſciſſarum ſemiordinatam eſſe infinitam, conſequenter curvæ aſymptotum.

Fiat $x = a$

erit $y^2 = \frac{a^2b^2}{a^2} + \frac{2a^2b}{a} + a^2 - a^2 + 2ab - b^2$

$= b^2 + 2ab + a^2 - a^2 - 2ab - b^2$

$= 0$

$y = 0$

Quando igitur 2°. abſciſſa fit ipſi a æqualis, ſemiordinata nulla eſt, adeoque curva rectam, in qua ſumuntur abſciſſæ, ſecat.

Quoniam y ex infinita nulla evadit, dum x ex nihilo degenerat in a; neceſſe eſt 3°. creſcente abſciſſa decreſcere ſemiordinatam.

Quia $y^2 = \frac{a^2b^2}{x^2} + 2\frac{a^2b}{x} + a^2 - x^2 - 2bx - b$

$= (\frac{ab}{x} + a)^2 - (x + b)^2$

$$y = \sqrt{((\frac{ab}{x} + a)^2 - (x + b)^2)}$$

Eſt igitur y latus trianguli rectanguli, cujus hypothenuſa componitur ex $\frac{ab}{x}$ & a, crus unum vero ex b & x. Unde liquet, 4°. Si ſemiordinata infinita dicatur regula, recta b diſtantia poli a regula, recta vero a diſtantia verticis a regula, quemadmodum termini in Conchoide recepti ſunt (§. 535 *Anal.*); ſemiordinatam eſſe crus trianguli rectanguli, cujus hypothenuſa componitur ex tertia proportionali ad abſciſſam (ejus origine in regula conſtituta), diſtantiam regulæ a vertice & ejuſdem

a po-

a polo diſtantiam, atque diſtantia ejuſdem regulæ a vertice, crus vero alterum ex abſciſſa & diſtantia regulæ a polo.

Tab II. Fig. 24. Hinc 5°. ex data abſciſſa BP, diſtantia regulæ a polo BC, & a vertice BA, reperitur ſemiordinata PM, ſi ex P intervallo BA interſecetur regula in O, & recta PO producatur, donec perpendiculari CH in polo erecta in H occurrat; tandemque intervallo CH interſecetur PM ad AB perpendicularis in M.

Quoniam enim PB $= x$, PO $= a$, BC $= b$; erit OH $= \frac{ab}{x}$ conſequenter PH $= \frac{ab}{x} + a$, trianguli rectanguli PCH hypothenuſa. Quamobrem cum porro ſit CP $= b + x$, erit CH $= \sqrt{((\frac{ab}{x} + a)^2 - (b + x)^2)} = y$, conſequenter quia PM $=$ CH; erit PM ſemiordinata quæſita. Quodſi fiat CL $=$ PB & CN $=$ BA, ac LN ad BC perpendicularis; recta CN producta ſtatim reſecabit ſemiordinatam PM.

Manifeſtum itaque eſt, quomodo ex æquatione eruatur modus determinandi geometrice punctum curvæ reſpondens cuilibet abſciſſæ, quamvis æquatio primo intuitu videatur admodum perplexa. Ceterum in applicatione methodi generalis adhibentur varia artificia, ex anterioribus equidem nota, quæ tamen tyroni non ſtatim ſuccurrunt. Quamobrem hinc eluceſcit, quod jam ſæpe inculcavimus, artem exercendam eſſe per exempla, non per regulas particulares: etſi particulares annotandæ ſint, ubi occurrunt; ut tanto facilius ſuccurrant, quando denuo iiſdem opus habemus. Non addimus de conchoide alia, quæ ex ejus æquatione deduci poterant, ne ſimus juſto prolixiores.

§. 204. Etſi ex dictis appareat, ductum curvæ hac methodo faciliſſime indagari poſſe, ut de reliquis taceamus; non tamen exiſtimandum eſt, idem in qualibet promiſcue curva eadem facilitate ſuccedere. Etenim ſi in æquationibus altioribus occurrunt termini, quos duæ indeterminatæ ingrediuntur, nec earum ſeparatio in promptu eſt, quemadmodum vidimus in conchoide (§. 203); hærebit aqua. Sit ex. gr. $y^3 - axy = x^3$. Quodſi ponamus $x = a$, prodibit $y^3 - a^2y = a^3$, æquatio cubica affecta, ex qua radicis extractio difficilis & cujus conſtructio geometrica per inferiora demum patet. Similiter, quamvis per calculum algebraicum, quæ quæruntur, haud raro mira facilitate eruantur, quemadmodum ſupra vidimus in circulo (§. 193), & plurima capitis præſentis problemata loquuntur, quæ de ſectionibus conicis propoſuimus; ſubinde tamen calculus prolixus & intricatus evadit, prouti videre licet in probl. 193, 195, 209, (§. 449, 454, 492 *Analyſ.*)

§. 205.

§. 205. Nos sectiones conicas consideravimus in plano & æquationes assumsimus, quæ eas definiunt. Hinc vero nondum constat, curvas istas esse sectiones coni, nisi supponas theoriam sectionum conicarum a Veteribus traditam, tanquam cognitam. Quamobrem consultum esse duximus analytice demonstrari, sectione coni prodire has ipsas curvas, quas in plano consideravimus, & quarum descriptiones, proprietates aliaque symptomata ex æquationibus assumtis deduximus (§. 511 & seqq. *Anal.*). Poteramus æquationes, quas assumsimus, eruere ex proprietatibus, quas ex sectione coni derivavimus: sed cur hoc minime fecerimus, jam monuimus (§. 514 *Anal.*). Ex. gr. pro parabola ex sectione coni deduximus

$$y^2 : q^2 = x : z$$

ubi y & q denotant semiordinatas, x & z autem ipsis respondentes abscissas.

Quoniam etiam est

$$y^2 : x = q^2 : z$$

erit $y^2 : ax = q^2 : az$;

Quare si ponamus, constantem a talem assumi, ut sit $y^2 = ax$; evidens est fore etiam $q^2 = az$, atque adeo in omni puncto curvæ esse quadratum semiordinatæ æquale rectangulo ex abscissa in eandem rectam constantem. Posse autem a talem assumi, ut sit $y^2 = ax$ patet, quia a tertia proportionalis est ad abscissam & semiordinatam. Idem etiam hoc modo patere poterat. Si alternando esse debet $y^2 : x = q^2 : z$ (§. 173 *Arithm.*) cum ratio non sit nisi homogeneorum (§. 126 *Arithm.*) x & z denotare debent rectangula, quorum latus unum unius est x, latus unum alterius z, latus vero alterum unitas seu recta, quæ pro unitate sumitur (§. 375 *Geom.*), utique eadem utrobique (§. 178 *Arithm.*). Quodsi ergo hæc recta efficere debet rectangulum $1\,x$, æquale quadrato y^2, unitas ista degenerare debet in tertiam proportionalem ad x & y, quam fore eandem cum tertia proportionali ad q & z per modo demonstrata patet. Unde manifestum est, æquationem ad sectionem coni præsentem esse $y^2 = ax$, aut, si $a = 1$, $y^2 = x$. Notandum adeo hic est, si in æquationibus non appareat lex homogeneorum observata, termini pauciorum dimensionum coëfficientem esse unitatem, seu rectam quandam determinatam, quæ pro unitate sumitur. Cum autem quælibet recta pro unitate assumi possit, unitatem esse eandem non sumendum, sed demonstrandum est. Ita sumere licet $y = x$, ubi coëfficiens ipsius x est 1; sumere quoque licet $q^2 = z$, ubi coëfficiens ipsius z est 1. Enimvero non licet sumere coëfficientes ipsarum x & z esse æquales; sed hoc demonstrandum, quemadmodum ex modo dictis claret. Nihil hic supponitur, quod non sit ex notione numeri rationalis integri manifestum, quem in communi Arith-

metica practica consideramus; modo ad communia perpendenda omnem attentionem afferamus: qua neglecta, haud raro hærent tyrones, ubi sumuntur quæ per ea patent, & ad ardua magis applicantur; nisi fide Mathematicorum tanquam vera admittere velint, quorum rationem minime capiunt.

§. 206. Id quoque notandum est, in æquationibus, per quas definiuntur curvæ, originem abscissarum non semper assumendam esse in aliquo curvæ puncto, etiam si recta, ad quam curva refertur, eandem secat vel tangit; sed eandem esse posse quodvis punctum aliud in eadem recta assumtum. Ita ex. gr. in circulo, si peripheriæ puncta referuntur
Tab. I. Fig. 25. ad diametrum AB, origo abscissarum statui potest in centro C, ut sit $PC = x$, $PM = y$ & radius $AC = MC = a$. Quoniam enim $MC^2 = PM^2 + PC^2$ (§. 417 *Geom.*); habebimus $a^2 = y^2 + x^2$, adeoque $y^2 = a^2 - x^2$; quæ æquatio non minus circulum definit, quam altera, quam supra dedimus, & unde circuli genesin atque proprietates, cum aliis symptomatis, deduximus (§. 193). Atque ex hac æquatione eadem deducere licet, quæ ibidem ex altera deduximus, si tanquam data supponatur, ut adhuc ignoretur, ad quamnam curvam ea sit. Etenim si hic ponas

$$x^2 = 0$$

erit

$$y^2 = a^2$$
$$y = a.$$

Unde liquet 1°. in origine abscissarum semiordinatam esse constanti a æqualem.

Si vero ponas $x = a$

erit

$$y^2 = a^2 - a^2$$
$$= 0$$
$$y = 0$$

Unde patet 2°. si abscissa fiat semiordinatæ, quæ in origine abscissarum est (*vi num.* 1), æqualis, curvam secare rectam positione datam, ad quam refertur.

Quoniam $a^2 = y^2 + x^2$; ideo liquet, 3°. Hypothenusam trianguli rectanguli, cujus crura sunt abscissa & semiordinata, ad quodvis punctum curvæ esse eandem; consequenter cum hæc hypothenusa constanter ex origine abscissarum ducatur, rectas omnes ex origine abscissarum ductas ad curvam esse inter se æquales. Æquatio adeo nos deducit ad genesin circuli non minus, quam ad definitionem ejus nominalem; &, ubi definitio circuli ex elementis nota supponitur, hinc discimus, æquationem esse ad circulum. Immo potest origo abscissarum etiam extra centrum statui, veluti in L, ubi AL Tab. II. Fig. 25.
constans est, & abscissa LP. Sit enim $AL = b$, $AB = a$, $LP = x$, $PM = y$, erit $AP = b + x$, $PB = a - b - x$, consequenter ob

$$PM^2 = AP \cdot PB$$
$$y^2 = ab - b^2 + ax - 2bx - x^2$$

Quodsi

Quodſi hic ponas

$$x = o$$

erit

$$y^2 = ab - b^2$$

$$y = \sqrt{(ab - b^2)}$$

Unde liquet, 1°. in origine abſciſſarum ſemiordinatam eſſe mediam proportionalem inter rectam quandam conſtantem b & differentiam ejus a conſtante alia a.

Quodſi fiat

$$x = a$$

$$\text{erit } y^2 = ab - b^2 + a^2 - 2ab - a^2$$
$$= -ab - b^2$$

Patet itaque 2°. abſciſſam nunquam fieri poſſe ipſi a æqualem, ſed ſemper eadem minorem eſſe debere.

Sit $x = a - b$

$$\text{erit } y^2 = ab - b^2 - 2ab + 2b^2 + a^2$$
$$- ab - a^2 + 2ab - b^2$$

$$y^2 = o$$

$$y = o$$

Patet adeo, 3°. ſi abſciſſa fiat differentiæ quantitatum conſtantium æqualis, curvam ſecare rectam poſitione datam.

Sit $x = \frac{1}{2}a - b$

$$\text{erit } y^2 = ab - b^2 - ab + 2b^2 + \tfrac{1}{2}a^2 - ab$$
$$- \tfrac{1}{4}a^2 + ab - b^2$$

$$y^2 = \tfrac{1}{4}a^2$$

$$y = \tfrac{1}{2}a$$

Videmus itaque 4°. ſi abſciſſa fiat $\frac{1}{2}a - b$, ſemiordinatam eſſe $= \frac{1}{2}a$.

Quodſi ponamus

$$b = o$$

erit $y^2 = ax - x^2$

Æquatio igitur degenerat in æquationem ordinariam pro circulo (§. 193).

Licet etiam originem abſciſſarum ſtatuere extra circulum, veluti in N, ut ſit, NP $= x$, adeoque ſi NA $= b$, AP $= x - b$. Et ſimiliter abſciſſas computare licet in aliqua a centro C diſtantia, ut earum origo vel ſit inter A & C, vel inter C & B. Hæc ſi notent tyrones, in doctrina de locis geometricis & conſtructione æquationum altiorum nihil prorſus ſentient difficultatis. Patebit etiam, quomodo ad formulas generales plana ſit via. Quæ vero hic annotamus de relatione curvarum ad rectam, quæ curvam in puncto quodam ſecat, eadem quoque locum habent, ubi eandem referre libuerit ad rectam extra curvam quomodocunque ſitam. Nec oleum atque operam perdunt tyrones, ſi in omni caſu poſſibili æquationem ad circulum inveſtigent, ut methodum definiendi curvas per æquationem intimius inſpiciant beneficio exempli omnium facillimi & notiſſimi, idem imitaturi in curvis aliis, quod in circulo fecere.

§. 207. Enimvero abunde ea docuimus, quæ in hac methodo lucem accendunt tyronibus, ne in tene-

bris palpitent ad magis ardua progressi, quemadmodum vulgo accidere solet. Sed dicenda quoque nonnulla sunt de lineis non algebraicis, quarum nonnullæ sub finem capitis definiuntur. Definimus Quadraticem DINOSTRATIS, per $ay=bx$, ubi x denotat arcum AN, a Quadrantem AB, b radium AC, & y portionem radii AP, quæ ad radium eandem rationem habet, quam habet arcus AN ad Quadrantem. Quamobrem etsi æquatio alias definiat triangulum rectangulum æquicrurum; consequenter in ea spectetur relatio rectæ, quæ hypothenusa est ad crus unum, in quo sumuntur abscissæ; præsenti tamen in casu æquatio, quæ eadem videtur, prorsus diversa est. Etenim in casu priori, quando est ad triangulum rectangulum æquicrurum, a & x denotant lineas rectas; in posteriori autem, quando ad Quadratricem est, a designat quadrantem, x arcum circuli quadrante minorem. Æquatio igitur algebraica non est; nisi cum in ea singulæ literæ denotent totidem rectas. Hoc tamen non obstante æquationes istiusmodi, quas curvæ lineæ ingrediuntur, tractari possunt eodem modo, quo ante tractavimus algebraicas: quod succedere ipsa præsens æquatio docere potest. Etenim

Tab VI. Fig. 67. Algeb.

Si fiat $x=0$

erit $ay=0$

$y=0$

Atque adeo patet, quadratricem concurrere cum radio in origine abscissæ.

S $x=a$

erit $ay=ab$

$y=b$

Unde liquet, quamprimum x fit quadranti æqualis, rectam AP, quæ designatur per y, degenerare in radium.

Si $x=\frac{1}{2}a$

$ay=\frac{1}{2}ab$

$y=\frac{1}{2}b$

Evidens igitur est, dimidio quadranti respondere radium dimidium.

Eadem adeo eliciuntur, quæ per genesin Quadratricis manifesta sunt.

Quod vero etiam alia ignota hinc deduci possint, suo patebit loco (§. 55 *Anal. infin.*): id quod omnino notandum, ne nullum in usum æquatio ista data videatur.

Singulare quid habet æquatio, quod non exprimat relationem ipsius curvæ ad rectam positionem datam per se, sed relationem potius curvæ alterius, nimirum Quadrantis circuli, cujus ope determinatur punctum M; quod rectæ AP & arcui AN, hoc est duabus indeterminatis y & x respondet. Exprimit scilicet relationem arcus AN ad rectam AP, qualis esse debeat, ut ipsi AP respondeat punctum M in Quadratrice. Data enim hac relatione datur etiam punctum M.

Quo-

Quoniam vero $y = \frac{ab}{x}$ adeoque AP quarta proportionalis ad arcum AN, quadrantem AB & radium AC; determinatio puncti M dependet a rectificatione indefinita circuli, consequenter a circuli quadratura. Ceterum Quadratrix insinuat artificium reductionis constructionis curvarum ad curvas simpliciores, supposita harum quadratura vel rectificatione: neque enim in omnibus curvis rectificatio pendet a quadratura, prouti in circulo obtinet (*vi. theor.* 3. §. 128 *Anal.*), quemadmodum suo loco videbimus, ubi de quadratura & rectificatione curvarum agitur. Artificium hoc maximi momenti est in Analysi infinitorum ad Geometriam sublimiorem applicata, quemadmodum patet per problemata physico-mechanica, qualia in Elementis Mechanicæ occurrunt. Quamobrem consultum est, ut tyrones, qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, tempestive annotent, quomodo inventa Veterum recentioribus Geometris insinuaverint artificia, aut saltem insinuare potuerint, siquidem attentionem suam deficere non fuerunt passi.

§. 208. Notandum adhuc est, posse etiam curvas referri ad curvas alias positione datas, quemadmodum referuntur ad rectas positione datas, ita ut abscissæ sumantur in curva positione data, quemadmodum sumuntur in recta positione data: quod ut facilius intelligatur, dabo exemplum. Sit AMO parabola *Apolloniana* seu primi generis. Producatur semiordinata PM in N, donec recta MN habeat ad arcum parabolicum AM eam relationem, quam habet semiordinata PM ad ejus abscissar AP; evidens est, si arcus AM $= x$, MN $= y$ & recta quædam constans $= a$, fore $y^2 = ax$. Æquatio hæc ab æquatione ad parabolam in eo differt, quod x denotet arcum parabolicum AM, cum in æquatione ad parabolam denotet rectam AP. Ceterum eadem ex æquatione hac deducuntur, quæ ex æquatione ad parabolam, nisi quod theoremata ingrediatur arcus parabolicus. Nimirum cum sit $y = \sqrt{ax}$; semiordinata MN est media proportionalis inter arcum parabolicum datum AM & rectam quandam datam constantem a, quæ tertia proportionalis est ad quemvis arcum parabolicum & ipsi respondentem semiordinatam. Et quemadmodum in parabola quadrata semiordinatarum habent rationem abscissarum, ita semiordinatæ curvæ ANR sunt in ratione arcuum parabolicorum ipsis respondentium. Hoc artificio jam usus est ARCHIMEDES in spiralibus qui eas retulit ad peripheriam circuli tanquam ad axem. Facile autem apparet, relationem semiordinatæ MN ad arcum AM exprimi posse per æquationem curvæ algebraicæ cujuscunque alte-

Tab. II. Fig. 22.

rius. Ita ſi arcus AO$=a$, AM$=x$, & MN$=y$; curva AMR definiri poteſt per æquationem $y^2 = ax - x^2$, quæ eſt æquatio ad circulum (§. 193).

Si ponamus $x = a$

$$y^2 = a^2 - a^2$$
$$= 0$$
$$y = 0$$

Unde liquet punctum R cum puncto O coincidere, adeoque curvam AR parabolam AO ſecare in O.

Si fiat $x = \frac{1}{2}a$

$$y^2 = \tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{4}a^2$$
$$= \tfrac{1}{4}a^2$$
$$y = \tfrac{1}{2}a$$

Patet itaque, ſi arcus parabolicus AO biſecetur, fore MN arcui dimidio æqualem.

Ponamus ex adverſo $y = \frac{1}{2}a$

erit $\frac{1}{4}a^2 = ax - x^2$

$$x^2 - ax = -\tfrac{1}{4}a^2$$
$$x^2 - ax + \tfrac{1}{4}a^2 = 0$$
$$x - \tfrac{1}{2}a = 0$$
$$x = \tfrac{1}{2}a$$

Unde manifeſtum eſt, in nullo alio puncto, quam in medio arcus AO arcum parabolicum AM rectæ MN æqualem eſſe.

§. 209. Præter ſectiones conicas definivimus potiſſimum eas curvas, quæ a Veteribus fuerunt inventæ, & quas recentiores Geometræ addiderunt, antequam Algebra ad Geometriam ſubliniorem applicaretur & doctrina curvarum amplificaretur. Veteres præter circulum, parabolam, hyperbolam & ellipſin conſiderarunt conchoidem, ciſſoidem, quadratricem, atque ſpirales, & recentiores addiderunt logarithmicam & cycloidem, cui deinceps acceſſit epicyclois. Tenendum nimirum eſt, Veteres non animum advertiſſe ad curvas, niſi quatenus problematis geometricis ſolvendis inſerviebant. Duo autem apud ipſos celebrabantur problemata; alterum ſcilicet de inveniendis duabus mediis continue proportionalibus inter duas rectas datas; alterum de quadratura circuli. In uſum prioris problematis ſolvendi NICOMEDES invenit conchoidem, DIOCLES ciſſoidem: poſterius autem problema per ſpirales ſolvere tentavit ARCHIMEDES, per quadratricem DINOSTRATES. Recentius quadratura circuli tentata per cycloidem, ad cujus imitationem, ſi geneſin illius ſpectes, inventa epicyclois. Cum vero logarithmi eſſent inventi & tanta utilitate in Matheſin practicam recepti; in uſum logarithmorum reperta eſt logarithmica, ad cujus imitationem deinceps excogitata logiſtica ſpiralis. Noſtrum erat lineas curvas veteribus celebratas non prætermittere ſilentio, qui lectorem noſtrorum Elementorum ad Matheſeos univerſæ cognitionem manuducere intendimus; præſer-

præsertim cum inventis recentioribus ansam dederint, quæ a Veteribus inventa fuerunt, quemadmodum jam hinc inde annotavimus. Logarithmica autem & cyclois usum præclarum nactæ sunt in problematis physico-mechanicis, prouti suo loco in Elementis Mechanicæ ostendimus. Earundem itaque mentionem injicere debuimus. Habet quoque usum prorsus eximium epicyclois in Mechanica practica, & aliis inventis recentioribus ansam dedit. Quamobrem nec hancce silentio præteriri fas erat. Quadratricem *Tschirnhausianam* & Lineam sinuum, tangentium atque secantium non alio fine adjecimus, quam ut constaret, quomodo curvarum geneses excogitari possint: quem in finem etiam adjecimus problemata ultima hujus capitis (§. 579 *& seqq. Anal.*). Ex duobus tamen ultimis (§. 581, 583 *Anal.*) simul discimus, quomodo curvæ superiorum generum describi possint ope curvarum generum inferiorum. Ecce igitur tibi rationem, cur hasce potissimum curvas in præsente capite consideraverimus.

§. 210. Postquam ostendimus, quomodo Algebra utamur in eruendis curvarum descriptionibus, proprietatibus, aliisque symptomatis; ad earum usum in construendis problematis exponendum progredimur. Primum itaque docemus, quomodo problemata indeterminata construantur. Atque eo fine capite sexto agitur de locis geometricis. Doctrinam hanc invenere veteres Geometræ; sed Recentiores ad eandem Algebram applicare cœperunt; ubi constabat intersectione duorum locorum construi æquationes altiores. Problemata indeterminata, quemadmodum vidimus superius cap. 2, sect. 2, duas habent quantitates incognitas, quarum, una pro arbitrio assumta, determinatur altera; quemadmodum vidimus in curvis algebraicis assumta abscissa pro arbitrio determinari semiordinatam: id quod etiam obtinere, si recta quædam positione data referatur ad rectam aliam itidem positione datam, ex iis liquet, quæ in Geometria de lineis proportionalibus inveniendis demonstrata sunt. Ita in triangulo rectangulo ABC, habet PM ad AP rationem constantem ipsius BC ad AB; atque adeo sumta AP pro arbitrio, per rectam AC determinatur PM. Dum itaque problema indeterminatum construimus, omnes reperimus rectas possibiles, quæ eandem datam relationem ad se invicem habent. Unde si ad rectam positione datam applicentur parallelæ, & quæritur in recta positione data punctum, quod sit origo unius indeterminatæ, atque linea secans omnes istas parallelas, ut ad ipsas respondentes portiones in linea positione data habeant eandem relationem datam; problemati satisfactum. Hinc vero patet, cur linea ista dicatur Locus; Tab. II. Fig. 16.

cus; quia nempe continet omnes lineas rectas, quæ in problemate in locum indeterminatarum substitui possunt; seu quia in ea sunt singula puncta, quibus terminantur rectæ, una indeterminatarum pro arbitrio assumta, determinandæ. Ex. gr. in triangulo rectangulo hypothenusa AC est locus omnium rectarum proportionalium cruribus AB & BC: etenim continuatis rectis AB & AC in infinitum, intra crura hujus anguli continentur omnes istæ proportionales, quarum una sumitur in AB, altera vero determinatur per rectam AC; & in recta AC sunt omnia puncta M, quibus terminantur indeterminatæ ad AB normales, ut fiant assumtis AP in data ratione proportionales. Ratio est relatio simplicissima, quam exhibet recta ad rectam aliam relata. Relationes vero ceteræ constantes repræsentantur per lineas curvas; qualis est in circulo, ut quadratum semiordinatæ sit æquale rectangulo ex segmentis diametri. Videmus adeo æquationes, quæ duas involvunt lineas incognitas, geometrice construi posse; quatenus eædem exprimunt relationem constantem, quam habent singula lineæ curvæ puncta ad rectam positione datam, seu quatenus eædem sunt æquationes ad curvam quandam lineam, quam definiunt. Atque ideo æquationes, quas ante diximus æquationes ad curvam, hic vocantur locales.

§. 211. Monuimus in anterioribus, curvam referri posse ad quamlibet rectam positione datam, sive ea curvam secet in vertice, sive in alio quocunque puncto, sive eandem non secet, sed tota extra eam cadat intervallo vel nullo, vel dato ab eadem distans, & sive axi fuerit parallela, sive ad eundem obliqua. Hinc determinantur omnes casus possibiles æquationum localium: quæ quomodo reperiantur, ex iis patet, quæ de circulo paulo ante ostendimus Cum Slusius æquationum localium usum in construendis æquationibus cubicis & biquadraticis docuisset; Philippus de la Hire Algebram ad loca geometrica applicavit, & in omni casu æquationes loca es ad rectam, circulum, & sectiones conicas investigare docuit: quod idem fecit Ozanamus. Enimvero cum sic plures prodirent æquationes particulares ad eandem lineam; Joannes Craigius æquationes generales investigavit ad sectiones conicas, quæ omnes particulares eminenter continent: cujus exemplum secutus Hospitalius. Nobis quoque placuit generalia invenire theoremata construendi omnes æquationes locales ad rectam & sectiones conicas; cum per ea constructiones problematum indeterminatorum, via vere analytica, erui possint. Rem penitius examinanti constabit, non aliis hic opus esse artificiis, quam quæ paulo ante insinuavimus, cum de æquationi-

tionibus ad circulum ageremus. Theoremata generalia inveniuntur, si investigentur theoremata in casu maxime composito; in quo linea, ad quam refertur curva, ponitur esse ad axem obliqua, & origo abscissarum distare a vertice, vel centro curvæ, si quod habet, aliquo intervallo. Etenim si hic quædam lineæ constantes supponantur nullæ, in æquatione termini evanescunt, qui in eas ducuntur, sicque prodit æquatio in casu simpliciori. Hoc fieri debere observavimus superius, cum in circulo origo abscissarum statuere-
Tab. II. Fig. 25. tur in L intra verticem A & centrum C. Vidimus enim si ponatur $AL=o$, æquationem in eo casu repertam $y^2 = ab-b^2 + ax-2bx-x^2$, degenerare in æquationem ad circulum $y^2 = ax - x^2$, in casu simplicissimo, quando origo abscissarum est in A. Enimvero non modo æquatio magis composita, hoc pacto, reducitur ad simpliciorem; verum etiam schema, quod exhibet constructionem illius æquationis, degenerat in schema, quod hujus repræsentat constructio-
Tab. VII. Fig. 75. Algeb. nem. Ex. gr. si fuerit $LH = o$, linea DH incidit in DL, adeoque pars schematis, quæ relinquitur, casum istum repræsentat, in quo recta positione data DL, ad quam refertur curva AMB, est axi AS parallela. Quodsi porro fiat $KD = o$, relinquitur pars schematis, quæ repræsentat casum, in quo abscissæ computantur in axe ultra verticem continuato KS, & origo earum statuitur in aliqua a vertice distantia K. Denique si etiam ponatur $AK = o$, prodit schema casum ordinarium exhibens, in quo abscissæ sumuntur in axe AS, & origo abscissarum in vertice. Methodus adeo qua utimur, non modo æquationes locales omnes ad eandem curvam una æquatione includit, eodem artificio, quo æquationes omnes ad curvas algebraicas ad æquationem unicam generalem reduximus (§. 385 *Analys.*); sit ita quod ibidem aliud præterea artificium adhibendum erat, quo hic non habemus opus; quia ibidem æquationes omnes una formula comprehendendæ, non erant ejusdem gradus, quemadmodum in præsenti obtinet; sed etiam unico schemate omnium æquationum localium constructiones comprehendit. Quænam hæc sit prærogativa præ methodo communi, qua singuli casus sigillatim expenduntur; facillimo negotio animadvertet, qui, quæ de locis geometricis tradimus, cum iis conferre voluerit, quæ de iisdem docet DE LA HIRE, vel OZANAMUS.

§. 212. Unum adhuc superest, quod de theorematis hisce generalibus observandum, ne eorum applicatio turbet tyrones. In schemate nostro supponimus, originem abscissarum removeri ultra verticem, ita ut abscissa linea quadam data excedat abscissam ordinariam. Enimvero vidimus supra, originem earundem Tab. II. Fig. 25.

etiam ſtatui poſſe ex parte altera, veluti in L, ita ut abſciſſa LP deficiat ab abſciſſa ordinaria linea quadam data AL. Similiter rectam axi parallelam, vel ad eum obliquam ponimus ultra eundem, ut augeat ſemiordinatam ordinariam PM recta quadam data; cum tamen etiam hæ lineæ ita duci poſſint ex parte oppoſita, ut ſemiordinata QM vel RM deficiat ab ordinaria PM, linea quadam data PQ, vel PR. Æquatio igitur localis generalis non videtur omnes æquationes particulares continere, nec ſchema illi reſpondens comprehendere omnia ſchemata, quæ harum conſtructionem exhibent. Dubium hoc ut tollatur, noſtrum eſt docere, qua ratione innotuerit, quomodo iidem quoque caſus in eo, ad quem computavimus æquationem, contineantur. Supra reperimus æquationem ad circulum, ſi origo abſciſſarum fuerit in L, $y^2 = ab - b^2 + ax - 2bx - x^2$. Ponamus jam originem abſciſſarum eſſe in N, ut ſit $NA = b$, $NP = x$, ſitque $AB = a$, $PM = y$; erit $AP = x - b$, $PB = a + b - x$.

Ob $PM^2 = AP.PB$

prodibit

$$y^2 = ax - x^2 + 2bx - ab - b^2$$

Æquationem hanc a ſuperiori non differre videmus niſi ſignis & hanc diverſitatem hinc oriri obſervamus, quod ibi abſciſſa ordinaria AP ſit $x - b$, hic vero $b - x$. Quodſi ergo æquationes iſtæ redigantur ad nihilum, quemadmodum in hac doctrina fieri ſolet; habebimus in eo caſu, ubi abſciſſarum origo in N,

$$y^2 + x^2 - ax + ab = 0$$
$$\quad - 2bx + b^2$$

in caſu autem oppoſito, ubi origo abſciſſarum in L,

$$y^2 + x^2 - ax - ab = 0$$
$$\quad + 2bx + b^2$$

Quare ſi duas haberes formulas, valor ipſius b in caſu particulari dato ſemper eliceretur poſitivus, cum in priori coëfficiens negativus comparandus eſſet cum negativo $-2b$, in poſteriori coëfficiens poſitivus cum $+2b$. Quodſi vero æquationem, quæ cum formula poſteriori conferri debebat, cum priori componis, adeoque quantitatem poſitivam cum negativa, neceſſe eſt ut valor ipſius b prodeat negativus. Si $-b$ ſubſtituas in locum $+b$ in æquatione altera; pro $+2bx$ habebis $-2bx$, pro $-ab$ vero $+ab$; ducendo ſcilicet $-a$ in $-b$: aſt b^2 retinet ſignum ſuum, quia $-b$ in $-b$ efficit $+b^2$. Atque ſic æquatio poſterior degenerat in priorem; ut adeo prior in utroque caſu adhiberi poſſit; modo notes, quoties in caſu particulari lege comparationis valor ipſius b elicitur negativus, toties ſumendam eſſe rectam eidem reſpondentem ex parte oppoſita, ut ſit $AL = b$. Idem cum eodem modo obtineat quoad diſtantiam parallelæ axi ab eodem PQ; manifeſtum eſt, cur una formula ſatisfaciat in caſu utroque, modo obſervetur, quod de valore negativo

in

in æquationis particularis cum generali comparatione prodeunte annotavimus. Idem adhuc clarius patet in parabola. Etenim si fuerit SA $= b$, SP $= x$, adeoque AP $= x - b$; erit ex natura Parabolæ, si parameter fuerit a,

Tab. II. Fig. 22.

$$y^2 = ax - ab$$

seu $$y^2 - ax + ab = 0$$

Quodsi fuerint omnia ut ante, sed AL $= b$, adeoque AP $= b + x$, erit

$$y^2 = ax + ab$$

seu $$y^2 - ax - ab = 0$$

Hic denuo patet, æquationem posteriorem non differre a priori, nisi diversitate signorum in iis terminis, quorum coëfficiens est b; in priori enim habemus $+ ab$, in posteriori $-ab$. Quamobrem ubi in applicatione formulæ generalis, quæ ad casum priorem spectat, confers terminum negativum æquationis ad casum posteriorem spectantis cum positivo, qui ex formula casus prioris sumitur; valor utique prodire debet negativus pro AL. Patet etiam hic, si in æquatione posteriori pro $+ b$ substituas $- b$, ducendo $- b$ in $- a$, prodire $+ ab$, adeoque æquationem posteriorem degenerare in priorem; quemadmodum ex adverso prior abit in posteriorem, si in priori substituas $- b$ pro $+ b$. Quodsi enim ducas $+ a$ in $- b$, prodibit $- ab$, quemadmodum habet formula posterior. Videmus adeo, quomodo innotuerit, eandem formulam subire posse vicem duarum, si valoris negativi quantitas sumatur ex parte opposita. Immo videmus, perinde esse, sive in formula generali abscissam & semiordinatam statuas ordinariis AP & PM majorem, sive minorem; ut adeo nulla ratio intrinseca fuerit electionis, sed tantummodo extrinseca: quod ideo monemus, ne quis in Philosophia hinc petat argumentum contra principium rationis sufficientis in electionis casu. Utimur eodem artificio, non sine maxima utilitate, in Analysi infinitorum seu calculo differentiali & integrali, quemadmodum suo loco videbimus; ubi ex eadem ratione valorem negativum sumimus pro magnitudine ex parte opposita sita. Absit itaque ut tibi persuadeas, hoc fieri ex natura quantitatum privativarum; & hinc colligas, quantitates privativas esse veras quantitates, seu in numero positivarum; cum satis constet eas non denotare nisi defectum quantitatis veræ, seu positivæ, per positivam, quæ deficit, æstimabilem; quemadmodum pecunia, quæ debetur, non est parata pecunia, quam habes, etsi per paratam pecuniam æstimetur, quæ solvenda, ut debitum tollatur. Nullæ revera sunt quantitates negativæ, etsi utiliter in usum calculi universalis fingantur. Cavendum omnino est, ne entia ficta Mathematicorum confundantur cum realibus in detrimentum scientiæ philosophicæ.

§. 213. Hinc simul patet ratio,

 cur

cur in casu particulari demonstraturi constructionem ex formula generali elicitam; eruendo ex hac æquationem ad construendum propositam; non utamur valoribus negativis, qui per comparationem cum formula generali prodeunt, sed iis substituamus positivos: id quod fieri non licebat, si per naturam quantitatum valor esset negativus. Valor negativus v. gr. rectæ AL nonnisi fictitius est; quatenus æquatio, unde elicitur, repræsentare fingitur casum, quem non repræsentat; cum revera non exhibeat nisi eum, in quo origo abscissarum est in N; propterea quod, hac fictione, eadem formula sufficere deprehenditur in utroque casu, quam absque ea nonnisi in uno adhibere liceret, nimirum quando origo abscissarum est in N. Extra hanc fictionem utique contradictorium est, quantitatem positivam esse æqualem privativæ; quemadmodum etiam in ipsa Analysi contradictionem inde colligimus, atque ex ea porro, notioni impossibilis convenienter, (§. 97 *Ontol.*) impossibilitatem inferimus. Habemus exemplum in æquatione ad circulum $y^2 + x^2 - ax + 2bx - ab + b^2 = 0$.

Tab. II. Fig. 25.

Quodsi enim ponas

$$x = a$$

erit $y^2 + a^2 - a^2 + 2ab - ab + b^2 = 0$

$$y^2 = -ab - b^2$$

$$y = \sqrt{(-ab - b^2)}$$

Ex eo itaque, quod valor ipsius y^2 prodit negativus, qui producit pro y radicem imaginariam; infertur, impossibile esse, ut abscissa fiat diametro æqualis; recte omnino, cum idem per se pateat, ubi supponis notum esse, quod æquatio sit ad circulum, & origo abscissarum in L, cum abscissa major esse nequeat recta $LB = a - b$. Nimirum hic colligitur, hypothesin $x = a$ esse absurdam; quia hinc sequitur, quantitatem positivam esse æqualem privativæ, aut radici imaginariæ; quod absurdum esse supponitur.

§. 214. Ut usus formularum generalium in construendis æquationibus problematum indeterminatorum clarius elucesceret, aliquot exemplis eundem illustrare lubuit (§. 593 & seqq. *Anal.*). Patet per ea, ope istarum formularum, nos via vere analytica deduci ad problematum indeterminatorum constructionem, ac constructiones semper obtineri concinnas, quales in Geometria desiderantur; ut adeo non solius brevitatis gratia easdem prætulerimus methodo communi, qua usi sunt DE LA HIRE & OZANAMUS. Dedimus quoque exempla, (§. 597, 600 *Anal.*), quibus ostenderemus, quomodo, ex constructione locorum, deriventur æquationes locales; ut appareat ad quamnam curvam sit locus constructus. Quoniam vero id intendimus, ut, dum artificia Analyseos inculcamus, simul doceamus veritates mathematicas cognitu utiles; ideo selegimus constructiones curva-

curvarum, quas pro fornicibus commendant Architecti, ut constaret, eas esse ellipses *Apollonianas*. Æquationem primam (§. 597 *Anal.*) $y^2 + \frac{d^2 x^2}{a^2} - \frac{d^2 x}{a} = 0$ esse ad ellipsin, constare poterat ex collatione cum formula generali pro ellipsi (§. 588 *Analyf.*). Quodsi consueto more hanc æquationem cum formula ista compares, deprehendes a esse axem majorem, d vero minorem ellipseos. Etenim vi formulæ generalis

$$\frac{2r}{q} = 0 \qquad \frac{t}{2m} = \frac{d^2}{a^2} \qquad 2n = 0$$

$$q = f$$

$$-\frac{2tp}{2m} = -\frac{d^2}{a} \qquad m^2 = p^2 = \tfrac{1}{4}a^2$$

$$\frac{2d^2 p}{a^2} = \frac{d^2}{a} \qquad m = \tfrac{1}{2}a$$

$$\frac{2p}{a} = 1$$

$$p = \tfrac{1}{2}a$$

Habemus adeo

$$a^2 : d^2 = a : t$$

$$t = \frac{ad^2}{a^2} = \frac{d^2}{a}$$

Quoniam parameter t est tertia proportionalis ad axem majorem & minorem (§. 423 *Analyf.*); cum a sit axis major, erit d minor, & ob $p = \frac{1}{2}a$ abscissæ computantur a vertice.

Similiter æquationem alteram $y^2 + \frac{ddx^2}{a^2} - \frac{2ddx}{a} = 0$ esse ad ellipsin, ejus cum formula generali collatio prodit; & illius cum hac comparatione facta patet, quod a sit axis dimidius major, d vero dimidius minor. Etenim vi formulæ generalis

$$\frac{t}{2m} = \frac{d^2}{a^2} \qquad \frac{2tp}{2m} = \frac{2dd}{a}$$

$$\text{h. e. } \frac{d^2 p}{a^2} = \frac{d^2}{a}$$

$$p = a$$

$$m^2 = p^2 = a^2$$

$$m = a$$

$$a^2 : d^2 = 2a : t$$

$$t = \frac{2ad^2}{a^2} = \frac{2d^2}{a}$$

Quoniam a est dimidius axis major, & parameter t tertia proportionalis ad axem majorem & minorem (§. 423 *Anal.*), seu quarta ad dimidium axem majorem, minorem dimidium, & minorem integram (§. 124 *Analyf.*); ideo patet, d esse axem minorem dimidium, & ob

 $p=a$

$p = a$ originem abſciſſarum eſſe in vertice ellipſeos.

§. 215. Utraque æquatio localis, etſi ex diverſis conſtructionibus eruatur, eadem eſt; niſi quod in poſteriori a & d denotent ſemiaxes, in priori autem integros axes conjugatos. Forſan non inconſultum erit hic docere, quomodo conſtructio utraque eruatur ex æquatione ordinaria ad ellipſin. Æquatio hæc eſt $y = bx - \frac{bx^2}{a}$, in qua b parametrum, a vero axem majorem denotat. Quoniam parameter eſt tertia proportionalis ad axem majorem a & minorem d (§. 423 *Anal.*); erit $b = d^2 : a$. Quodſi ergo in æquatione ordinaria hunc valorem in locum ipſius b ſurroges; habebis

$$y^2 = \frac{d^2 x}{a} - \frac{d^2 x^2}{a^2}$$

$$= \frac{d^2 ax - d^2 x^2}{a^2}$$

Quare

$$a^2 : d^2 = ax - x^2 : y^2$$

$$a : d = \sqrt{(ax - x^2)} : y$$

Patet adeo ſemiordinatam in ellipſi eſſe quartam proportionalem ad axem majorem, minorem & ſemiordinatam circuli ſuper axe majore deſcripti eidem cum ſemiordinata ellipſeos abſciſſæ reſpondentem. Quamobrem cum pro a & d ſumi etiam poſſit $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}d$ (§. 124 *Anal.*); igitur patet, ſi ſuper axe majore deſcribatur ſemicirculus & in P erigatur perpendicularis PN, ductaque ex centro C radio CN

Tab. II. *Fig.* 26.

in eum transferatur CR ſemiaxi minori æqualis, ac tandem ex R demittatur perpendicularis RM; fore punctum M in ellipſi: quæ eſt ipſa conſtructio SERLII ex æquatione ordinaria elicita. Cum enim ſit MR parallela ipſi PC; erit (§. 268 *Geom.*)

$$NC : RC = NP : PM$$

$$\tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{2}d = \sqrt{(ax - x^2)} : y$$

Poteramus itaque conſtructionem *Serlianam* ellipſeos jam ex æquatione ordinaria elicere in ſuperioribus, cum doctrinam de ellipſi traderemus. Etſi autem æquatio ex altera conſtructione elicita eadem ſit cum anteriore; ex ea tamen non minus deduci poterat conſtructio altera. Etenim ſit ellipſis ADB, cujus axis major AB, ſemiaxis minor EF. Deſcribatur, radio CD, ſemicirculus EDF, & erecta perpendiculari PM ducatur axi AB parallela MN, ex N vero demittatur perpendicularis NQ, quæ erit ipſi PM æqualis. Si ſit $AC = a$, $DC = d$, $AP = x$, erit æquatio ad ellipſin $y^2 = \frac{2addx - d^2 x^2}{a^2}$, adeoq;

Tab. III. *Fig.* 27.

$$a^2 : 2ax - x^2 = d^2 : y^2$$

Sit jam $EQ = z$, erit $QF = 2d - z$, adeoque $QN^2 = PM^2 = y^2 = 2dz - z^2$. Habemus itaque

$$a^2 : 2ax - x^2 = d^2 : 2dz - z^2$$

adeoque (§. 124 *Anal.*)

$$a^2 - 2ax + x^2 : a^2 = d^2 - 2dz + z^2 : d^2$$

$$a - x : a = d - z : d$$

$$x : a = z : d$$

$$x : z = a : d$$

hoc

hoc eſt, AP : EQ = AC : EC

Quare ſi ad ſemiaxem majorem, & minorem ellipſeos, atque abſciſſam AP pro arbitrio aſſumtam, quæratur quarta proportionalis; erit ea abſciſſa EQ, cui reſpondet ſemiordinata QN in circulo ſemiordinatæ ellipſeos PM æqualis.

Quodſi diſplicet reſolutio per analyſin rationum; analogiam, qua nititur conſtructio, per Algebram quoque reperire licet. Etenim

$$\frac{2ad^2x - d^2x^2}{a^2} = 2dz - z^2$$

$$\frac{d^2x^2 - 2ad^2x}{a^2} = z^2 - 2dz$$

$$\frac{d^2x^2 - 2ad^2x + a^2d^2}{a^2} = z^2 - 2dz + d^2$$

$$\frac{ad - dx}{a} = d - z$$

$$\frac{dx}{a} = z$$

Habemus itaque, ut ante:

$$a : d = x : z$$

Notanda hic ſunt artificia, quibus conſtructiones ex æquatione ordinaria eliciuntur. Nimirum in æquatione ordinaria ſubſtituimus valorem parametri, quam ex eadem elicuimus, ut eandem ingrediantur nonniſi lineæ in ipſa contentæ. Ita enim prodibat æquatio, cujus in analogiam reſolutione conſtructio prior erat manifeſta. Ex eadem æquatione in analogiam reſoluta prodit quoque altera; ſubſtituendo valorem quadrati ſemiordinatæ ellipſeos ex circulo circa axem minorem deſcripto. Equidem prævidere non licet, quid per ſubſtitutionem ſit proditurum; non tamen ideo ea negligenda eſt. Ubi enim veritatem quærimus; tentanda ſunt omnia, donec incidamus in theoremata & conſtructiones problematum. Principii ſubſtitutionis magna vis eſt in Analyſi: efficit enim æquationem dependentem a pluribus veritatibus, ut jam ex ea per reductionem eadem erui poſſint, quæ ex iiſdem more Veterum ratiocinando colliguntur.

§. 216. Enimvero ut intelligant Tab. III.
tyrones, idem artificium etiam in aliis Fig. 28.
curvis adhiberi poſſe, lubet hoc ipſum applicare ad hyperbolam. Pro hyperbola æquatio ordinaria eſt $y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$. Eſt etiam hic, ſi axis conjugatus $= d$, parameter $b = \frac{d^2}{a}$. Quodſi ergo hunc valorem in æquatione ordinaria ſubſtituas, habebis

$$y^2 = \frac{d^2x}{a} + \frac{d^2x^2}{a^2}$$

$$= \frac{d^2ax + d^2x^2}{a^2}$$

Quare $a^2 : d^2 = ax + x^2 : y^2$

$$a : d = \sqrt{(ax + x^2)} : y$$

$$\tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{2}d = \sqrt{(ax + x^2)} : y$$

Quodſi

Quodsi ergo ex centro hyperbolæ C erigas CD $=\frac{1}{2}d$, & super BP, abscissa AP pro lubitu assumta, describas semicirculum secantem perpendicularem in A erectam in N, & PN $=\sqrt{(ax+x^2)}$ transferas ex B in L, tandemque in L erigas perpendicularem LI, occurrentem rectæ per B & D ductæ in I; erit LI semiordinata y abscissæ AP respondens. Quamobrem, si fiat recta PM ad BP perpendicularis $=$ LI; erit punctum M in hyperbola. Cum in praxi non opus sit semicirculum describi, sed ex medio BP, tantummodo intersecanda recta AN in N, & intervallum PN ex B in L transferendum; quodvis in hyperbola punctum M hoc modo facillime determinatur, ut constructio pro non ineleganti haberi possit. Notent igitur hic tyrones, quod ad artificia, quibus in solutionibus problematum utuntur Autores, animum attendere debeant, eadem statim adhibituri ad alia, quantum ipsis datur. Nec inconsultum erit, ut Autores, qui de sectionibus conicis commentati sunt, evolvant, & ubi theoremata & problemata elegantia occurrunt, ea analytice investiganda sibi proponant. Ad hoc studium ut eos incitaremus, iisdemque viam, qua eundum, commonstraremus, ea in medium proferre libuit, quæ de ellipsi & hyperbola dicta sunt. Unicum adhuc addendum. In hyperbola æquilatera $a=d$, adeoque $y=\sqrt{(ax+x^2)}$, consequenter PM$=$PN. Quamobrem punctum M in eadem nullo fere negotio determinatur, scilicet si ex medio BP, intervallo $\frac{1}{2}$ BP, intersecetur AN in N, & intervallo PN intersecetur PM in M; ut adeo non opus sit, nisi in A erigi perpendicularem infinitam.

§. 217. Nos non progredimur ultra loca solida, in quibus acquieverunt Veteres: neque enim hæc doctrina ultra hosce limites multum promota. NEWTONUS enumeravit lineas tertii ordinis, seu curvas secundi generis, quarum æquationes ad tres dimensiones ascendunt. Eam esse completam demonstravit STIRLINGIUS, simulque ostendit, quomodo, æquatione curvæ tertii ordinis data, inveniatur locus, hoc est, species curvarum dignoscatur, ad quam eadem est. Enimvero hæc non sunt ad captum tyronum, in quorum usum conscripsimus Elementa nostra; neque adhuc ea ratione pertractata, ut eadem facilitate intelligantur, qua a nobis proposita capiuntur. Neque etiam opus est, ut hac doctrina sis instructus, ubi ea, quæ in sequentibus tradimus, intelligere volueris; immo eadem ignorata non impeditur progressus in Analysi recentiorum, qua Geometria ad naturam applicatur. Hoc non eo fine monemus, ut præclaris inventis laudem suam detrahamus; sed ne tyrones remorentur progressum ad ulteriora; affectantes scientiam eorum, quorum ignorantia eidem

dem minime obstat. Monitum igitur nostrum exigit præsens institutum. Ultra enumerationem linearum tertii ordinis, seu curvarum secundi generis, nemo adhuc progressus. Atque adeo doctrina de speciebus curvarum algebraicarum tanto adhuc intervallo distat a perfectione sua, quanto ab eadem distare Algebram monuimus. Abunde tyronibus ad altiora adspirantibus sufficiunt ea, quæ de locis geometricis tradidimus. Et ubi ad artificia, quibus in doctrina hac explananda utimur, animum attulerint attentum, ut eadem animo distincte comprehendant; iisdem plurimum juvabuntur in altioribus, quæ deinceps sequuntur. Hoc auxilio methodus comparationis æquationum particularium, in quibus coëfficientes indeterminatarum sunt determinati, cum assumtitiis, in quibus coëfficientes isti indeterminati sunt, familiaris redditur. Ejus autem in Analysi multus est usus.

§. 218. Doctrinam de locis geometricis non solum proposuimus in usum constructionis problematum indeterminatorum, cujus ideo dedimus aliquot exempla; sed & in usum constructionis æquationum altiorum, præsertim cubicarum & biquadraticarum. Quamobrem capite septimo docemus primum in genere, quomodo æquationes superiores construantur, & mox in specie, quomodo construantur æquationes cubicæ & biquadraticæ. Methodus autem, qua hic utimur, tota huc redit, ut construantur duo loca, quorum intersectione determinatur radix æquationis, seu linea recta, quæ eidem respondet. Invenit eandem SLUSIUS. Etsi enim non desint, qui eam jam CARTESIO perspectam fuisse contendunt; certo tamen, quod affirmant, probare minime possunt; cum alia quoque via in regulam suam incidere potuerit, quam in Geometria pro construendis æquationibus cubicis & biquadraticis, per parabolam & circulum, præscribit. Quemadmodum vero inventa Veterum profuerunt Recentioribus ad invenienda sua, quibus ad ulteriora progressuris usui sunt inventa anteriora; ita dubium non est, quin Veterum quoque inventa facem protulerint SLUSIO ad methodum suam construendi æquationes cubicas & biquadraticas inveniendam. Etenim cum Veteres multum desudarent in duabus lineis EF, GH, mediis continue proportionalibus inter duas datas AB, CD, inveniendis; MENECHMUS via vere analytica pervenit ad solutionem problematis tantopere celebrati, ope intersectionis duarum parabolarum. Atque in hac ipsa constructione continetur idea ejus methodi, quam SLUSIUS primus reperit: id quod ut appareat, analysis MENECHMI paulo disertius explicanda. Quoniam GH tertia proportionalis ad AB & EF, itidemque CD tertia proportionalis ad EF & GH; habemus Tab. III. Fig. 19.

$$AB:EF = EF:GH \qquad EF:GH = GH:CD$$

$$EF^2 = AB.\ GH \qquad GH^2 = CD.\ EF$$

Patet itaque, quadratum primæ mediarum continue proportionalium esse æquale rectangulo ex data prima AB in quæsitam alteram, seu mediarum continuæ proportionalium secundam; quadratum vero secundæ mediarum continue proportionalium esse æquale rectangulo ex datarum altera in primam quæsitarum seu continue proportionalium. Quoniam in parabola quadratum semiordinatæ est æquale rectangulo ex parametro in abscissam; igitur patet si, parametro data una AB, describatur parabola; secundam quæsitarum GH fore in numero abscissarum, & eidem respondentem semiordinatam fore primam quæsitarum EF: contra si, parametro data altera CD, describatur parabola; secundam quæsitarum GH fore in numero semiordinatarum ejusdem, & eidem respondentem abscissam fore primam quæsitarum. Quamobrem patet eandem rectam esse abscissam in parabola una & semiordinatam in altera, & quæ in una semiordinata est, eandem esse abscissam in altera. Obtinet hoc si duæ parabolæ, AMR & AMO, circa axes AD & AE, ad angulos rectos junctos, describantur; in puncto enim intersectionis semiordinata PM parabolæ AMR æqualis est abscissæ AQ parabolæ alterius AMO, & vicissim semiordinata QM parabolæ AMO æqualis est abscissæ AP parabolæ AMR. Patet itaque si rectæ datæ sumantur pro parametris parabolarum AMR & AMO; rectas AP & PM fore duas medias continue proportionales inter duas istas rectas datas. Hic est modus inveniendi duas lineas medias continue proportionales inter duas datas. Quodsi $AB = a$, $CD = b$, $EF = x$, $GH = y$; erit

Tab. III. Fig. 30.

Tab. III. Fig. 29.

$$x^2 = ay \qquad y^2 = bx$$

$$\frac{y^4}{b^2} = ay \qquad \frac{y^2}{b} = x$$

$$y^4 = ab^2y$$

$$y^3 = ab^2$$

Unde liquet, æquationem cubicam $y^3 - ab^2 = 0$ construi per duo loca $x^2 - ay = 0$, & $y^2 - bx = 0$; quorum intersectione determinatur semiordinata PM, quæ radici æquationis $y^3 - ab^2 = 0$ respondet. Constructio adeo MENECHMI insinuat ideam methodi SLUSIANÆ.

§. 219. Inventum MENECHMI ansam quoque dare poterat inveniendæ regulæ *Cartesianæ*, qua æquationes cubicæ & biquadraticæ construuntur. Nimirum cum ex illo constet, æquationem cubicam construi per duas parabolas, quarum mutua intersectione determinatur radix; in Arte inveniendi autem tentaminibus multa relinquantur; facile animum subit cogitatio tentandi, num circulus

culus quoque per verticem parabolæ ductus in puncto intersectionis extra verticem determinet radicem æquationis cubicæ. Sit itaque centrum circuli, per verticem parabolæ A descripti, in C; si ex eo in axem parabolæ demittatur perpendicularis CD, evidens est per rectas AD & DC determinari & centrum C, & radium AC. Sit itaque PM $= y$, parameter $= a$, AD $= b$, DC $= c$. Demittatur ex C perpendicularis CR ad semiordinatam PM; erit RM $= y - c$, & ex natura Parabolæ AP $= \frac{y^2}{a}$ (§. 391 *Analyſ.*), adeoque DP $=$ CR $= \frac{y^2}{a} - b$. Quoniam AC^2 $=$ AD^2 $+$ DC^2 & CM^2 $=$ CR^2 $+$ RM^2 (§. 417 *Geom.*); erit AC$^2 = b^2 + c^2$ &

Tab.III. Fig. 31.

$$CM^2 = \frac{y^4}{a^2} - \frac{2by^2}{a} + b^2 + y^2 - 2cy + c^2,$$

consequenter ob CM^2 $-$ AC^2 $=$ o

$$\frac{y^4}{a^2} - \frac{2by^2}{a} - 2cy = 0$$
$$+ y^2$$

$$y^3 - 2aby - 2a^2c = 0$$
$$+ a^2y$$

Patet itaque, intersectione circuli per verticem parabolæ transeuntis & parabolæ, construi posse æquationem cubicam, in qua secundus terminus deficit.

Ut jam determinetur valor ipsius b, seu rectæ AD, & valor ipsius c, seu rectæ DC; sit æquatio alteri æquivalens

$$y^3 - py - q = 0$$

erit $-2ab + a^2 = -p$

$$b - \tfrac{1}{2}a = \frac{p}{2a}$$

$$AD = b = \frac{p}{2a} + \tfrac{1}{2}a$$

Similiter $-2a^2c = -q$

$$DC = c = \frac{q}{2a^2}$$

Quodsi cum CARTESIO sumas parametrum pro unitate, & fiat in axe AH $=$ semiparametro, erit

HD $= \tfrac{1}{2}p$
DC $= \tfrac{1}{2}q$

hoc est, recta HD est æqualis coëfficienti dimidio termini tertii, & DC coëfficienti dimidio quarti, secundo deficiente; quemadmodum habet regula CARTESII.

Non aliis hic utimur artificiis, quam quibus usi sumus in determinanda tangente sectionum conicarum juxta methodum CARTESII (§. 410, 440, 491 *Analyſ.*). CARTESIO itaque constructio MENECHMI, qua utitur in inveniendis duabus mediis continue proportionalibus inter duas rectas, ansam dare potuit inveniendi regulam construendi æquationes cubicas, in quibus secundus terminus deficit; & artificia ipsi familiaria, quibus hic utitur, animum avertere potuerunt ab idea constructio-

ſtructionis per combinationem duorum locorum in conſtructione MENECHMI contenta, ad quam eundem advertit SLUSIUS; ut adeo certo aſſeverari non poſſit, methodum *Sluſianam* cognitam jam fuiſſe CARTESIO, & eadem hunc perveniſſe ad regulam ſuam. Quicquid ſit, utile tamen eſt tyronibus perpendiſſe, quomodo inventum MENECHMI analytice expenſum, & ideam conſtructionis æquationum ſuperiorum per combinationem duorum locorum, & anſam inveniendi regulam conſtruendi æquationes cubicas, in quibus ſecundus terminus deficit, ad biquadraticarum conſtructionem deinceps extenſam, præbere potuerit; ſiquidem ad tertium cognitionis gradum adſpirant. Quoniam ex qualibet æquatione ſecundus terminus auferri poteſt (§. 343 *Analyſ.*) & hoc pacto æquationes cubicæ omnes reducuntur ad tres caſus (§. 345 *Analyſ.*); regula CARTESII, quæ ſecundum terminum deficere ſupponit, omnibus omnino æquationibus cubicis conſtruendis ſufficit; etſi haud difficile ſit eandem quoque extendere ad eas æquationes, quæ ſecundum terminum habent, quemadmodum operoſe oſtendit BAKERUS; nos brevius docuimus (§. 622 *Anal.*). Cur vero methodum *Sluſianam* præferamus regulæ *Carteſianæ* a BAKERO extenſæ, rationem reddimus in ſcholio probl. 245. (§. 608 *Analyſ.*).

§. 220. Notandum vero eſt, quod conſtructiones æquationum cubicarum & biquadraticarum vere analyticas tradiderimus; ut adeo in iis induſtriam ſuam utiliter exerceant, qui ad tertium cognitionis gradum adſpirant. Tanta autem perſpicuitate doctrinam hanc expoſuimus, ut, qui in anterioribus induſtriam ſuam deſiderari non fuerunt paſſi, nihil prorſus difficultatis ſentiant. Inprimis autem hinc diſcere licet, quomodo tollatur omnis difficultas, quæ ex nimis longa rerum meditandarum ſerie naſcitur. Quamobrem huc animum advertant, quotquot meditationibus longis adſueſcere voluerint. Quod qui faciunt, hunc utique percipient fructum, ne longitudine meditationum defatigentur. Id tantummodo adhuc monemus tyrones, ut, ubi locus conſtruendus, formula generalis, cum qua particularis data conferenda, ex ſuperioribus exſcribatur, & eidem æquatio localis conſtruenda ſubſcribatur, ut termini comparandi ſibi invicem reſpondeant. Ex. gr. in problemate 245 (§. 607 *Anal.*) locus ad circulum eſt $y^2 + x^2 - cy + bx - ax = 0$. Formulæ igitur generali ea ita ſubſcribitur, quemadmodum hic factum eſſe vides:

$$\begin{array}{llllll} y^2 - \frac{2rxy}{q} & + \frac{r^2x^2}{q^2} & - my & + \frac{2mrx}{q} & + m^2 & = 0 \\ & + \frac{s^2x^2}{q^2} & & - \frac{2psx}{q} & - m^2 & \\ & & & & + p^2 & \\ y^2 \quad * & + x^2 & - cy & + bx & * & = 0 \\ & & & - ax & & \end{array}$$

Loca vacua replentur ſtellula, ut appa-

appareat, quinam termini sint nihilo æquales in casu particulari dato. Hoc nimirum pacto statim videmus, quinam coëfficientes sint invicem comparandi, & quinam poni debeant nihilo æquales; ne ex confusione oriatur error. Quamvis vero, prolixitatis evitandæ gratia, non omnia combinavimus loca, quorum æquationes ex æquatione cubica vel biquadratica elicuimus; qui tamen ingenium & industriam suam exercere voluerint, hoc non inutiliter facient. Ubi vero, comparatione æquationum particularium, cum formula generali facta, valores omnes linearum ad constructionem loci requisitarum fuerunt determinati; oculi convertendi sunt in schema formulæ generali respondens & delendæ lineæ, quarum valores reperti sunt nihilo æquales: ita enim relinquitur schema æquationi particulari respondens. Quamobrem si lineis remanentibus adscribas valores modo repertos; statim videbis, quomodo locus sit construendus. Et ubi schemata duobus locis respondentia inter se confers; illico patebit, quomodo unum alteri sit imponendum, ut lineæ, quæ utrobique eædem sunt, sibi mutuo congruant; consequenter quomodo æquatio data sit construenda. Hac via si incedere volueris, non modo aberit molestia, quæ ex nimis diu continuanda meditatione suboritur; verum etiam constructione ad finem perducta voluptate perfundetur animus, quæ studium Matheseos continuo magis magisque tibi commendabit, & ardorem in eodem progrediendi accendet. Inprimis etiam sensum evidentiæ acquires; statim posthac animadversurus, ubi distincte perceptis quædam permiscentur, quæ adhuc confuse percipiuntur: id quod inprimis usui est extra Mathesin, ubi confuse perceptorum cum distincte perceptis commixtio magis nocet, quam in Mathesi; præsertim iis in casibus, in quibus intellectus ab imaginatione avocandus totus, ut veritatem liquidam perspicias. Hoc etiam obtinebis, ne nimia festinatione te præcipites; & ut inter multos strepitus attentionem conserves; eamque interrumpere possis, quotiescunque volueris, certo semper tramite progressurus, quando visum fuerit; quemadmodum viator recta via incedens ab eadem minime aberrat, nec iter jam emensum repetere tenetur, ubi gradum sistit, quotiescunque libuerit. Neque verendum est, ut diuturna meditatione defatigetur animus & sanitati corporis insidiæ struantur. Non opus est, ut in hisce afferendis multum studii collocemus, quamvis ad singula demonstranda a priori principia suppeditet Psychologia nostra. Qui enim dictis obediens fuerit, in seipso experietur, veritati consentanea esse, quæ dicimus non loquentes nisi experta.

§. 221. Quoniam idem problema multis modis construi potest, cum

v. gr. eidem æquationi cubicæ ſatisfaciat non modo cujuſvis loci ſolidi cum loco ad circulum, verum etiam cujuſvis loci ſolidi cum quovis loco ſolido combinatio; quæri omnino poterat, quænam curvæ ſint ceteris præferendæ. CARTESIUS æquationes cubicas & biquadraticas non conſtruit niſi per parabolam & circulum; etſi non ignoraverit, eaſdem quoque conſtrui poſſe per ceteras ſectiones conicas, atque circulum. Videtur utique hoc feciſſe, quod æquatio parabolæ & circuli ſit ſimplicior æquationibus ceterarum ſectionum conicarum. Cum enim vitium ἀγεωμετρησίας ipſi ſit, ſi æquatio conſtruatur per lineas ſuperioris cujuſdam generis, quæ conſtrui poteſt per lineas generis inferioris, veluti ſi æquatio cubica vel biquadratica conſtruatur per curvas ſecundi generis, cum conſtrui poſſint per curvas primi generis; ex ejuſdem omnino generis curvis eas præferre debuit, quæ per æquationes ſimpliciores definiuntur. Recte autem monuit NEWTONUS, in conſtructione problematum geometricorum non reſpiciendum eſſe ad æquationes curvarum, ſed potius ad earum deſcriptionem; ita ut hæ præferantur aliis, quæ ſunt facilioris deſcriptionis. Unde ad conſtruenda problemata ſolida adhibet conchoidem, etſi ea ſit tertii generis. Immo non improbat, ſi quis ad datum angulum in data ratione ſecandum utatur cycloide, quæ motu rotæ, vel circuli, ſuper recta facillime deſcribitur; etſi ea per nullam æquationem algebraicam definiri poſſit. Etſi autem æquationes cubicæ ac biquadraticæ omnes per circulum & parabolam conſtrui poſſint; non tamen ideo conſultum eſt, ut non aliis etiam ſectionibus conicis in iſtis æquationibus conſtruendis utamur. Etenim ubi problemata algebraice ſolvimus, haud raro incidimus in æquationes locales alterius ſectionis conicæ, quam parabolæ; ut adeo ſua veluti ſponte ſeſe offerat ad conſtructionem, cum parabola demum anxie quærenda eſſet; &, per aliam ſectionem conicam quam parabolam, haud raro multo concinnius conſtrui poteſt. Quædam adeo lineæ quibuſdam problematis videntur quaſi propriæ, ita ut deſtinentur eorundem conſtructioni; quia pariunt elegantem, & ſimpliciorem, ſi linearum rationem habeas, ex quibus datis quæſita determinanda; cum conſtructiones ceteræ evadant intricatiores, & ſchemata pariant confuſa, ſi omnes conſtructiones ſubſidiariæ eidem ſimul inferendæ, nec curva ſupponatur tanquam data, nec lineæ ex coëfficientibus terminorum reperiundæ tanquam jam repertæ.

§. 222. Apud Veteres celebrabantur problemata, de inveniendis lineis duabus mediis continue proportionalibus inter duas datas, & de triſectione anguli. Cum enim per Geometriam elementarem facillime invenia-

veniatur media proportionalis inter duas datas, & angulus non minus facile bisecetur, per solas rectas & circulum, seu per Geometriam elementarem; Veteres primum horum problematum solutiones intersectione rectarum & circuli quoque tentarunt, sed frustra. Unde ad constructiones per alias lineas curvas confugiendum tandem erat. Quamobrem nostrum quoque erat, ut, constructiones æquationum cubicarum & biquadraticarum illustraturi, horum inprimis problematum rationem haberemus. Distinxerunt vero ideo Veteres problemata in plana, solida, & linearia. Plana appellarunt, quæ per rectas & circulum construi possunt, quia hæ lineæ supponuntur in plano descriptæ; solida, ad quorum constructiones adhibendæ sunt sectiones conicæ, quæ, cum per coni dati sectionem prodeant, tanquam in solido datæ supponuntur. Cumque præter rectam, circulum, & sectiones conicas, lineas alias in Geometriam recipere nollent; problemata plana & solida sola geometrica appellarunt, quemadmodum etiam lineas istas solas geometricas dixerunt. Per alias vero lineas construenda problemata, mechanica vocarunt; ipsasque, quarum ope construuntur, lineas mechanicas nuncuparunt. Ast CARTESIUS, connubium Arithmeticæ cum Geometria introducens, cum videret sectiones conicas per æquationes definiri posse algebraicas, & præter eas dari curvas innumeras alias, quæ per istiusmodi æquationes definiuntur; hasce omnes illis æquiparavit & in Geometriam recipiendas esse intulit; in numerum mechanicarum rejectis, quæ æquationes istiusmodi respuunt. Invento autem calculo differentiali; cum curvæ, CARTESIO mechanicæ dictæ, non minus per æquationes differentiales definiantur, quam ceteræ per ordinarias, & ad constructiones problematum utilissimorum adhibeantur, quemadmodum in Mechanicis videbimus; his quoque aditus, in Geometriam factus. Unde multo amplior evasit speculationum geometricarum campus, qui a Veteribus intra nimis arctos limites coërcebatur. Sane inventa longe præclarissima ex Mathesi exularent, si recentiores Geometræ vestigiis, vel Veterum, vel CARTESII, insistere voluissent.

§. 223. Non omnia problemata per rectam & circulum construi posse, inventio duarum linearum mediarum continue proportionalium inter duas datas, & trisectio anguli docuit; & ex æquationibus algebraicis, ad quas ducunt solutiones problematum, patet ratio. Quemadmodum enim æquationum quadraticarum constructio pendet ab invenienda una linea media proportionali inter duas alias quomodocunque datas; ita constructio cubicarum supponit duas medias continue proportiona-

tionales, constructio biquadraticarum tres inveniendas & ita porro. In æquationibus puris hoc ipsum obvium est; in affectis non minus ostendi potest. Sufficiat nobis in gratiam tyronum id ostendisse in æquationibus puris. Æquatio quadratica pura est $x^2 = ab$. Patet hic esse

$$a : x = x : b$$

adeoque constructurus æquationem invenire debet mediam proportionalem inter a & b.

Æquatio cubica pura est

$$x^3 = a^2 b$$

adeoque $x^4 = a^2 bx$

$$a^2 : x^2 = x^2 : bx$$

Sit $bx = y^2$

erit $x : y = y : b$

& $a^2 : x^2 = x^2 : y^2$

$$a : x = x : y = y : b$$

Igitur $a. x. y. b$ sunt continue proportionales. Æquationem ergo cubicam puram constructurus, invenire debet duas medias continue proportionales inter datas a & b, quarum prima x est radix æquationis cubicæ puræ

Similiter æquatio biquadratica pura est

$$x^4 = a^3 b$$

Quare $a^3 : x^3 = x : b$

$$= x^3 : bx^2$$

Sit $bx^2 = y^3$

erit $a^3 : x^3 = x^3 : y^3$

$$a : x = x : y$$

& $x^2 : y^2 = y : b$

$$= y^2 : by$$

Sit $by = z^2$

erit $x^2 : y^2 = y^2 : z^2$

$$x : y = y : z$$

& $y : z = z : b$

Habemus adeo

$$a : x = x : y = y : z = z : b$$

consequenter $a. x. y. z. b$ sunt continue proportionales; & æquationem biquadraticam puram constructurus, invenire debet tres medias continue proportionales inter duas datas a & b, quarum prima x est radix æquationis. Intersectio rectæ & circuli nonnisi unam exhibet lineam mediam continue proportionalem inter duas. Quamobrem si plures inveniendæ supponuntur, sola rectæ ac circuli intersectione obtineri minime possunt. Hinc duarum inventio deduxit MENECHMUM ad intersectionem duarum parabolarum, quemadmodum vidimus supra (§. 218).

§. 224. Forsan autem non inutile erit, si hic exemplo aliquo ostendamus, quomodo inventio duarum linearum mediarum continue proportionalium ad æquationes cubicas affectas deducat; ne quæ de extremis quomodocunque datis diximus obscura videantur, nec satis a tyronibus intelligantur. Sit igitur problema tale: *Data quatuor quantitatum continue proportionalium prima & differentia quarta a secunda; invenire singulas.* Resolutio hæc erit.

Sit Quant. I $= a$ Quant. II $= x$

Differ. II & IV $= b$ III $= y$

erit IV $= x - b$

& per

& per conditionem problematis

$$a:x = x:y \qquad a:x = y:x-b$$

$$x^2 = ay \qquad xy = ax - ab$$

$$\frac{x^2}{a} = y \qquad y = \frac{ax-ab}{x}$$

adeoque

$$\frac{x^2}{a} = \frac{ax-ab}{x}$$

$$x^3 = ax^2 - a^2b$$

$$x^3 - ax^2 + a^2b = 0$$

Videmus itaque constructionem æquationis cubicæ affectæ dependere ab inventione duarum mediarum proportionalium inter duas extremas, quarum prima simpliciter datur, altera autem per differentiam a prima mediarum. Ad constructionem vero sese offerunt æquatio ad parabolam $x^2 - ay = 0$, & æquatio ad hyperbolam intra asymptotos $xy - ax + ab = 0$. Cum vero etiam sit $x : y = y : x - b$ adeoque $y^2 = x^2 - bx$, consequenter $y^2 - x^2 + bx = 0$; loco hyperbolæ intra asymptotos offert etiam sese hyperbola æquilatera.

Eodem modo ex sequente problemate liquet, quomodo inventio unius mediæ proportionalis ducat ad æquationem quadraticam affectam. Scilicet, *data quantitatum continue proportionalium prima & differentia tertia a secunda, invenienda sit secunda.* Sit itaque

Quantitas I $= a$ Quant. II $= x$
Differ. II & III $= b$ erit III $= x - b$
adeoque per conditionem problematis

$$a : x = x : x - b$$

$$x^2 = a\,x - ab$$

$$x^2 - a\,x + ab = 0$$

Non sine ratione addimus exemplum æquationis quadraticæ affectæ, propterea quod harum æquationem constructionum reduximus ad inventionem linearum reciprocarum (§. 265 *Anal.*); ne existiment tyrones veritati consentaneum non esse, quod eadem pendeat ab inventione mediæ proportionalis inter duas extremas quomodocunque datas. Poterant casus omnes æquationum cubicarum per inventionem duarum, casus vero omnes æquationum biquadraticarum per inventionem trium mediarum continue proportionalium illustrari; siquidem prolixioribus esse licuisset.

§. 225. Doctrina de numeris irrationalibus illustratur problemate 259 (§. 630 *Anal.*), in quo ostendimus, quomodo numerus irrationalis quicunque per lineam exprimatur; ut intelligatur, cur Veteres quantitates irrationales non in numeris, sed in continuo considerarent, unde oriuntur, adeoque eas ad Geometriam retulerint. Attentionem denique meretur usus constructionis æquationum ad curvas datarum, per combinationem locorum; cum hoc

 pacto,

pacto, ope curvarum inferioris generis, construi possint curvæ superioris; quemadmodum, ope parabolæ & circuli, construximus parabolam cubicam & circulum secundi generis. Etsi enim hæ constructiones sint molestiores, quam ut in usum recipiantur; sufficit tamen quod per easdem in curva, quæ descripta supponitur, quodvis punctum datum ad examen revocari possit, num rite fuerit determinatum; & saltem ex possibilitate constructionis pateat curvæ possibilitas.

§. 226. Satis ostendimus, quomodo in Elementis nostris Analyseos finitorum versari debeat, qui artem hanc intimius perspicere sibique familiarem reddere voluerit; quamvis longe plura annotare poteramus, si singula accuratius perpendenda proponere visum nobis fuisset, nec acquiescere voluissemus in speciminibus, quæ in aliis imitari poterit attentione sufficiente usus. Restat igitur ut doceamus, quomodo in Analysi infinitorum sit versandum. Initio tyrones non scrupulosiores esse debent in notione quantitatis infinite parvæ expendenda; modo notent eas non in se esse nihilum, sed tantummodo respectu aliarum pro nihilo haberi: quo facit scholion def. 2 (§. 5 *Analys. infin.*). Quodsi enim difficultates quædam supersint, quæ assensum remorantur; eædem in progressu evanescent: tollentur autem penitus, ubi ea perpenderis, quæ in Metaphysicis de ente infinito Mathematicorum imaginario demonstrantur (§. 796 *& seqq. Ontol.*) Dudum Mathematici ex differentiis quæsivere quadrata & cubos; quemadmodum docuimus in applicatione calculi literalis ad Arithmeticam (§. 81 *& seqq. Anal.*). Inventum hoc ansam dedit LEIBNITIO investigandi methodum ex differentiis colligendi terminos seriei cujuscunque continue crescentis, vel decrescentis; cum ignoraret, id jam in literas fuisse relatum a D. MOUTON, Canonico Lugdunensi, ex observatione FRANCISCI REGNALDI, Lugdunensis; quemadmodum constat ex epistola LEIBNITII ad OLDENBURGIUM scripta, quæ legitur in *Commercio epistolico* D. JOANNIS COLLINS *& aliorum de Analysi promota*, jussu Societatis Regiæ Britannicæ in lucem edito, p. 32 *& seqq.* Calculum adeo differentialem primum exercuit in numeris, ubi differentiæ sunt finitæ, seu assignabiles. Cum deinde opus præclarum *de Quadratura circuli & sectionibus conicis* GREGORII A S. VINCENTIO, ab HUGENIO sibi commendatum, legeret, in quo differentiæ magnitudinum infinite parvæ considerantur, quarum summæ exhibent ipsas magnitudines; hæc observans in calculum differentialem incidit, de quo hic nobis sermo est; methodo *Cavaleriana*, qua felicissime usus GREGORIUS A S. VINCENTIO, ad calculum perducta. In hoc calculo

ctulo omnia pendent a differentiatione rectanguli xy. Quamobrem ad eam omnem attentionem afferre debent tyrones; ne in ceteris supersit ulla difficultas. Etenim si supponas, quomodo differentiale rectanguli xy inveniatur; nullo negotio cetera erues per Algebram communem; quemadmodum ostendimus tum in ipso problemate primo *num.* II. & *seqq.* tum in problemate secundo atque tertio. Constat lineam generari motu continuo puncti ab uno termino ad alterum, qualis est motus liquidi fluentis; unde a NEWTONO appellatur *Fluxus*. Constat etiam superficies istiusmodi motu linearum; solida vero motu superficierum gigni. Quodsi ergo ad genesin magnitudinum animum advertas; per ea, quæ ab EUCLIDE & ARCHIMEDE demonstrata sunt (§. 5 *Anal. infin.*), animadvertes, magnitudines crescere vel decrescere, per incrementa, vel decrementa inassignabilia, quæ ipsæ sunt quantitates infinite parvæ, cum quibus hic nobis negotium est, a NEWTONO, ad genesin magnitudinum respiciente, *Fluxiones* appellatæ; quemadmodum ipsas magnitudines, quæ hoc modo crescunt vel decrescunt, *Fluentes* vocat. Unde quantitatem differentiare, stylo *Newtoniano*, est invenire fluentis datæ fluxionem. Ut hæc rectius intelligantur; perpendant velim tyrones, si recta quædam AB, juxta ductum alterius rectæ AC, motu sibi semper parallelo atque æquabili, moveatur deorsum, dum interea punctum quoddam, motu quomodocunque accelerato, in ipsa recta AB, a termino A versus alterum B, progreditur; punctum describet lineam curvam AM, recta vero spatium curvilineum APM. Quodsi ponamus rectam ex P pervenire in p adeoque abscissam AP augeri incremento Pp; evidens est, eodem quo hoc accidit momento, semiordinatam PM augeri incremento mR, arcum AM incremento Mm, & spatium curvilineum APM incremento PpmM. Arcus adeo AM differt ab arcu Am, arculo Mm; semiordinata PM a semiordinata pm, particula mR; spatium curvilineum, sive area APM, ab area Apm, particula PpmM; dum differentia abscissæ AP ab abscissa Ap est Pp. Unde, stylo *Leibnitiano*, si in tempusculo infinite parvo incrementum Pp est inassignabile; hoc ipsum incrementum Pp dicitur differentiale abscissæ Ap, mR differentiale semiordinatæ PM, Mm, differentiale arcus AM, & tandem PpMm differentiale areæ APM: stylo autem *Newtoniano*, Pp abscissæ, mR semiordinatæ, Mm arcus, PpMm areæ, fluxio est. Atque adeo patet, cur calculus differentialis seu methodus fluxionum in Geometria sublimiori tantæ sit utilitatis: id quod ex ejus applicatione clarius elucescet. Incrementa abscissæ Pp generantur motu æquabili; adeoque æquali tempore, sive tempusculo, æqualia sunt: ast cum in-

Tab. III. Fig. 32.

crementa semiordinatæ *m*R eodem tempusculo generentur motu inæquabili, & incrementa lineæ curvæ sive arcus M*m*, atque areæ P*pm*M, motu mixto ex æquabili & inæquabili, singula inæqualia esse debent. Unde liquet in hoc calculo magnitudinis unius incrementum sumi ut æquale, dum reliqua inæqualia sunt, quæ simul generantur. Non autem necesse est, ut abscissa ponatur crescere per incrementa æqualia; sed sumi etiam possunt momentanea incrementa magnitudinis alterius tanquam æqualia, quo casu abscissa crescit per inæqualia incrementa. Ponamus enim rectam AC æquabiliter moveri, motu sibi semper parallelo, juxta ductum rectæ AB; dum interea punctum motu continuo accelerato in illa descendit; patet incrementa Q *q*, sive R*m*, eodem tempusculo æqualia esse debere; dum interea incrementa S*m*, sive P*p*, inæqualia gignuntur. Hactenus dicta qui perpendit, is non modo animadvertet calculum differentialem niti methodo genetica, & rigorem acquirere ex demonstratis ab EUCLIDE & ARCHIMEDE (§. 5. *Anal. infin.*); verum etiam, in applicatione hujus calculi ad Geometriam sublimiorem, nihil deprehendet obscuritatis.

Tab.III. Fig. 33.

§. 227. Ope calculi differentialis, tangentes curvarum facillime determinantur; hancque methodum, non modo ad omnes curvas algebraicas extendi patet ex formula generali, quam dedimus (§. 32 *Anal. infin.*), verum etiam eandem ad alias curvas, quæ mechanicæ non sunt, applicari posse, exemplo spiralium, cycloidis, logarithmicæ & quadratricis DINOSTRATIS docuimus. Non opus hic est perplexis longisque calculis; nec methodum hanc irrationales quantitates remorantur; ut adeo nihil in eadem desiderari possit. Tota nititur ratione differentialium semiordinatæ ac abscissæ, quæ sunt inter se in ratione semiordinatæ ad subtangentem; quemadmodum in resolutione probl. 4 (§. 20 *Anal. infin.*) demonstravimus. Quoniam enim quantitatibus proportionalibus infinite parvis substitui possunt aliæ finitæ; valor subtangentis, qua tangens determinatur, ex quantitatibus assignabilibus componitur. Artificio hoc usus est BARROWIUS in sua Tangentium methodo: quod ut appareat, exemplo parabolæ *Apollonianæ* perfacili docere lubet. Sit $QN = y$, $AQ = x$, $PT = t$. Sit semiordinata alia PM, & ei respondens abscissa AP, differentia earundem semiordinatarum adeo exigua, quantum desideratur, & differentia abscissarum MR exiguæ parvitatis. Sit $PQ = MR = e$, $NR = a$; erit $PM = y - a$, $AP = x - e$. Si parameter parabolæ fuerit p; habebimus Tab.III. Fig. 34.

$$y^2 - 2ay + a^2 = px - ep$$

$$\& \qquad y^2 = px$$

adeoque $- 2ay + a^2 = - ep$

$$2ay = ep, \text{ ob } a^2 = 0$$

Est

Eſt vero $e : a = t : y$
& $e : a = 2y : p$

adeoque $t : y = 2y : p$

$t = 2y^2 : p$

Nemo non videt, ſi pro a ſubſtituas dy, & pro e ponas dx; prodire $2ydy = pdx$ & $t = \frac{ydy}{dx}$. Unde reſultat $t = \frac{2y^2}{p}$: Methodus itaque *Barrowiana* tangentium a præſenti, quam proponimus, non differt; & calculus, quo utitur BARROWIUS, non differt a calculo differentiali, niſi characteriſtica. Hæc ſane ratio eſt, cur JACOBUS BERNOULLI primum exiſtimaret calculum differentialem LEIBNITII non differre a *Barrowiano*; & Dn. DE TSCHIRNHAUSEN contenderet, calculum differentialem *Barrowiano* ortum ſuum debere; præſertim cum LEIBNITIUS, ubi eundem in Actis Eruditorum primum publicavit, non niſi ad methodum de maximis & minimis, quæ ſpecialis caſus eſt methodi tangentium, applicaret. Enimvero cum uſus calculi differentialis in problematis magis arduis ſolvendis conſpiceretur; aliter de eodem ſentire cœperunt Geometræ, ipſe etiam HUGENIUS, qui ſibi perſuadebat, aliis methodis detecta tantummodo aliter exprimi hoc calculo.

Tab. III. Fig. 31. §. 228. Methodus *Barrowiana* nititur artificiis CARTESII in determinanda tangente curvarum, & principiis Geometriæ indiviſibilium CAVALLERII, atque Algebræ ordinariæ. Etenim ſi curva AMNO ſecatur recta TO, erit NR. MR=PM: TP, quemadmodum demonſtravimus in reſolutione probl. 4. (§. 20). Quamobrem ſi ſit NR $= a$, MR$=e$, PM $= y$, TP $= t$; erit $a : e = y : t$, & ex. gr. ex natura parabolæ, cujus parameter p,

$$y^2 = px$$
$$y^2 - 2ay + a^2 = px - ep$$

$$-2ay + a^2 = 0 - ep$$

Quodſi ſemiordinatæ PM & QN continuo propius ad ſe invicem accedant, ut differentiæ ſemiordinatarum NR & abſciſſarum MR, ſive PQ, tandem degenerent in partes infinite parvas, ſeu momentanea incrementa; recta MN degenerat in arculum cognominem, TN degenerat in tangentem & TP in ſubtangentem. Tum vero ex principiis Geometriæ indiviſibilium $a^2 = 0$ reſpectu $2ay$, & ep; & $y - a$ atque y habentur pro æqualibus in contactu. Unde habemus:

$-2ay = -ep$
ſeu $2ay = ep$
& $a : e = (y : t)\, p : 2y$

quemadmodum ante (§. 227).

Ad methodum *Barrowianam* ſi applicatur vera characteriſtica infiniteſimarum, ſeu quantitatum infinite parvarum, ſine qua algorithmus infiniteſimalis non ſubſiſtit, qui eſt ipſe ſic dictus calculus differentialis;

 prodit

prodit methodus tangentium, quam hic applicamus. Ope autem hujus calculi, non modo expedita redditur, verum etiam extenditur, ut ultimum suum complementum ab eodem accepisse dicenda sit. Obiter hic annotamus, quando quæstio est de inventore calculi differentialis, id potissimum quæri, quinam primus Algorithmum quantitatum infinite parvarum invenerit, & in solvendis problematis exercuerit; cum antea adhiberetur calculus literalis communis, & vi principiorum Geometriæ indivisibilium, termini quidam expungerentur respectu ceterorum evanescentes. Similis quodammodo est hæc quæstio alteri communi, qua quæritur, quinam sit inventor veræ characteristicæ numerorum & Algorithmi communis, quo hodie utimur in Arithmetica, tanta calculi commoditate & amplitudine. Habuere Veteres numerorum signa, sed parum apta. Usi iisdem sunt in Arithmetica practica. Non tamen ideo dici potest, quod habuerint veram numerorum characteristicam, & Arithmeticam practicam talem, qualem nunc habemus; nec quisquam hodie inventis notis numericis, quorum significatus ex ipsa numerorum natura deductus, aliis quam hisce signis uti vult: quemadmodum nec hodie inventa vera characteristica quantitatum infinite parvarum, qua calculus infinitesimalis in Analysin introductus, ut per modum Algorithmi exerceri possit, quisquam calculum literalem communem adhibere mavult in solvendis problematis, quorum solutio a quantitatibus infinite parvis pendet. Equidem ex ore ipsius Dn. DE TSCHIRNHAUSEN hausi, quod contenderet, se per Algebram communem eadem præstare posse, quæ per calculum differentialem adeo feliciter eruuntur; nec calculum hunc esse veram methodum, sed tantummodo veræ methodi compendium; qualia complura, immo, ut ipse confidenter admodum loquebatur, infinita excogitari possint, hocque sese ostensurum in secunda parte Medicinæ Mentis; nunquam tamen dictis fidem fecit, quin potius morti vicinus Schedas suas Manuscriptas Vulcano tradidit, ne publicum statueret, quo successu in vera, quam pollicebatur, methodo detegenda fuerit versatus, & quousque fuerit progressus. Constat autem ex iis, quæ dedit in Actis Eruditorum, quod nimia in se ipsum confidentia de iis, quæ animo versabatur, locutus fuerit, quasi a se jam essent inventa; etsi re penitius examinata impossibilia deprehenderentur. Ostendi in Arithmetica, calculum numerosum ita institui posse, ut conservetur universalitas, quemadmodum in literali, & hoc pacto inveniri per calculum numerosum, quæ per literalem eruuntur. Ostendi superius, quomodo Algebra numerosa ad solvenda problemata geometrice applicari possit, ut prodeant formulæ algebraicæ geo-

metrice

metrice construendæ (§. 194). Immo ostendi, quomodo, retenta communi linearum designatione, regulæ Algebræ ad solutiones problematum geometricorum applicari potuerint (§. *cit.*). Ecquis vero dixerit, si quis hoc fecisset, ante inventam Arithmeticam literalem, eum jam habuisse Algorithmum universalem & Algebram speciosam? Immo si hanc methodum ad tractandas curvas adhibuisset; ecquis dixerit, eum habuisse methodum CARTESII tractandi curvas per æquationes algebraicas? Habuisset similem quandam methodum, sed non eandem; ut adeo in multis paria præstare potuisset, ast non eadem facilitate. Ars characteristica differt a methodo, &, pro illius diversitate, hæc prorsus aliam induit formam; ita ut non modo facilius præstentur, quæ fieri debent, verum etiam plura in potestate sint, quam si alia characteristica adhiberetur. Patebunt hæc clarius, ubi Ars inveniendi ad formam artis fuerit redacta, quemadmodum Logica; & qui ad diversitatem methodorum, prouti hæ per Artem characteristicam modificantur, animum adverterit, prouti in hac commentatione inculcamus, eadem perspiciet. Talia autem observasse non tantum proderit ei, qui Artem inveniendi ad formam artis reducere voluerit; sed etiam ei, qui in Mathesi addiscenda ad tertium cognitionis gradum adspirat; ut methodos, quæ ipsi innotuerunt, limare, iisdemque omnem suam amplitudinem tribuere possit, quam suscipere valent; ne a casu expectandum sit, quod artis est, usu facultatum huc requisito non occasione sponte oblata, sed ex scientia determinato; nec tentaminibus subjiciatur, quod certa lege regitur. Nihil hic asserimus, quod non obvium sit ei, qui in Mathesi addiscenda præscripto a nobis modo fuerit versatus. Multa hic annotare poteramus, siquidem prolixioribus esse liceret, nec a præsenti instituto digressio longior videretur aliena.

§. 229. Notandum vero est, formulas algebraicas, quæ pro subtangente prodeunt, geometrice esse construendas, siquidem tangentem curvæ actu ducere volueris. Omittimus istas constructiones, brevitatis gratia; propterea quod in Analysi finitorum satis perspicue docuimus, quomodo istiusmodi formulæ construantur. Tyronibus tamen, quorum est exercere artem, eædem negligendæ non sunt. Ex. gr. subtangens ellipsis est $\frac{ax - x^2}{\frac{1}{2}a - x}$ (§. 25 *Anal. infin.* Est itaque

$$\tfrac{1}{2}a - x : a - x = x : PT$$
$$\text{h. e. } PC : PB = AP : PT$$

Tab. III. Fig. 36.

Quodsi ergo fiat PQ = PC & PR = PB, ductæque rectæ AQ agatur parallela TR; erit

$$PQ : PR = AP : PT$$
$$\text{h. e. } PC : PB = AP : PT$$

adeo-

adeoque subtangens PT rite determinata, consequenter TM tangens quæsita.

Quoniam subtangens pro omnibus ellipsibus in infinitum

$$\frac{(m+n)(ax-x^2)}{ma-mx-nx} = \frac{ax-x^2}{ma:(m+n)-x}$$

habemus:

$$\frac{ma}{m+n} - x : a - x = x : PT$$

Patet itaque non absimili modo tangentem pro omnibus ellipsibus in infinitum determinari posse. Et quia pro circulo eadem subtangentis formula reperitur, quæ pro ellipsi *Apolloniana*; & pro infinitis circulis eadem formula, quæ pro ellipsibus infinitis; nisi quod isthic $n=1$; eodem etiam modo tangens omnium circulorum in infinitum determinatur. Immo cum formula subtangentis hyperbolarum a formula subtangentis ellipseos non differat nisi signis; tangens etiam hyperbolarum in infinitum non absimili modo determinatur. Subtangens curvæ, quæ definitur per æquationem $y^3 - x^3 = axy$, est

$$\frac{3y^3 - axy}{3x^2 + ay} = \frac{y^3 - \frac{1}{3}axy}{x^2 + \frac{1}{3}ay}.$$

Habemus itaque

$$x^2 + \tfrac{1}{3}ay : y^2 - \tfrac{1}{3}ax = y : PT$$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{3}a} + y : \frac{y^2}{\frac{1}{3}a} - x = y : PT$$

Tab. III. Fig. 37. Quantitates $\frac{x^2}{\frac{1}{3}a} + y$ & $\frac{y^2}{\frac{1}{3}a} - x$ concinna admodum constructione reperiuntur hunc in modum. Fiat $CA = \frac{1}{3}a$; sitque $AP = x$, $PM = y$. Erigatur in A perpendicularis AN ipsi PM æqualis, seu construatur parallelogrammum rectangulum APMN. Ducta recta CN erigatur ad eandem perpendicularis NR. Erit $PR = \frac{y^2}{\frac{1}{3}a} - x$. Est enim

$$CA : AN = AN : AR$$

$$\tfrac{1}{3}a : y = y : \frac{y^2}{\frac{1}{3}a}$$

$$\text{Ergo } PR = AR - AP = \frac{y^2}{\frac{1}{3}a} - x.$$

Fiat porro AO=CA, ductaque OP erigatur PS ad eandem perpendicularis occurrens ipsi NA ultra rectam CP continuatæ in S. Erit $NS = \frac{x^2}{\frac{1}{3}a} + y$. Est enim $AO : AP = AP : AS$

$$\tfrac{1}{3}a : x = x : \frac{x^2}{\frac{1}{3}a}$$

$$\text{Ergo } NS = SA + AN = \frac{x^2}{\frac{1}{3}a} + y.$$

Quodsi curva supponatur data seu in plano descripta, datis jam NS & PR subtangens nullo negotio determinatur.

§. 230. Quoniam normalis ad tangentem perpendicularis; tangens quoque determinatur per normalem; consequenter etiam per subnormalem, per quam normalis determinatur. Subinde subnormalis per constructionem faciliorem reperitur; adeoque præstat tangentem determinare

minare per normalem, quam per subtangentem. Exemplum habemus in circulo, ubi radius ad tangentem perpendicularis; quemadmodum per præsentem quoque methodum calculo eruitur (§. 38 *Anal. infin.*); vi cujus subnormalis reperitur distantiæ semiordinatæ a centro æqualis; adeoque datur, data abscissa, cum subtangens eandem requirat constructionem, quam Ellipsis exigit (§. 229). Enimvero subinde etiam subnormalis postulat constructionem magis compositam quam subtangens; subinde utraque eadem simplicitate gaudet. Illius exemplum præbet ellipsis; hujus vero curva, ad quam est æquatio $y^3 - x^3 = axy$. Etenim in Ellipsi est (§. 40 *Anal. infin.*).

Tab. III. Fig. 38.

$$ax - x^2 : y^2 = \tfrac{1}{2}a - x : PH$$

$$a - x : \frac{y^2}{x} = \tfrac{1}{2}a - x : PH$$

Fiat itaque AQ = PM = y, & in Q erigatur perpendicularis QN rectæ per A & M ductæ in N occurrens; erit QN $= \frac{y^2}{x}$

Est enim

$$AP : PM = AQ : QN$$

$$x : y = y : \frac{y^2}{x}$$

Continuetur PM in O, donec PO = QN, & ex centro C ducatur recta RC ipsi OB parallela, erit PR subnormali æqualis. Est enim

$$PB : PO = PC : PR$$

$$a - x : \frac{y^2}{x} = \tfrac{1}{2}a - x : PR$$

Quare si fiat PH = PR, habebis subnormalem, eritque HM normalis quæsita. Hanc constructionem si cum ea conferre volueris, quam pro subtangente dedimus (§. 229); patebit eam esse magis compositam. Subnormalis curvæ, quæ definitur per æquationem $y^3 - x^3 = axy$ reperitur

$$= \frac{x^2 y + \tfrac{1}{3}ay^2}{y^2 - \tfrac{1}{3}ax}$$

Habemus itaque

$$y^2 - \tfrac{1}{3}ax : x^2 + \tfrac{1}{3}ay = y : PH$$

$$\frac{y^2}{\tfrac{1}{3}a} - x : \frac{x^2}{\tfrac{1}{3}a} + y = y : PH$$

Analogia hæc ab altera, quam pro subtangente elicuimus (§. 229), non differt, nisi quod termini in ratione priori invertantur; consequenter constructio eadem fere manet, nec simplicior est pro subnormali, quam pro subtangente.

§. 231. Methodus determinandi asymptotos curvarum nititur principio reductionis. Asymptoti enim considerantur instar tangentium in puncto a vertice infinito intervallo distante, ut abscissa eidem respondens sit infinita; consequenter axis a habeat ad eandem rationem inassignabilem; adeoque fiat respective nihilum. Hanc suppositionem a veritate non recedere, tyrones inde intelligunt, quod in hac hypothesi eruantur eædem quantitates linearum, per quas asymptoti determinantur, quas supra in Analysi finitorum aliter demonstravimus. Novarum enim methodo-

thodorum examina haberi debent, si applicentur ad jam nota. Ceterum attendant tyrones ad differentiam, quæ inter absolute nihilum, seu nihilum verum, & inter respective nihilum, seu quod respectu quantitatis alterius pro nihilo habetur, intercedit. Etenim si qua quantitas per absolute nihilum multiplicatur, nihilo æqualis est: sed quæ ducitur in respective nihilum non evadit nihilo æqualis. Hinc (§. 47 *Anal. infin.*) in valore $ax : (a+2x)$, recta a non quidem auget valorem rectæ $2x$, ut adeo sit $a+2x=2x$; attamen non efficit ax nihilo æquale; sed hoc factum spectatur tanquam quantitas a infinities sumta, quia a quantitas finita, x infinita. Idem patet in æquatione $ay^2 = bx(a+x)$, quæ, quia a respective nihilum, reducitur ad æquationem $ay^2 = bx^2$. Unde simul liquet, si sumatur $ay^2 = abx + bx^2$, cur infinitum primi gradus abx habeatur pro nihilo, respectu infiniti secundi gradus ay^2 & bx^2; quippe quod infinitum primi gradus infinities superat, quemadmodum infinitum primi gradus quantitatem finitam. Non nego, hæc in numerum fictionum referenda esse; sunt tamen toleranter vera, ut cum JUNGIO loquamur, & in calculo, quemadmodum fictiones aliæ, utiliter adhibentur. Cavendum itaque, ne in præjudicium veritatis talia in Physicam inferantur principia, ex qua imaginaria exulare debent; quippe ubi in veras phænomenorum causas inquirimus.

§. 232. Attentionem quoque peculiarem meretur problema 7 (§. 49 *Anal. infin.*) in quo subtangens & subnormalis in conchoide determinatur. Curva hæc ex numero algebraicarum est: unde semiordinatæ ejus sumi possunt ad axem AB normales. Habet vero eadem etiam polum C: unde pro semiordinatis quoque haberi possunt rectæ CM ex polo C ad punctum curvæ M ductæ. Tab. I. Analys. infin. Fig. 5. Quamobrem duplicem explicamus methodum determinandi ejus tangentem & normalem. Prima eadem est, qua utimur in curvis algebraicis ceteris; nisi quod valor ipsius dx non ex æquatione ad curvam, sed aliis artificiis eruatur; ne formulæ pro subtangente & subnormali prodeant nimis perplexæ, constructionem minus concinnam parientes. Formula autem pro subnormali expeditior est, quam pro subtangente, adeoque in constructione præferenda. Cum enim sit subnormalis $= t + \frac{z^2 - az}{v} = t + \frac{(z-a)z}{v}$; erit

$$v : z = z - a : \frac{z^2 - az}{v}$$

$$PB : MC = QC : \frac{z^2 - az}{v}$$

cui si addatur $PC = t$; prodibit subnormalis. Formula subtangentis $\frac{v(z^2 - t^2)}{z^2 - az + tv} = \frac{z^2 - t^2}{\frac{z^2 - az}{v} + t}$

resol-

resolvitur in hanc analogiam:

$$\frac{z^2 - az}{v} + t : z + t = z - t : PT$$

Atque adeo patet, si formula subtangentis construenda, ante inveniendam esse subnormalem. Data autem subnormali, datur etiam tangens, ut adeo ulteriori constructione non habeamus opus. Altera methodus nititur hypothesi semiordinatarum in puncto quodam concurrentium, quam ideo addere visum est, ut idea ejus animo ingeneretur ad alia profutura.

§. 233. Notanda vero sunt artificia, quibus subtangens determinatur in iis curvis, quarum semiordinatæ in puncto quodam coëunt. Nimirum quia, in curvis algebraicis, subtangens intercipitur inter tangentem & semiordinatam; in puncto communi concursus excitatur perpendicularis, tangentem, cui occurrit, secans, quemadmodum videre est in methodo altera pro conchoide & in methodo pro spiralibus. In cycloide subtangens determinatur per intersectionem tangentis cycloidis & tangentis circuli genitoris; quia portio illa tangentis intercipitur inter semiordinatam & tangentem cycloidis, etsi ad illam non sit perpendicularis; ut adeo hic a significatu termini tantisper recedatur, quem is in curvis algebraicis habet; quemadmodum etiam non retinetur significatus prorsus idem semiordinatæ, ubi eædem in puncto quodam concurrunt. Nimirum definitiones terminorum inventæ sunt pro curvis algebraicis; deinceps per analogiam quandam aptantur ad curvas alias termini, ut in iisdem proprias sibi nanciscantur definitiones. Absit itaque, ut tibi persuadeas, ipsos Geometras alere significatum terminorum vagum. Ita subtangentem cycloidis definire licet per portionem tangentis circuli, in puncto intersectionis circuli & semiordinatæ cycloidis, inter semiordinatam & tangentem cycloidis interceptam; & cum definitiones nominales sint arbitrariæ, utique hoc facere licet. Nec ideo dicere licet, quod vocabulum *Subtangens* varios habeat significatus. Subtangens enim cycloidis non est subtangens curvarum simpliciter ita dicta. In quadratrice DINOSTRATIS, abscissa sumitur in circulo genitore, & portio radii quadratricem secantis pro semiordinata. Quoniam hic recta ad semiordinatam perpendicularis cum tangente in puncto contactus concurrit, quæ adeo extra ipsum eam non secat, ideo necessarium fuit, ut eo, quem explicavimus (§. 55 *Anal. infin.*) modo determinaretur. Ad hoc animum probe advertere debent tyrones, ne notione subtangentis confundantur, ubi ipsimet tangentes in curvis non algebraicis determinare voluerint.

§. 234. Methodus de maximis & minimis nititur principio reductionis: maximæ enim & minimæ applicatæ

reducuntur ad caſum tangentium. Et ſimiliter applicatio hujus methodi ad problemata particularia eodem principio nititur; quatenus quantitatum ſeries ad certum quendam terminum continuo creſcentium vel decreſcentium, deinceps rurſus decreſcentium vel creſcentium exponitur per ſemiordinatas curvæ cujuſdam algebraicæ, in qua ſemiordinatæ eandem conſtantem relationem habent ad abſciſſas, quæ convenit quantitatibus creſcentibus vel decreſcentibus. Ex. gr. Si linea recta ita ſecanda, ut rectangulum ex ſegmentis ſit maximum eorum, quæ hac ratione conſtrui poſſunt; conſtans relatio quantitatis continuo creſcentis uſque ad terminum maximum exprimitur per factum ſegmentorum in ſe invicem. Quamobrem ſi ſegmentum minus ſumas pro abſciſſa; problema hoc reducitur ad circulum, in quo maxima ſemiordinata determinanda.

§. 235. Ut ideam calculi ſummatorii, qui vulgo integralis dicitur, animo concipiant tyrones; repetendum eſt ex ſuperioribus, magnitudines creſcere per momentanea incre-
Tab.III. Fig. 32. menta. Nimirum ſi tempuſculo quodam abſciſſa augetur incremento Pp, ſemiordinatæ accedit incrementum mR, arcui incrementum Mm & areæ incrementum $PpmM$. Unde ſi abſciſſa $AP = x$, conſtare concipitur ex infinitis iſtiuſmodi incrementis ſucceſſivis, quorum unumquodque indefinite exprimitur per dx, ita ut ſumma omnium dx ſive $\int dx = x$; Similiter ſemiordinata $PM = y$ conſtare concipitur ex infinitis iſtiuſmodi incrementis, quorum unumquodque indefinite exprimitur per dy, ita ut ſumma omnium dy ſive $\int dy = y$; Arcus $AM = v$ conſtare concipitur ex infinitis iſtiuſmodi incrementis, quorum unumquodque dv, ita ut $\int dv = v$; & area APM conſtare concipitur ex innumeris iſtiuſmodi areolis, quarum unaquæque, quemadmodum oſtendimus, exprimitur per ydy, ita ut ſumma omnium iſtarum areolarum ſive $\int ydy$ ſit areæ æqualis. Calculo adeo ſummatorio quæritur ſumma omnium incrementorum momentaneorum, ut habeatur magnitudo, cujus incrementum indefinite datur. Quamobrem ſi valor incrementi exprimatur per relationem, quam habet ſemiordinata ad abſciſſam; per ſummationem reperitur valor ſemiordinatæ, arcus, & areæ curvæ datæ. Ex. gr. in parabola $dy = \frac{1}{2} a^{1:2} x^{-1:2} dx$. Quare $\int \frac{1}{2} a^{1:2} x^{-1:2} dx = a^{1:2} x^{1:2} = \sqrt{ax}$ eſt ſemiordinata parabolæ. Similiter in circulo $dy = \frac{1}{2} (a - 2x)\, dx\, (ax - x^2)^{-1:2}$. Quare $\int \frac{1}{2} (a - 2x)(ax - x^2)^{-1:2} dx = (ax - x^2)^{1:2} = \sqrt{(ax - x^2)}$ eſt ſemiordinata circuli. Et in hyperbola intra aſymptotos $dy = ax^{-2} dx$. Quare $ax^{-1} = \frac{a}{x}$ eſt ſemiordinata hyperbolæ intra aſymptotos. Patet adeo per calculum ſummatorium reſtitui quantitatem variabilem, cujus differentia-

rentiatione prodiit magnitudinis elementum, seu momentaneum in ejus genesi incrementum. Unde Angli methodum fluxionum inversam vocant, quia ex data fluxione reperitur fluens, quemadmodum per directam ex fluente fluxio. Regressus autem iste non ubivis obvius est. Unde hodienum Mathematicorum ingenia exercet. Constabit autem ex problematis physico-mechanicis, qualia exempli loco in Mechanica dabimus, solutiones problematum sæpe nos deducere ad æquationes differentiales, quarum integratione detegitur natura curvæ; vel, ubi hoc fieri nequit, ope æquationum differentialium curvæ construuntur. Ope igitur hujus calculi multa in potestate sunt, ad quæ alias non pateret aditus. Ceterum tyrones ad exemplum trianguli, quod primo loco (§. 101 *Anal. infin.*) exhibuimus, animum probe attendant; ut non modo idea methodi quadrandi curvas in eodem nascatur, verum etiam dubium evanescat, quasi ex neglectu trianguli characteristici oriri debeat in summatione error assignabilis: quod ubi fieret, impossibile erat, ut prodiret area trianguli tanta, quantam esse debere demonstratur in Elementis Geometriæ. Præstantia autem hujus calculi inde elucescit, quod paucis lineis non modo exhibeatur quadratura parabolæ *Apollonianæ*, sed & omnium parabolarum, & curvarum ipsis agnatarum in infinitum; cum methodo *Archimedea* difficillime eruatur tantummodo prior.

§. 236. Cum nobis proposuerimus exemplis potius docere regulas, quam earum multitudine obruere memoriam tyronum, præceptis omnibus in unum locum congestis, antequam ad exempla accedatur; quæ de quantitate in summatione adjicienda tenenda sunt, exemplo quadraturæ segmenti parabolici inculcare lubuit (§. 107 *Anal. infin.*): ita enim ratio, cur adjicienda veniat, clarius percipitur, manifestior in casu particulari, quam si generalis detur. Ratio nimirum generalis est, quod in differentiatione, cum differentiale quantitatum constantium sit $= 0$; quantitates constantes in composita variabilibus adjectæ evanescant; ita ut idem sit differentiale quantitatum $x + a$ atque x, & quantitatum $x - a$ atque x. Est enim & $d(x+a) = dx$, & $d(x-a) = dx$ & differentiale ipsius $x = dx$. Unde in summatione, summæ adjiciendum, quod in differentiatione evanuit. Quomodo vero appareat, utrum aliqua quantitas constans sit adjicienda, nec ne; & num ea, quæ adjicienda venit, signum habere debeat positivum, an privativum; in exemplo particulari multo clarius elucet, quam si idem generaliter doceri deberet. Vidimus in doctrina de locis geometricis, initium abscissæ non modo statui posse in vertice A, ubi cum abscissa evanescit etiam semiordinata, Tab. II. Fig. 22.

evanescit arcus, evanescit spatium curvilineum, abscissa, semiordinata, & arcu contentum; verum etiam in puncto L infra verticem, vel in puncto N ultra eundem. Per hoc ipsum vero non variatur elementum abscissæ Pp, quod in omni casu idem est. Ne igitur in summatione obscurum sit, quod de quantitate adjicienda hic præcipitur; probe perpendant velim tyrones, quæ in scholio (§. 108 *Anal. infin.*) habentur. Inventores talia non animadverterunt, nisi ubi animum ad solutionem particularium applicarunt; neque enim methodi repertæ sunt, nisi dum solutiones problematum tentatæ ad easdem deduxerunt inventores. Quamobrem qui Analysi, tertii cognitionis gradus acquirendi gratia, operam navat, eadem via incedere debet, quam calcarunt Inventores; utut evitentur avia, in quæ haud raro inciderunt, cum in terris adhuc incognitis versarentur, antequam in viam regiam pervenirent. Ea quoque de causa, non dedimus nisi particularium problematum solutiones; etsi facillimum fuisset generales huc transcribere. Neque enim existimandum est, generales solutiones fuisse particularibus priores; sed illæ potius ex his enatæ sunt. Plerumque majoris artis est solvere problemata in casu particulari, quam universaliter.

§. 237. Quadraturam parabolarum omnium, immo curvarum aliarum eisdem agnatarum in infinitum, nullo negotio dari per calculum integralem patet (§. 103, 105 *Anal. infin.*). Curvæ autem ceteræ, quas deinceps quadramus, tum etiam segmenta parabolica, quæ quadrantur, reducuntur ad parabolas; sive elementum per se non integrabile, juxta canones generales, reducatur ad integrabile, terminis finitis aut nonnisi uno constans; sive resolvatur in seriem infinitam, quæ terminos numero infinitos habet. Etenim in casu priore, area curvæ reducitur ad areas tot parabolarum, quot sunt termini; in casu posteriori autem ad areas parabolarum infinitarum; quemadmodum, in Geometria elementari, figurarum rectilinearum, & ipsius circuli areæ reducuntur ad areas triangulorum. Ex. gr. ubi segmentum parabolicum, cujus elementum est $dx\sqrt{(ab+ax)}$ quadrare jubemur, $dx\sqrt{(ab+ax)}$ reducimus ad $2v^2 dv : a$. Quodsi dv sumatur pro differentiali abscissæ & v pro abscissa, erit $\frac{2v^2}{a} = z$, adeoque $v^2 = \frac{1}{2}az$. Unde liquet segmentum parabolicum quadrandum reduci ad parabolam externam, cujus parameter est $\frac{1}{2}a$, seu dimidio parametri parabolæ æqualis, cujus segmentum quadrandum. Similiter patet aream curvæ CARTESII (§. 111 *Anal. infin.*) esse differentiam arearum parabolæ externæ *Apollonianæ*, ad quam $x^2 = bz$, & parabolæ externæ secundi generis, ad quam $x^3 = b^2v$. Non absimili modo patet, in elemen-

elemento hyperbolæ intra aſymptotos $dx - xdx + x^2dx - x^3dx + x^4dx$ &c. in termino primo ſemiordinatam eſſe $= 1$, in ſecundo $= x$, in tertio, ſi $1 = a$, eſſe $x^2 = ay$, in quarto $x^3 = a^2y$, in quinto $x^4 = a^3y$ &c. conſequenter terminum primum eſſe elementum parallelogrammi rectanguli, ſecundum elementum trianguli æquicruri, tertium parabolæ externæ *Apollonianæ* ſeu primi generis, quartum elementum parabolæ externæ ſecundi generis, quintum elementum parabolæ externæ tertii generis & ita porro in infinitum. Quadratura igitur hyperbolæ reducitur ad quadraturam parallelogrammi rectanguli, trianguli æquicruri & infinitarum parabolarum. Inde eſt quod hyperbolæ & circuli quadraturam per infinitas parabolas demonſtraverit GUIDO GRANDUS. Equidem, data hyperbolæ area intra aſymptotos, datur etiam area interna inter axem & curvam interjacens; placuit tamen (§. 123 *Anal. infin.*) etiam oſtendere, quomodo area interna quadretur. Enimvero patet quadraturam areæ intra aſymptotos eſſe ſimpliciorem quadratura internæ, in qua $\sqrt{ax}$ ducenda eſt in ſeriem infinitam.

§. 238. Exemplo circuli docuimus (§. 124 *Anal. infin.*) quadraturam non uno modo abſolvi poſſe. Quadravimus enim circulum, ex dato ſinu verſo, ex dato ſinu complementi, & ex tangente. Notanda hic ſunt artificia, quibus progreſſus terminorum in infinitum redditur conſpicuus: id quod inprimis oſtendimus in quadratura *Newtoniana*. Artificia etſi eadem ſint, quibus jam in Analyſi infinitorum uſi ſumus; ſcilicet ut in numeris conſervetur univerſalitas calculi, & ut terminus ſequens efficiatur dependens ab antecedente; applicatio tamen eorundem non ſtatim cuivis ſuccurrit. Unde memini quoſdam ſeriem *Leibnitianam*, aut, ſi mavis, *Gregorianam*, pro circulo prætuliſſe *Newtonianæ*, quæ tamen citius convergit, ſeu celerius appropinquat; quod illa conſtantem ſervet legem, in hac vero termini nulla certa lege progrediantur; etſi *Newtoniana* non modo manifeſtam legem admittat, qua termini in infinitum progrediuntur, verum etiam hoc habeat, ut terminus quilibet ſequens ex proxime antecedente inveniri poſſit. Id potius attentionem tyronum mereatur, quod quadratura *Newtoniana* exhibeat quadraturam ſegmentorum circuli, *Leibnitiana* vero quadraturam ſectorum; atque adeo hæc inſinuet ideam quadrandi ſectores curvarum, quæ centrum habent, animo jam obverſata ARCHIMEDI, dum circuli aream ad aream trianguli reduxit; quemadmodum clariſſime docuit KEPLERUS in *Stereometria dolii Auſtriaci*. Notandum porro eſt, quod docuit LEIBNITIUS in *Actis Eruditorum* An. 1682, p. 45, cum termini $\frac{1}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{9}, \frac{1}{13}, \frac{1}{17}$, &c. itemque termini $\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}$,

$\frac{1}{11}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{19}$, &c. progrediantur in progressione harmonica; aream circuli esse differentiam duarum serierum progressionis harmonicæ. Præterea, si binos quosque terminos ad eandem denominationem reducas; quia $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, $\frac{1}{5}-\frac{1}{7}=\frac{2}{35}$, $\frac{1}{9}-\frac{1}{11}=\frac{2}{99}$, $\frac{1}{13}-\frac{1}{15}=\frac{2}{195}$, $\frac{1}{17}-\frac{1}{19}=\frac{2}{323}$ &c. area circuli, quadrato diametri existente 1, erit $\frac{2}{3}+\frac{2}{35}+\frac{2}{99}+\frac{2}{195}+\frac{2}{323}$ &c. in infinitum. Jam si diameter circuli $=1$, erit semidiameter $=\frac{1}{2}$, adeoque quadratum inscriptum $=\frac{1}{2}$ (§. 21 *Trigon.*). Quoniam itaque quadratum circumscriptum est inscripti duplum, si quadratum inscriptum fuerit $\frac{1}{4}$, erit circumscriptum $\frac{1}{2}$, adeoque area circuli $\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{99}+\frac{1}{195}+\frac{1}{323}$ &c. in infinitum (§. 181 *Arithm.*). Statim patet 3, 35, 99 esse numeros quadratos unitate mulctatos, nempe $4-1$, $36-1$, $100-1$; & inter quadratum 4 & 36 interjacere tres numeros quadratos 9, 16, 25; similiterque inter 36 & 100 interjacere tres 49, 64, 81. Quodsi seriem pro circulo continues, & cum numeris in Tabula quadratorum numerorum compares; videbis eam constante hac lege progredi, ut denominator fractionis sit quartus quisque numerus excerptus ex serie numerorum quadratorum unitate mulctatorum, numeratore semper existente unitate. Quando vero quadratum inscriptum $\frac{1}{4}$, radius est $\sqrt{\frac{1}{8}}$ (§. 21 *Trigon.*), adeoque diameter $=2\sqrt{\frac{1}{8}}=\sqrt{\frac{4}{8}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$. Hæc ideo monemus, ut discant tyrones dari etiam artificia particularia legem progressionis terminorum in infinitum detegendi, præter generalia, de quibus diximus ante: quamvis istiusmodi quoque artificiis jam usi fuerimus in inveniendo generali theoremate pro binomio ad dignitatem quamcunque evehendo (§. 95 *Anal. infin.*). Neque enim inutile est eadem artificia variis exemplis illustrari.

§. 239. Quemadmodum vero quadraturæ curvarum per series infinitas reducuntur ad quadraturam infinitarum parabolarum; ita quoque curvarum aliarum quadratura ad quadraturam circuli atque hyperbolæ reduci solent: id quod non uno modo fieri solet. Exemplum habemus in ellipsi (§. 126 *Anal. infin.*), ubi ratio areæ ellipticæ ad aream circuli sua veluti sponte sese offert. Exempla alia præbent cyclois, cissois, spiralis *Archimedea*. Non sine ratione addidimus hanc reductionem, cum eadem utamur in altioribus; prouti suo loco constabit in Mechanicis, ubi problemata physico-mechanica solvuntur. Probe autem notandæ sunt hæ reductiones iis, qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, ut vim principii reductionis per omnem Artem inveniendi utilissimi rectius percipiant. Ceterum eodem instituto, (§. 147 *Anal. infin.*) rectificationem parabolæ reducimus ad quadraturam hyperbolæ: id quod ideo attentionem meretur, ut discamus subinde summationem

nem ejusdem elementi dependere, & a quadratura curvæ, & a rectificatione arcus cujusdam. Habet enim hoc usum non contemnendum in methodo tangentium inversa, ubi æquationes differentiales construere jubemur, supposita curvæ cujusdam quadratura, vel rectificatione arcus. Exempla occurrunt in Mechanicis, ubi problemata physico-mechanica solvimus. Quodsi enim tempestive animum advertamus ad talia, quæ in progressu usum præclarum habent; quæ alias difficilia videntur, facilia evadunt, nec perturbatur animus, quando applicantur ea, quorum idea nobis jam familiaris evasit; præsertim cum haud raro insolita, nondumque perspecta videantur, quæ ex anterioribus nota esse poterant, si attentione sufficiente in iisdem usi fuissemus.

§. 240. Rectificatio curvarum, perinde ac inventio sectorum ellipticorum & hyperbolicorum, interdum requirit calculos admodum prolixos. Ne igitur prolixitate tyrones redderentur perplexi, & a solutione problematis deterrerentur; calculos integros admodum distincte explicatos exhibuimus. Consulent autem sibi tyrones, si initio generalem quandam ideam solutionis animo concipiant; veluti quod in rectificatione arcus elliptici (§. 172 *Anal. infin.*) primum quæratur valor ex æquatione ad curvam, deinde tam ex numeratore, quam denominatore, in valore isto emergente, extrahatur radix per theorema *Newtonianum*, & tandem series pro numeratore emergens dividatur per seriem, quæ emergit pro denominatore. Hoc pacto enim, in usum solutionis problematis, problema unum resolvitur quasi in plura, quorum unumquodque sigillatim solvi potest. Circa divisionem attentionem meretur artificium, quo calculus a perplexitate liberatur, ut distincte singula ipsis oculis exhibeantur: quod non modo facit ad facilius evitandum errorem, qui in calculum perplexum facile irrepit, defectu attentionis; verum etiam omnem molestiam aufert, qua attentio turbatur. Distincta perceptio intellectus est: unde qui intellectus perficiendi gratia Mathesi operam navant, non modo nostro more singula distincte sibi repræsentare, verum etiam ad diversa artificia, quibus eo fine hinc inde utimur, animum sollicite advertere tenentur. Ceterum ne quis aliorum libros evolvens, in quibus eorundem Problematum solutio occurrit, existimet, paucis ibidem explicari, quæ a nobis tanta prolixitate expediuntur; monendum esse duco, autores plerosque scribere peritis, non tyronibus, quorum utilitati nos velificamur; adeoque multa omittere, quæ a lectore supplenda sunt, siquidem veritatem assequi voluerit. Unde non modo tyrones, verum etiam haud raro exercitatiores multum temporis fallunt,

fallunt, antequam multo labore ab altero dicta assequantur. Nobis vero, qui tempus rerum omnium pretiosissimum existimamus, propositum est, ut sine omni temporis dispendio sciendi cupidos ad scientiam perducamus; cumque aliorum felicitati omni modo studere nos jubeat philosophia nostra, id quoque agendum esse arbitramur, ut in discendo omnem a discentibus molestiam arceamus.

§. 241. Inprimis autem in doctrina de rectificatione curvarum attentionem meretur methodus, qua, ex quantitate per seriem data, invenitur series pro quantitate variabili, ex qua formantur seriei prioris termini; veluti dum ex arcu dato sinus quaeritur. Etenim arcus datur per seriem infinitam, cujus termini formantur ex sinu, & sinus quaeritur in serie, cujus termini formantur ex arcu. Nititur ea methodo extrahendi radicem ex serie infinita, quam cum in finem explicavimus in Analysi finitorum. Inventa est a NEWTONO; quemadmodum constat ex literis ad LEIBNITIUM datis, quae leguntur apud WALLISIUM, volumine tertio Operum, diciturque Regressus serierum. Subinde tamen artis est applicare methodum extrahendi radicem ex aequatione infinita in regressu serierum. Exempli loco est problema 56, (§. 163 *Anal. infin.*), quo ex dato arcu invenitur sinus versus. Solutio igitur problematis istius attentionem meretur, ut artificium, quo hic utimur, in aliis casibus similibus adhiberi possit. Neque enim sufficit, ut intelligantur, quae docentur, si quis ad tertium cognitionis gradum adspirat; sed artificia quoque analytica addiscenda in usum futurum, cum regulas doceamus per exempla. Ad hactenus dicta qui animum attendit, in ceteris sese satis attentum atque acutum praebebit, ut plura moneri non sit opus. Immo si quis ea attentione in discenda Mathesi uti voluerit, quam tantopere inculcamus; acumen singulare acquiret, quo facile, nullo quasi negotio, discernet artificia in solutionibus problematum adhibita, eorundemque a se invicem dependentiam animadvertet: id quod utile erit iis, qui, studio Matheseos ac in specie Algebrae, in Arte inveniendi generali proficere student ad recte philosophandum necessaria.

§. 242. Circuli rectificatio etiam deduci potest ex quadratura circuli. Quoniam enim area circuli prodit ducta peripheria in quartam diametri partem (§. 429 *Geom.*), peripheria prodit, si seriem, quae exprimit aream circuli, dividas per $\frac{1}{4}$. Inde est, quod, si diameter fuerit 1, pro quadrante eadem prodeat series $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$ &c. (§. 158 *Anal. infin.*), quam pro circuli area repereramus, quadrato diametri existente 1. Etenim si seriem per $\frac{1}{4}$ dividere volueris, Numeratores terminorum ducendi sunt in 4, (§. 243 *Arithm.*).

Notan-

Notandum adhuc eſt, ex formulis indefinitis erui poſſe adhuc alias formulas pro circulo integro, vel ejus peripheria integra, ſi valor ipſius x non explicetur per diametrum 1, ſed per ſinum, ſinum verſum, coſinum, vel tangentem alicujus arcus: quo in caſu ſæpius prodit ſeries magis convergens, cum priori modo inventa minus convergeret & contra. Ex. gr. Si tangens fuerit x, pro arcu prodit

$$x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9 - \tfrac{1}{11}x^{11} \text{ \&c.}$$

Tab. III. Fig. 39. Ponamus arcum x eſſe 30°. Si fuerit radius $CA = CB = 1$, erit ſinus $BI = \frac{1}{2}$ (§. 15 *Trigon.*), conſequenter ob $IC^2 = BC^2 - BI^2$ (§. 417 *Geom.*) $IC^2 = \frac{3}{4}$. Quamobrem cum ſit

$IC : IB = CA : AD$ (§. 26 *Trigon.*)
$\& \; IC^2 : IB^2 = CA^2 : AD^2$ (§. 124 *Anal.*)
erit $\frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 1 : AD^2$
ſive $3 : 1 = 1 : AD^2$ (§. *cit.*)
Unde reperitur $AD = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Quodſi hunc valorem pro x ſubſtituas, cum ſit

$$\begin{array}{ll} x^2 = \frac{1}{3} & \frac{1}{3}x^2 = \frac{1}{9} \\ x^4 = \frac{1}{9} & \frac{1}{5}x^4 = \frac{1}{45} \\ x^6 = \frac{1}{27} & \frac{1}{7}x^6 = \frac{1}{189} \\ x^8 = \frac{1}{81} & \frac{1}{9}x^8 = \frac{1}{729} \\ x^{10} = \frac{1}{243} & \frac{1}{11}x^{10} = \frac{1}{2673}; \end{array}$$

ſeries $x\,(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{7}x^6 + \frac{1}{9}x^8 - \frac{1}{11}x^{10}$ &c.) degenerat in ſequentem

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{45} - \tfrac{1}{189} + \tfrac{1}{729} - \tfrac{1}{2673} \text{ \&c.})$$

quæ exprimit arcum 30 graduum. Si vero diameter fuerit 1, eadem exprimit arcum 60 graduum. Quamobrem ſi ſeriem hanc ducas in 6, hoc eſt, ſi $\sqrt{\frac{1}{3}}$ multiplices per 6, cum ſit $6\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{36}{3}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$; pro area circuli habebis

$$2\sqrt{3}\,(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{45} - \tfrac{1}{189} + \tfrac{1}{729} - \tfrac{1}{2673} \text{ \&c.})$$

Quodſi porro binos quoſque terminos reducere volueris ad eandem denominationem, erit

$$-\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{45} = \frac{-45 + 9}{405} = -\frac{36}{405} = -\frac{12}{135}$$

$$-\tfrac{1}{189} + \tfrac{1}{729} = \frac{-729 + 189}{189 \cdot 729} = \frac{-81 + 21}{21 \cdot 729} = -\frac{60}{21 \cdot 729} = -\frac{20}{7 \cdot 729} = -\frac{20}{5103}$$

Si adhuc addas terminum ſeriei ſequentem $+\frac{1}{9477}$; eodem modo reperies

$$-\tfrac{1}{2673} + \tfrac{1}{9477} = -\tfrac{28}{104247}.$$

Unde ſeries pro circulo reſultat $2\sqrt{3}\,(1 - \frac{12}{135} - \frac{20}{5103} - \frac{28}{104247}$ &c.)

Quodſi eandem ſeriem dividas per 4, & factorem $2\sqrt{3}$ per 4 multiplices; habebis pro circulo

$$8\sqrt{3}\,(\tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{135} - \tfrac{5}{5103} - \tfrac{7}{104247} \text{ \&c.}$$

ſeu $\sqrt{192}\,(\frac{1}{4} - \frac{3}{135} - \frac{5}{5103} - \frac{7}{104247}$ &c.)

Eſt vero $135 = 15 \cdot 9$
$5103 = 63 \cdot 81$
$= 63 \cdot 9^2$
$104247 = 143 \cdot 729$
$= 143 \cdot 9^3$

Quamobrem ſeries pro circulo

$$\sqrt{192}\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{15.9}-\frac{5}{63.9^2}-\frac{7}{143.9^3}\text{ \&c.}\right)$$

Unde patet lex progreſſionis in infinitum. Etenim numeratores progrediuntur ſecundum numeros impares; denominatores componuntur ex binis factoribus, quorum unus ſumitur ex progreſſione geometrica, cujus terminus primus 9, & exponens rationis eidem æqualis; alter vero per ſaltum excerpitur ex ſerie numerorum quadratorum unitate mulctatorum, quorum radices ſunt 4. 8. 12. &c. hoc eſt, progrediuntur in progreſſione arithmetica, cujus terminus primus eſt 4 & differentia terminorum eidem æqualis.

Niſi formulam abbreviare voluiſſemus reductione binorum terminorum diverſis ſignis præditorum ad eandem denominationem; lex progreſſionis in infinitum manifeſtari quoque poterat in formula

$$2\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{9}+\frac{1}{45}-\frac{1}{189}+\frac{1}{729}-\frac{1}{2673}\text{ \&c.}\right)$$

reſolvendo denominatores in ſuos factores. Cum enim ſit

$$45 = 5.\ 9$$
$$189 = 7.\ 27$$
$$729 = 9.\ 81$$
$$2673 = 11.\ 24$$

erit pro circulo ſeries, ſi diameter = 1

$$\sqrt{12}\left(\frac{1}{1.1}-\frac{1}{3.3}+\frac{1}{5.9}-\frac{1}{7.27}+\frac{1}{9.81}-\frac{1}{11.243}\text{ \&c.}\right)$$

Una hic ſeries factorum progreditur ſecundum numeros impares 1. 3. 5. 7. 9. 11. altera vero in progreſſione geometrica, cujus exponens rationis 3, nimirum 1. 3. 9. 27. 81. 143.

§. 243. Patet hinc non temere eſſe judicandum, utrum ſeries aliqua citius appropinquet altera, nec ne, & num conſtante quadam lege progrediatur. Neque enim eadem formula indefinita in omni caſu particulari æque appropinquat, & lex progreſſionis ſæpius latet, atque in caſu particulari non eadem eſt, quæ in univerſali. Liquet etiam ad detegendam legem progreſſionis facere Arithmeticam, ſeu numerorum ſcientiam, quæ ſubinde etiam compendia ſummationis quotlibet terminorum ſeriei ſubminiſtrat; ut adeo inutile exiſtimare minime debeat ſtudium, quod in ſpeciebus numerorum certa lege progredientibus & in iis ſummandis collocatur; ſit ita quod hodie Geometria magis excolatur Arithmetica, immo Geometriæ ad Mechanicam applicatæ magis habeatur ratio, quam puræ. Appatet etiam uſui formularum minime obſtare, quod irrationalitati obnoxiæ ſint; & in caſu particulari formulam ab irrationalitate liberam eidem implicari poſſe citra ullum incommodum, immo uſum ejus per hoc fieri poſſe expeditiorem. Hæc probe notanda ſunt, ne judicium de formulis diverſis præcipitemus, quando de unius

unius præ altera prærogativa agitur. Etsi itaque jam in superioribus (§. 238) de transmutatione seriei *Leibnitianæ*, seu *Gregorianæ*, pro circulo in alias quædam monuerimus; non tamen piguit plura in eam rem dicere (§. 241), tum ut intelligatur, ex eadem formula, per transmutationem communi Arithmetica nixam, varias deduci posse alias, tum ut constet, hoc non inutiliter fieri, ubi eædem ad praxin sunt transferendæ; tum ut excitaremus attentionem eorum, & juvaremus eorundem acumen, qui de seriebus infinitis ad usum aptandis forsan commentari decreverint. Neque enim inutilem operam sumeret, si quis hoc argumentum pro dignitate tractaret; ne inanes viderentur speculationes, quæ certum sui pollicentur usum. Nec est quod excipias talia peritis nullum facere negotium. Nam quibus sese commendat usus, ii non semper, immo rarissime adeo periti sunt, ut talia per se assequantur.

§. 244. Ut hæc rectius intelligantur; lubet exemplo quodam docere, quomodo per series infinitas inveniantur approximationes in numeris quantalibet exactitudine, prouti plures vel pauciores terminos summare libuerit. Resolvuntur autem termini singuli in fractiones decimales per divisionem; quemadmodum fecimus in extractione radicum ex æquationibus per approximationem (§. 363 *Anal. finit.*). Ne autem in numero cyphrarum quoto præfigendis aberres; tenendum est, tot præfigendas esse cyphras, quot numeratori cyphræ adjiciendæ, ut prima divisio succedat. Ex. gr. si fractio fuerit $\frac{1}{6}$, divisio non succedit nisi unitati adjecta cyphra. Quoto igitur præfigitur cyphra una, ut constet deficere integra, seu locum integrorum esse vacuum, & fractionem incipere a partibus decimis. Si fractio fuerit $\frac{1}{40}$, divisio inchoari nequit, nisi numeratori 1 adjectis duabus cyphris. Unde liquet quoto præfigendas esse duas cyphras: id quod indicio est, fractionem decimalem incipere a partibus centesimis. Si fractio fuerit $\frac{1}{112}$, divisio non potest inchoari, nisi tribus cyphris numeratori 1 adjectis: quoto igitur præfiguntur tres cyphræ, & fractio decimalis incipit a millesimis. Similiter si fractio fuerit $\frac{5}{1152}$; quoto denuo adjiciendæ sunt cyphræ tres & fractio incipit itidem a millesimis. In casu tamen particulari dantur compendia singulos terminos per divisionem in fractiones decimales resolvendi, quando scilicet alii ex aliis jam inventis inveniri possunt. Quamobrem sumamus seriem pro circulo

$$\sqrt{192}\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{15.9}-\frac{5}{63.9^2}-\frac{7}{143.9^3}\ \&c.\right)$$

quam ex *Leibnitiana* deduximus (§. 242). Patet ex 192 extrahendam

esse radicem in fractionibus decimalibus (§. 274 *Arithm.*), continuata operatione ad tot loca, quot visum fuerit. Quodsi hanc dividas per 4, habebis $\frac{1}{4}\sqrt{192}$, consequenter numerum, a quo summa terminorum signo negativo affectorum subtrahenda venit. Dividatur jam eadem radix per 9, 9^2 sive 81, 9^3 sive 729, &c. ut habeatur $\frac{1}{9}\sqrt{192}$, $\frac{1}{9^2}\sqrt{192}$, $\frac{1}{9^3}\sqrt{192}$, &c. aut, quod perinde est, quotus anterior semper per 9, pro obtinendo proxime sequente. Porro numerus $=\frac{1}{9}\sqrt{192}$ multiplicetur per 3, & factum dividatur per 15, ita prodibit numerus respondens $\frac{3}{15.9}\sqrt{192}$. Similiter numerus $=\frac{1}{9^2}\sqrt{192}$ multiplicetur per 5 & factum dividatur per 63, ut prodeat numerus $=\frac{5}{63.\ 9^2}\sqrt{192}$; atque ita porro. Quodsi enim terminos hosce, in unam summam collectos, subtrahas a numero $=\frac{1}{4}\sqrt{192}$, relinquetur numerus peripheriæ circuli respondens, posita diametro 1. Cum sit $\sqrt{192}=13.856406460551018348219$; erit $\frac{1}{4}\sqrt{192}=3.4641016151377545870 55$ & porro, $\sqrt{192}$ per R designata & $\frac{1}{9}$R per A, $\frac{1}{9^2}$R per B, $\frac{1}{9^3}$R per C, $\frac{1}{9^4}$R per D & ita porro, sive $\frac{1}{9}$R=A, $\frac{1}{9}$A=B, $\frac{1}{9}$B=C, $\frac{1}{9}$C=D & ita porro,

1.5396007178390020386691	=	A
171066746426555782076	=	B
19007416269617309119	=	C
2111935141068589902	=	D
234659460118732211	=	E
26073273346525801	=	F
2897030371836200	=	G
321892263537355	=	H
35765807059706	=	I
3973978562189	=	K
441553173576	=	L
49061463730	=	M
5451273748	=	N
605697083	=	O
67299676	=	P
7477741	=	Q
830860	=	R
92318	=	S
10257	=	T
1139	=	V
126	=	X
14	=	Y

Quodsi jam sit $a = \frac{3}{15}$, $b = \frac{5}{63}$, $c = \frac{7}{143}$, $d = \frac{9}{255}$, $e = \frac{11}{399}$ &c. continuata serie juxta legem progressionis, ut porro inveniantur valores f, g, h, &c. sitque A. $a = \frac{3}{15.9}\sqrt{192}$, B. $b = \frac{5}{63.9^2}\sqrt{192}$; C. $c = \frac{7}{143.9^3}\sqrt{192}$ &c. prodibit

307920143568700407738	=	A. *a*
13576725906869506514	=	B. *b*
930432964247001145	=	C. *c*
74538887331832584	=	D. *d*
6469308424325950	=	E. *e*
589482701747539	=	F. *f*
55498666127130	=	G. *g*
5349138299252	=	H. *h*
524749292768	=	I. *i*
52191088058	=	K. *k*
5248.435654	=	L. *l*
532582107	=	M. *m*
54452235	=	N. *n*
5602939	=	O. *o*
579685	=	P. *p*
60260	=	Q. *q*
6290	=	R. *r*
659	=	S. *s*
69	=	T. *t*
7	=	V. *v*
9	=	X. *x*
	+	Y. *y*
322508961547961348592		Summa,
3.464101615137754587055		
3.141592653589793238463		Periph. Circ.

Series hæc cum numeris LUDOLPHI prorſus conſentit: notæ enim ultimæ non habetur ratio, quia accurata non eſt, ſaltem dubia, propterea quod ignoratur, qualis ſit proditurus, ſi calculus produceretur. Equidem calculus hic videtur admodum prolixus; quod ſi tamen quis eundem conferre voluerit cum calculo LUDOLPHI in Libro *de circulo & adſcriptis*, facile intelligit, quanto *Ludolphinus* ſit operoſior & moleſtior. Immo ſi quis ſeriem *Leibnitianam* in fractiones decimales reſolvere vellet, multo prolixiore calculo haberet opus, antequam peripheriam circuli ad tot loca produceret.

§. 245. Quamvis autem ex allato exemplo abunde perſpiciatur, quomodo ſeriebus infinitis ſit utendum; non inconſultum tamen exiſtimamus alterum adhuc addere exemplum. Si ſinus arcus ſit y, ſinus totus ſeu radius circuli 1; erit arcus

=y

$= y + \frac{1\cdot 1}{2\cdot 3} Ay^2 + \frac{3\cdot 3}{4\cdot 5} By^2 + \frac{5\cdot 5}{6\cdot 7} Cy^2 + \frac{7\cdot 7}{8\cdot 9} Dy^2 + \frac{9\cdot 9}{10\cdot 11} Ey^2$ &c. in infinitum. Sit y sinus arcus 30°; erit is $= \frac{1}{2}$; adeoque series degenerat in sequentem $\frac{1}{2} + \frac{1\cdot 1}{2\cdot 3\cdot 4} A + \frac{3\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 4} B + \frac{5\cdot 5}{6\cdot 7\cdot 4} C + \frac{7\cdot 7}{8\cdot 9\cdot 4} D + \frac{9\cdot 9}{10\cdot 11\cdot 4} E$ &c. in infinitum; consequenter si diameter fuerit 1, eadem series exprimit arcum 60°. Quodsi ergo terminum primum ducas in 6, & qui hinc prodit 3, in $\frac{1\cdot 1}{2\cdot 3\cdot 4}$ coëfficientem secundi, ut habeas $\frac{1}{8}$, obtinebitur series pro circulo $3 + \frac{1}{8} + \frac{3\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 4} B + \frac{5\cdot 5}{6\cdot 7\cdot 4} C + \frac{7\cdot 7}{8\cdot 9\cdot 4} D + \frac{9\cdot 9}{10\cdot 11\cdot 4} E$ &c. Neque enim hic opus est, ut termini singuli multiplicentur per 6; quia sequentem semper ingreditur proxime præcedens; adeoque primus, qui est sextuplus primi in anteriore serie, terminos omnes sequentes. Non igitur alia re opus est, quam ut $\frac{1}{8}$ resolvas in fractionem decimalem 1250000000000000000, ut habeas terminum secundum; hunc porro ducas in $\frac{3\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 4}$ sive $\frac{9}{80}$, hoc est, multiplices per 9 & dividas per 80, ut obtineas tertium 140625000000000000; tertium vero ducas in $\frac{5\cdot 5}{6\cdot 7\cdot 4}$, seu multiplices per 25, & dividas per 168, ut, prodeat quartus 2092633928571428; & ita porro. Quodsi enim terminos omnes addas, aggregatum erit peripheria circuli, cum numeris *Ludolphinis* consentiens. Sane si quatuor saltem terminos addis, posita diametro 10000, prout hic factum esse vides,

3. 0000	= A
1250	= B
140	= C
20	= D
Summa 3. 1410	

habebimus pro peripheria 3141, cum nota ultima non sit accurata. Reperitur adeo ratio diametri ad peripheriam ut 1000 ad 3141 cum *Ludolphinis* numeris consentiens. Nisi adeo fractiones decimales ad multa loca extendere volueris, sed in paucis numeris acquiescas, quemadmodum fecere ARCHIMEDES, PTOLOMÆUS, alii; exiguo tantum calculo opus est. Similiter brevi calculo iidem numeri inveniri poterant ex serie præcedente. Cum enim sit $\frac{1}{4}\sqrt{192} = 3.46410$ &

$$1.53960 = \tfrac{1}{9}R = A$$
$$17106 = \tfrac{1}{9}A = B$$
$$1900 = \tfrac{1}{9}B = C$$
$$211 = \tfrac{1}{9}C = D$$

reperietur ut ante (§. 244)

30792 = A. *a*
1357 = B. *b*
93 = C. *c*
7 = D. *d*

32249 Summa
$346410 = \frac{1}{4}\sqrt{192}$

314161 Peripheria circuli, in qua quatuor numeri 3141, ut ante, cum *Ludolphinis* consentiunt.

§. 246. Quod si resolutio serierum infinitarum hic data probe perpendatur; nullus dubito fore ut, in seriebus ad usum aptandis, nihil posthac supersit difficultatis. Inprimis autem hinc perspicitur, quantum intersit, ut lex progressionis in infinitum sit manifesta; ne multo labore demum investigandi sint termini, quibus habemus opus, & ut termini sequentes inveniantur ex antecedentibus; sive id fiat per dependentiam eorundem a se invicem in formula generali, quemadmodum in exemplo altero (§. 245), sive id singulari quadam ratione contingat in casu particulari, quemadmodum in exemplo primo (§. 244). Intelligimus etiam quanta, in tractandis altioribus, attentione opus sit ad maxime vulgaria, ne ea eidem sese subducant, & per ambages incedamus, ubi brevior ducit ad scopum via. Ex. gr. notissimum est ex communi Algorithmo fractorum, si $\frac{1}{9}$ dividas per 9, quotum esse $\frac{1}{9^2}$; si $\frac{1}{9^2}$ porro dividas per 9, quotum esse $\frac{1}{9^3}$ & sic porro in infinitum. Enimvero, si in exemplo primo huc animum minime advertas, & $\sqrt{192}$ sive 13. 8564064605510 18348219 dividere velis per 9, per 9^2 sive 81, per 9^3 sive 279 & ita porro, operoso calculo invenies numeros A, B, C, D &c. qui, continua divisione antecedentis per 9, multo facilius eruuntur. Immo si quis una divisione terminum quemcunque resolvere vellet, v. gr. secundum $\frac{3}{15 \cdot 9}\sqrt{192}$ sive $\frac{3}{135}\sqrt{192}$, multiplicando scilicet 13. 85640 &c. per 3, & factum dividendo per 135; in ambages multo longiores incideret; adhuc longiores futuras, si terminus quilibet reduceretur ad pure irrationalem & ex eo extraheretur radix, veluti si fieret $\frac{3}{135}\sqrt{192} = \sqrt{\frac{1728}{18225}}$ atque inde extraheretur radix. Non existimandum est, talia inutiliter moneri: nisi enim ad ea animum reflectamus, ubi obvia sunt, attentioni nostræ sese subducent, ubi magis latent. Illustria dare poteramus exempla, nisi nostrum foret ab invidiosis abstinere, quæ nulla necessitas imperat. Ad vitandam itaque ἀσυνεψίαν sedato opus est animo; ne appetitus influat in determinationem operationum intellectus, in qua nullæ ipsius sunt partes. Distinctæ notiones nullibi

nullibi negligendæ sunt, ubi earum participes fieri possumus; præsertim si quis philosophari constituit, & ad vitæ perfectionem tanquam ad scopum tendit. Diximus insuper, quam difficile sit de prærogativa formulæ unius præ altera statuere, nisi utriusque resolutione observatis omnibus, quæ observari possunt, facta. Sane si formula posteriore utaris pro circulo, & terminos resolutos sibi invicem legitime subordines, & idem facias cum priori; videbitur posterior priori longe anteponenda. Enimvero si totam operationem in casu priori conferas cum tota in altero; præsertim ubi divisionem per novenarium transmutes in substractionem (§. 116 *Arithm.*); longe aliter sentics. Nolo addere plura, ne videar in levioribus commendandis nimius; præsertim iis, qui, cum in calculis consenescere decreverint, nec studii Matheseos utilitatem extra Mathesin quærant, illorum fructum prospicere nequeant.

§. 247. In capite de cubatione solidorum & complanatione superficierum tantummodo notandum est, quomodo elementa solidorum & superficierum eorundem inveniantur; & quomodo per calculum summatorium, eruta soliditate vel superficie corporis rotundi, investigentur per calculum literalem theoremata praxi inservientia. Inprimis hic attentionem meretur, quomodo solidum unum transformetur in aliud ipsi æquale. Ea cum facilia sint, pauca tantummodo speciminis loco exhibuimus, cum unusquisque per se plura addere possit.

§. 248. Methodus tangentium inversa maximæ utilitatis est in sublimioribus, atque ideo maximam quoque meretur attentionem. Ejus saltem primas lineas duximus; ut nascatur methodi hujus idea in animis tyronum; ne hæsitent in problematis, quæ in Mechanica traduntur. Duo autem hic præ ceteris notanda sunt; primum quomodo constructio æquationum reducatur ad quadraturam curvarum simpliciorum & earundem rectificationem, ut appareat, quomodo solvantur problemata, supposita quadratura curvæ vel rectificatione arcus; deinde quomodo ex æquatione differentiali ad logarithmicam deducatur modus differentiandi quantitates, quas logarithmi ingrediuntur (§. 243 *Anal. infin.*). Hujus enim usus insignis est in inveniendis logarithmis, tam numerorum vulgarium, quam sinuum, atque tangentium; quemadmodum capite sexto docetur. Eodem quoque artificio nititur calculus exponentialis, quem integra sectione tertia exposuimus, & constructio curvarum exponentialium, ope logarithmicæ, atque quantitatum, quas logarithmi ingrediuntur; cujus exempla dedimus capite altero hujus sectionis. Hinc vero elucet insignis lineæ logarithmicæ utilitas, quam nemo prævidere poterat, iis probe notanda, qui ad tertium cognitionis gradum adspirant. Ratio-

nem jam dedimus in superioribus (§. 176).

§. 249. Artificia, quibus utimur in investigando modo differentiandi differentialia (§. 297 *Anal. infin.*), eadem sunt, quæ ante adhibuimus ad investigandas regulas differentiandi quantitates finitas, & quæ jam nobis innotuere in calculo literali, ubi algorithmum fractorum ex algorithmo integrorum, & algorithmum irrationalium ex algorithmo rationalium deduximus; ut adeo hinc appareat, quomodo quæ vulgaria videntur, haud raro prosint ad altiora; & quam utile sit ad artificia, quibus utimur in facilioribus, animum attendere, ne impervia nobis videantur magis ardua. Cum Methodus determinandi puncta flexus contrarii curvarum non minus utilis sit, ad ductum curvarum repræsentandum, quarum præter æquationem nihil novimus, quam methodus de maximis & minimis, & methodus determinandi puncta, in quibus curva rectam positione datam secat, quam in superioribus illustravimus; illa vero a calculo differentiali pendeat; eandem quoque exemplis nonnullis illustrare lubuit. Etsi enim curva integra nondum construi possit; ope tamen punctorum, quæ per eas methodos determinantur, ductum ejus imaginari licet. Exempla occurrent in Mechanica.

§. 250. In doctrina de evolutione curvarum, quam capite tertio proponimus, notatu maxime dignum est, quod cyclois sua evolutione seipsam describat (§. 350 *Anal. infin.*), cum hoc faciat ad perfectionem motus penduli, quo horologia automata ad maximam perfectionem perducuntur, quemadmodum in Mechanicis demonstratur. Sane ea ipsa permovit HUGENIUM, ut de evolutione curvarum cogitaret, sicuti ex egregio Mathematici summi *Tractatu de horologio oscillatorio* intelligitur. Notandum præterea, quod inserviat rectificationi curvarum, & ipsam curvedinem curvæ discernat; ut arcus circuli osculatoris pro arcu curvæ alterius in praxi substitui possit (§. 331 *Anal. infin.*). Applicatio calculi differentialis in hoc argumento nihil habet, quod non sit ex anterioribus manifestum. Hoc tamen adhuc attentionem meretur, quod determinatio radii osculi, seu evolutæ, interdum faciat ad theoremata selecta eruenda, quemadmodum exemplo logarithmicæ docemus (§. 332 *Anal. infin.*

§. 251. Arithmetica infinitorum, invento calculo differentiali & summatorio, non amplius eum habet usum quem habere poterat, si is nondum fuisset inventus. Eam tamen prætermittendam esse non duximus; ne quod sit inventum, celebre inter recentiores Mathematicos nomen adeptum, quod a nobis non illustretur. Etsi autem pauca tantummodo de ea tradidisse videamur, plura tamen

men

men dedimus, quam in prolixo opere ISMAELIS BULLIALDI continentur. Eam illustrare voluerat JOANNES CHRISTOPHORUS STURMIUS in *Mathesi enucleata*; sed cum esset artificiorum recentiorum ignarus, quod sibi proposuerat non perfecit. Quæ de termino ultimo seriei continuatæ evanescente notanda sunt, satis perspicue exposuimus (§. 345 *Anal. infin.*), ut plura eam in rem annotari minime sit opus. Ratio, cur usum Arithmeticæ infinitorum extendi quasi in infinitum licuerit ultra terminos, intra quos a BULLIALDO coërcetur, in summatione potentiarum & numerorum pyramidalium consistit, quam in Analysi finitorum universali quadam ratione absolvimus (§. 200 *& seqq.* & §. 216). In Arithmetica enim infinitorum semiordinatæ curvarum spectantur tanquam in certa numerorum serie progredientium, veluti potentiarum dati cujusdam gradus in curvis parabolici generis (§. 349, 350 *Anal. infin.*). Unde analysi ad analysin Veterum propius accedente, quadraturæ curvarum quadrabilium deducuntur in Arithmetica infinitorum. Atque hoc artificium heuristicum notari meretur.

CAPUT V.

De Studio Mechanicæ.

§. 252. MEchanica a Veteribus inventa fuit in usum machinarum: Veteres enim laudabili exemplo in theoria semper respiciebant ad usum in praxin; quippe cum in omni theoriæ genere intendenda sit praxis, quemadmodum in Philosophia sedulo inculcamus. Primas ejus lineas duxit ARCHIMEDES in libris de æquiponderantibus, nec ultra eos terminos progressi sunt Mathematici usque ad GALILÆUM. Quoniam machinæ omnes ex paucis quibusdam machinis simplicibus componuntur, quas potentias mechanicas appellare solent, nos machinas simplices diximus; in Mechanica non considerarunt nisi machinas simplices, vectem, axem in peritrochio, trochleam, cochleam, planum inclinatum & cuneum, quarum theoriam amplissimam, sed nimis diffusam dedit VARIGNONIUS in opere posthumo. Considerarunt autem machinas hasce simplices in statu æquilibrii, in quo nonnisi adest conatus ad motum, quam vim mortuam vocat LEIBNITIUS; propterea quod sublato æquilibrio, dum potentia motrix augetur, nascitur motus diversæ celeritatis, pro diverso illius incremento, seu excessu potentiæ motri-

motricis supra pondus movendum. Inde est quod, in agitandis machinis, non modo potentiæ motrices conferantur cum pondere movendo; verum etiam ipsæmet ad pondus ipsis æquale, & resistentiæ in motu machinarum superandæ ad pondus æquivalens reducuntur; quatenus potentiæ cuilibet motrici, quoad effectum, substitui potest aliquod pondus, vi gravitatis, qua ad descensum urgetur in machinam agens, seu eandem animans; & resistentiis superandis substituere licet pondus eandem potentiam motricem requirens, si elevari debet. Atque hæc probe notanda sunt tyronibus, ut & mentem Veterum plenius assequantur, & in applicatione theoriæ machinarum simplicium ad praxin, hoc est, ad machinas compositas explicandas nihil sentiant difficultatis. Patet hinc, quod LEIBNITIUS asseruit, Veteres nonnisi vis mortuæ notionem habuisse. GALILÆUS in *Dialogis de motu* ulterius primum progressus, & motum gravium descendentium, & projectorum explicare cœpit, non infeliciter: cum vero in finem præmisit theoriam motus æquabilis. Attingit etiam nonnulla de motu pendulorum, sed quasi obiter. Accuratius vero, & data opera, in eundem inquisivit HUGENIUS in Tractatu *de Horologio oscillatorio*, & theoriam inprimis centri oscillationis superaddidit. Occasione motus pendulorum idem incidit in vim centrifugam, quam in circulo ad examen revocavit, adjectis in fine Tractatus de horologio oscillatorio theorematis de vi centrifuga, quorum demonstrationes demum publici juris factæ sunt in posthumis. Inde NEWTONUS vires centrales, tam centripetas, quam centrifugas considerare cœpit etiam in curvis aliis, præsertim centripetis, & ad explicandum motum Planetarum theoriam transtulit, in *Principiis Philosophiæ naturalis mathematicis*. CARTESIUS, in *Principiis Philosophiæ*, leges motus ex percussione explicare aggrediebatur, sed non satis feliciter, cum ad veritatem liquidam pertingere non potuerit. Postea vero WALLISIO, CHRISTOPHORO WREN & HUGENIO negotium felicius cessit; quorum ille leges motus corporum non elasticorum, hi vero corporum elasticorum bene explicarunt. Quoniam autem motus corporum diminuuntur propter resistentiam medii, in quo moventur; in eandem quoque inquirere cœpit WALLISIUS; deinde vero hoc argumentum ulterius prosecutus est NEWTONUS in Principiis modo laudatis. Denique, cum calculus differentialis esset inventus, & a Geometris præclaris, quos inter eminent BERNOULLII fratres, ad solutionem problematum physico-mechanicorum transferretur; descensus & ascensus corporum in lineis curvis expendi cœpit. Atque sic tandem latissimus evasit

evaſit Mechanicæ campus, qui arctis nimium limitibus a Veteribus includebatur. Nos igitur Elementa Mechanicæ daturi, quæ ſatisfacerent, non minus inventorum antiquorum, quam recentiorum rationem habuimus. Hæc probe notanda ſunt, ut idea quædam Mechanicæ animo concipiatur, definitio rectius intelligatur, nec quiſquam miretur, ubi viderit, in Elementis noſtris Mechanicæ longe alia pertractari, quam quæ vulgo in libellis hujus nominis reperiuntur.

§. 253. Qui ſolam praxin mechanicam curæ cordique habent, ii, prætermiſſis ceteris omnibus, ad caput decimum quintum ſtatim digrediantur: in eo enim & ſequentibus continentur, quæ ad machinarum intellectum faciunt. Quoniam nobis theoriam cum praxi ſemper conjungere propoſuimus, potentiarum quoque motricium ad machinas applicationem, & machinarum uſitatiorum conſtructionem explicare voluimus: quæ duo vulgo in libellis mechanicis negliguntur. A potentiarum motricium ad machinas applicatione pendet ſtructura externa machinarum, quæ abſque illa intelligi nequit; quemadmodum ſtructura interna non intelligitur abſque notitia machinarum ſimplicium. Libellatio vulgo in Geometria practica docetur: ſed cum nos Geometriam practicam a theoretica non ſeparaverimus; libellationis vero indiſpenſabilis uſus ſit in conſtruendis molendinis, quæ aquarum vi agitantur; eandem quoque hic explicare viſum fuit, ubi de applicatione potentiarum ad machinas agitur. Quoniam tamen ad machinas applicantur, quæ de æquilibrio ſolidorum c. 3, quod de centro gravitatis agit, demonſtrantur in prima ejus parte, & quæ c. 4, de quiete & lapſu corporum gravium docentur; expenſis definitionibus machinarum ſimplicium, addendæ ſunt definitiones ac propoſitiones horum capitum, eo modo, qui ad primum cognitionis gradum acquirendum ſufficit. Ubi vero animo ſatis comprehenderis, quæ ad machinas, tam ſimplices, quam compoſitas ſpectant; non inutile fuerit, ſi ceterorum quoque theorematum notitiam quandam tibi compares ex anterioribus, prætermiſſis tantummodo problematis, quæ analytice ſolvuntur per calculum; ne ignores principia, quæ in praxi accuratiori uſui ſunt.

§. 254. Qui praxin mechanicam demonſtratam expetit, ad ſecundum cognitionis gradum adſpirans; eum addere debere demonſtrationes per ſe patet. Non tamen ideo neceſſe eſt, ut omnis theoriæ campum emetiatur; ſed ſufficiunt ea, quæ ad intellectum machinarum faciunt. Quænam vero ea ſint, facta demonſtrationum cap. 15, contentarum analyſis, eo quidem modo, quam in Logica (§. 922) ſatis diſtincte explicavimus, & exemplis illuſtravimus, docet.

docet. Quodsi quis praxin ante hauserit, quam ad theoriam accedat, quemadmodum modo (§. 253) inculcavimus; ei haud difficile fuerit ea, quæ sibi usui sunt, discernere a ceteris, quæ insuper habere potest. Nec nocet, si vel maxime quædam addiscat, quorum in machinis usum nullum perspicit: neque enim solum fieri potest, ut in posterum usus quidam sese offerat, qui prævideri haud quaquam poterat; verum etiam omnis theoriæ tractatio certissimam spondet in firmandis ratiociniis mechanicis utilitatem, & menti acumen quoddam conciliat, ut perspicacius videamus aliis, in iis quæ ad machinas spectant. Acumen vero mechanicum, & prompta de machinis ratiocinatio, non nullius censeri debet momenti.

§. 255. Qui denique ad tertium cognitionis gradum aditum sibi parare gestit, is nihil eorum prætermittere debet, quæ in Elementis nostris Mechanicæ continentur; sed omnia potius accurata industria persequi tenetur; quemadmodum in superioribus in genere præcepimus. Qui ad tertium cognitionis gradum adspirat, intendit habitum ex iis, quæ cognovit, inveniendi alia sibi adhuc incognita. Opus igitur habet principiis, quibus in ratiocinando utatur; opus habet artificiis heuristicis, quæ data occasione imitetur. Quæ a nobis demonstrantur, vel analytice eruuntur, sunt principia, per quæ aditus patet ad ulteriora. Resolutiones analyticæ problematum, quas damus, continent artificia heuristica a lectore attento annotanda, vi perspicaciæ quam inculcavimus, cum de studio Algebræ ageremus. Atque ea ratio est, cur problemata physico-mechanica in casu particulari solverimus, in quo soluta a primis inventoribus; etsi subinde quoque docuerimus, quomodo problemata particularia ad universalitatem reducantur. Plus enim artis plerumque deprehenditur in solutionibus particularibus, quam in universalibus; multoque difficilius fuit primis inventoribus dare solutiones particulares, quam deinceps aliis, qui iisdem omnem universalitatem conciliare voluerunt. Quamobrem qui non ad pompam scripsimus, (levitate quadam animi in ambitionem adducti, quæ cum condonanda sit homini in lineis & calculis ætatem omnem consumenti, ob egregia in scientiam merita, in Philosopho tamen ferenda non est, qui non minus appetitum, quam intellectum, seu facultatem cognoscitivam perficere tenetur;) sed utilitatem discentis unice respicimus, ad quam tanquam ad metam contendimus; eundem quoque a via regia deducere non debuimus, quam calcarunt, qui ad inaccessa aditum pararunt; ut appareat, quomodo quæ impervia videntur, humano ingenio pervia reddantur. In inprimis cognitu utilissimum, si non necessarium, dicendum iis

iis qui Artem inveniendi extra Mathesin exercere sibi propositum habent. Postquam enim abunde convicti sumus, quam necessarium sit, studio Matheseos etiam sublimioris, perficere intellectum, ut extra ejus pomœria inoffenso pede progrediaris; hanc quoque utilitatem, vulgo non satis animadversam, etsi a multis commendatam, in conscribendis Elementis nostris intendimus, operamque dedimus, ne vana spe lactaremus lectoris animum.

§. 256. Enimvero non opus est, ut ad particularia descendamus: neque enim alia re opus est, quam ut ea, quæ superius de studio Matheseos in genere, & de studio præsertim Algebræ in specie, præcipimus, ad lectionem Mechanicæ transferantur. Quamvis enim hinc inde nonnulla scitu non inutilia annotari poterant; tantam tamen prolixitatem non fert præsens institutum; & qui per superiora ad ea, quæ sunt methodi, sufficientem attentionem, cum acumine, ubivis afferre didicit, perspicillis propriis usus animadvertet, quæ eum subterfugere non debent, nec manuductione alterius indiget, qui firmo pede incedere valet. De duobus tamen artificiis, quibus utimur in Mechanicis, prorsus silere nefas est, propterea quod in Mathesi pura iisdem locus non est, in Philosophia tamen naturali, & in ipsa quoque morali, maximam utilitatem habent. Ut facilius intelligantur, quæ dicenda sunt; sumamus casum particularem. Gravia moventur in rerum natura per medium resistens, veluti per aërem, aut aquam. Enimvero in Mechanicis consideramus primo motum gravium in medio non resistente; qualis nempe foret, si nihil adesset, quod motum ejus quomodocunque impediret; seu quatenus a sola gravitate tanquam causa dependet. Ubi enim constat, qualis sit per se, nec difficile est postea quoque definire, quid per resistentiam medii detrahatur; ut intelligatur, qualis sit in medio resistente. Similiter in æquilibrio solidorum, pondera primum consideramus tanquam lineis gravitatis expertibus applicata; ut quale in se sit pateat. Deinde vero idem applicamus ad pondera ex gravibus suspensa, veluti longurione aut hasta quadam ferrea. Eodem prorsus modo, in Philosophia morali, appetitus sensitivus consideratur in se, independenter a rationali; deinde vero etiam, quatenus ab eodem dependet, & vice versa. Similiter appetitus spectatur ut dependens a solo sensu, deinde vero ut simul dependens ab imaginatione. Qui concursum plurium facultatum ad eandem actionem non distincte expendunt, ut sigillatim inquirant, quid ab unaquaque proficiscatur; nunquam ad veritatem liquidam pertingunt; sed summa imis miscent; aut cœcutientes hæsitant, quid statuere debeant; & veritatem, vel nullam

agnoſcunt, vel eam rationi humanæ imperviam temere pronunciant. Deinde probe quoque notandum venit artificium, quo problemata phyſico-mechanica reducuntur ad Geometriam puram, ut per eandem ſolutio in poteſtatem redigatur: id quod inprimis locum habet in tranſitu Geometriæ ad Phyſicam; ut tractare naturam mathematice liceat. Utile eſt hoc artificium in omni cognitione mathematica, qualis etiam locum habet in Pſychologia, & in variis Philoſophiæ practicæ capitibus; etſi hactenus de ea non cogitarint Mathematici; quippe principiorum philoſophicorum ignari, nec Philoſophi, qui ſubtilitates mathematicas a ſe alienas exiſtimarunt. Erit autem tempus, quo, Philoſophia noſtro more magis exculta, cognitionem mathematicam ultra eos, intra quos hactenus coarctatur, terminos etiam ad talia provehent, in quibus quod locum habeat, hactenus vix ſibi perſuadere patiuntur. Quæ hic ſpeciminis loco in medium afferuntur, excitare debent attentionem lectoris ad ea artificia, quibus methodus amplificatur, & quæ pauci in Matheſi imitantur in caſu ſimili; extra eandem vero ut adhibeat nemo cogitat.

§. 257. In reſolutione problematum phyſico-mechanicorum, id quoque conſiderandum eſt, utrum ſolvantur in hypotheſi naturæ, an vero in aliena. Illud obtinet, ſi quod ſumitur in rerum natura, revera ita ſeſe habet; hoc autem, ſi minus. Exempli loco eſto acceleratio gravium. Motum gravium continuo accelerari, experientia conſtat; nec minus liquet, naturæ conveniens eſſe, ut certa lege acceleretur. Quodſi, in ſolutionibus problematum de motu gravium, lex accelerationis ſumatur, qualis obtinet in rerum natura; eadem in hypotheſi naturæ ſolvuntur. Si vero alia ſumatur, quam quæ in rerum natura obtinet; eadem ſolvi dicimus in hypotheſi aliena. Geometræ perinde eſt, in quacunque hypotheſi problema ſolvat, modo hypotheſis non ſit impoſſibilis, libera nimirum a contradictione. Enimvero in Phyſica non ſunt uſui niſi ſolutiones, quæ hypotheſi naturæ nituntur. Hinc qui nonniſi Geometram agit, problema ſolvit in omni hypotheſi poſſibili; Phyſico relinquens ut hypotheſin naturæ definiat, & ad eandem ſolutionem generalem applicet, vel ex pluribus particularibus eam ſeligat, quæ inſtituto ſuo convenit. Quod ſi dicas, ſolutiones in hypotheſi aliena nullius eſſe utilitatis; lubens concedo, ſi non de alia utilitate ſermo fuerit, quam quæ in Phyſica locum habet; nego autem, ſi de utilitate ſimpliciter ſermo fuerit. Neque enim deſtituitur ſuo in Matheſi pura uſu; qualis eſt incrementum Artis analyticæ magni omnino faciendum. Non igitur contemnenda ſunt magna Geometrarum molimina, quæ per ſe ad cognitionem natu-

ræ

ſtæ mathematicam nil conferunt. Sufficit enim detegi methodos, per quas ea in poteſtate noſtra conſtituitur, quam primum hypotheſes naturæ innotuerunt. Quid quod ſolutiones problematum, in alienis hypotheſibus factæ, conducant ad illas inveſtigandas; quatenus ad experimenta ducunt, de quibus alias non cogitare daretur. Quoniam principia Philoſophiæ naturalis mathematica cognitioni naturæ mathematicæ inſervire debent; rigoroſe loquendo talia non ſunt, niſi quæ hypotheſibus naturæ nituntur. Et ſi certam deſideres cognitionem, hypotheſes naturæ evinci debent, ne de earum veritate ullum ſuperſit dubium. Quoniam tamen indirecte ad cognitionem naturæ mathematicam proſunt, quæ ex alienis quoque hypotheſibus ducuntur, quemadmodum modo annotavimus; & in Phyſicam quoque admittuntur hypotheſes philoſophicæ, etſi nondum certæ, probabilitate tamen non deſtitutæ, quatenus ad veritatem liquidam inveniendam viam ſternunt (§. 127 *Diſc. præl.*); ſit ita, quod non ingredi debeant, tanquam principia, demonſtrationem propoſitionum, quæ in Phyſicam tanquam dogmata admittuntur (§. 128 *Diſc. præl.*); imprudens reprehenderit, quod principia Philoſophiæ naturalis mathematica dicantur, quæ ex hypotheſibus alienis, & ex aliis, quas naturæ hypotheſes eſſe nondum certo conſtant, deducuntur. Ecquis propterea invideret titulum *Principiorum Philoſophiæ naturalis mathematicorum* celebratiſſimo operi Viri ſummi ISAACI NEWTONI; quo magno ſuo merito tantam nominis celebritatem conſecutus? Cauti tamen ac circumſpecti eſſe debemus; ne quæ, ob uſum quem indirecte habent, principia Philoſophiæ naturalis mathematica tolerando ſenſu dicuntur, pro principiis proprie ac rigoroſe dictis habeantur: hoc enim cederet in detrimentum ſcientiæ philoſophicæ. Nemo igitur Philoſophus probaverit, ſi qui hypotheſes *Newtonianas*, eas præſertim, quibus nonniſi in Matheſi locus conceditur, pro principiis Philoſophiæ naturalis ſumunt, & neſcio quam Philoſophiam *Newtonianam* exſculpunt; non modo Phyſicam cum Philoſophia, hoc eſt, cum genere ſpeciem, verum etiam cognitionem mathematicam cum philoſophica confundentes. Etſi in Virorum magnorum meritis extollendis liberales ſimus; non tamen eorum laudes in præjudicium veritatis producimus: id quod ne quidem in adulatore ferendum. Valet hic quam maxime tritiſſimum illud; Amicus Socrates, amicus Plato, amicus Ariſtoteles, ſed magis amica veritas. Ceterum notandum eſt, inter hypotheſes alienas & hypotheſes naturæ, dari genus quoddam earum intermedium, quæ non invita experientia, ob commoditatem praxeos, in locum

hypothesium naturæ assumi possunt, immo debent; ne præter necessitatem difficultatibus praxin immergas, quam simplicem ac expeditam esse oportet; & quas adeo convenienter admodum *Vicarias* dixeris. Exemplum habemus in motu gravium. Cum gravia vi gravitatis ferantur ad centrum terræ, in motu projectorum directiones sunt convergentes, utpote in centro Terræ concurrentes. Hypothesis adeo directionum convergentium, naturæ hypothesis est. Hoc tamen non obstante, recte cum GALILÆO in ejus locum surrogatur hypothesis directionum parallelarum; propterea quod in iis distantiis, in quibus experimenta sumere licet, lineæ convergentes pro parallelis citra errorem assignabilem, in praxi inde metuendum, haberi possunt. Referendæ sunt hypotheses istæ vicariæ ad ea, quæ sunt toleranter vera; & quorum plurima in Mathesi occurrunt exempla, ex ea in Philosophiam minime inferenda.

§. 258. Quoniam in rerum natura nulla nisi motu contingit mutatio; Mechanica vero motus scientia est; ad quam etiam recte refertur status æquilibrii, quo sublato, oritur motus; dubium superesse potest nullum, quod Mechanicæ principia in explicandis naturæ phænomenis usum habeant. Quamobrem qui in usum Physicæ Mechanicam addiscit; definitiones ac theoremata de motu, & æquilibrio solidorum, cognita atque perspecta sibi reddere debet. Quodsi demonstrationes difficiliores videantur, quam ut eas capere possit; vel si tantum temporis impendere nolit, quantum iis percipiendis sufficit; satis erit, si historicam saltem cognitionem sibi acquisiverit, in eo cognitionis gradu acquiescens, quem supra primum diximus. Quando enim principia mechanica in Physica applicantur, non attenta demonstratione, sumuntur tanquam vera; adeoque quoad applicationem perinde est, sive demonstrationem animo comprehenderis, sive eam non attigeris. Absit autem, ut quis sibi persuadeat, nos Philosophum a demonstrationibus mathematicis arcere velle; quas non modo necessarias agnoscimus, ne sine convictione tanquam verum sumas, quod ad reddendam rationem phænomenorum naturæ applicas, consequenter ut certa tibi sit rerum naturalium cognitio; verum etiam quia habitus demonstrandi, omni modo perficiendus, ad recte philosophandum in Physica conducit; immo nec in eadem demonstrationibus geometricis semper supersedere licet, etsi cognitionem mathematicam a philosophica separaveris. Ceterum non inutile est præcipua theoremata mechanica, in eorum gratiam qui demonstrationes capere, vel non possunt, vel nolunt, experimentis comprobari; ut veritatem a posteriori agnoscant, quam a priori agnoscere minime valent: id quod in Physica tanto

tanto magis ſatisfacit, quanto plura in eadem aſſumenda ſunt, nonniſi experientiæ fide. Proſunt autem experimenta mechanica etiam Mathematicis, ut conſtet de rationis cum experientia conſenſu, tantoque magis exploratum ſit, quod ratiocinando veritatem fuerint aſſecuti. Eadem commendanda ſunt iis, qui ſolam praxin Mechanicæ curant, ne in reddendis rationibus ſumere teneantur, ſola autoritate aliena confiſi, quæ nullo modo vera perſpiciunt.

§. 259. Qui ad Matheſin ſublimiorem adſpirant, iis imprimis commendanda ſunt, quæ in capite primo, uſque ad decimum quartum incluſive, leguntur. Etenim iis familiaria eſſe debent theoremata de motu, quemadmodum theoremata de ratione quantitatum, & theoremata Geometriæ elementaris familiaria experiri debet, qui in Matheſi inoffenſo pede progredi voluerit. Dedimus præterea problematum phyſico-mechanicorum ſolutiones, quæ Analyſeos applicationem inſinuant, qualis in Matheſi ſublimiori requiritur; ut adeo artem doceamus per exempla, quemadmodum in Algebra fecimus. Quemadmodum adeo, cum de ſtudio Algebræ ageremus, docuimus quomodo annotanda ſint artificia in futurum uſum, & hinc inde memoriæ infigenda theoremata, quæ analytice eruuntur; ita utrumque etiam quoad problemata in Mechanica ſoluta notandum. Prolixum nimis foret, ſi eadem induſtria, qua in explicando Algebræ ſtudio uſi ſumus, hic quoque ſingula perluſtrare vellemus. Quamobrem hoc propriæ lectoris ad ſuperiora ſatis attenti meditationi relinquimus.

§. 260. Denique demonſtrationes ſyntheticas analyticis miſcuimus; cum ad utrumque genus præparare voluerimus lectorem noſtrum. In demonſtrationibus autem ſyntheticis accuratam ſervavimus formam, quam vi regularum logicarum habere debent: id quod facile experietur, qui eaſdem eodem modo reſolvere voluerit, quo ſupra geometricas reſolvere docuimus. Propoſuimus quoque demonſtrationes completas, ne quid divinandum lectori relinquatur; quemadmodum faciunt qui peritis ſcribunt; ac ideo citamus, quæcunque ex Arithmetica & Geometria elementari ſumuntur; ne a ſtudio Mechanicæ arceantur, qui Matheſin puram nondum adeo familiarem experiuntur, ut per ſe aſſequantur, quæ ex anterioribus ſupponuntur. Ac idem obſervamus in problematum analytica reſolutione; ne quid deſit, quod ad facilitandum eorum intellectum conducere poſſit. Neque enim hoc pacto ſolum conſequimur, ut lector noſtrorum Elementorum, abſque multo laboris ac temporis diſpendio, addiſcat quæ diſcenda ſunt; verum etiam ut meditationibus conſummatis adſueſcat, quibus in Philoſophia, & ſuperioribus, quæ dicuntur, Facultatibus opus habet.

CAPUT VI.

De Studio Hydrostaticæ, Aërometriæ & Hydraulicæ.

§. 261. Hydrostatica tota cognitu utilis iis, qui praxi Mechanicæ student. Sufficit autem iisdem primus cognitionis gradus. Enimvero ne sensus theorematum videatur obscurus, singula exemplis numericis illustranda. Ex. gr. Theorema 14, §. 55, hujus tenoris est: *Corpus specifice gravius, in fluido leviori, eam ponderis sui partem amittit, quantum est pondus fluidi sub eodem volumine.* Ponatur itaque corpus specifice gravius, quod aquæ immergitur, esse cubum, cujus latus unius pedis. Cum juxta MORLANDUM (§. 65) pes cubicus aquæ sit 70 librarum, cum 2 unciis; quodlibet corpus, aqua specifice gravius, amittet pondus 70 librarum & 2 unciarum. Quodsi ergo totum pondus fuerit 100 librarum; intra aquam suspensum non erit nisi 29 librarum, 14 unciarum. Siquidem veritatem principiorum hydrostaticorum a posteriori cognoscere volueris; facillime singula experimentis comprobari possunt, qualia descripsi Tomo primo Experimentorum idiomate patrio evulgatorum. Theoremata, quæ capite primo de corporum gravitate & levitate specifica leguntur, solis exemplis numericis illustrari sufficit. Ex. gr. Theorema 1, §. 17, tale est: *Si duo corpora eandem densitatem habuerint; massæ sunt ut volumina.* Sumamus adeo duos dari globos plumbeos, quorum unus 5, alter 9 librarum. Quoniam massæ, seu quantitates materiæ, æstimantur pondere, quemadmodum in vulgus notum est; erunt etiam volumina, seu magnitudines horum globorum, ut 5 ad 9; nempe si magnitudo minoris divisa concipiatur in partes quinque æquales, istiusmodi partium 9 erit magnitudo majoris. Quodsi ergo magnitudo unius constiterit in mensura absoluta, veluti si detur in digitis cubicis Rhenanis; per regulam trium invenietur in eadem mensura alteræ. Istiusmodi exempla simul ostendunt theorematum usum, quem facere possunt, qui praxi operam dant. Erunt autem tanto utiliora, & tanto certiorem spondent usum in praxi, si fuerint vera, numeris per experimenta definitis.

§. 262. Multum quoque usum habet Hydrostatica in Philosophia naturali; cum multorum phænomenorum inde reddatur ratio. Quamobrem si quis Mathematum imperitus ad Physicam accedit, principiorum tamen hydrostaticorum ignarus esse

esse non debet. Consultum igitur est, ut primum saltem cognitionis gradum acquirat, eadem observans, quæ modo præcepimus (§. 258). Inprimis autem qui Physicæ operam navare decrevit, principia hydrostatica, experimentorum fide, tanquam vera amplecti, sibique familiaria reddere debet. Experimenta huc facientia dabimus suo loco, quando ordo in Philosophia nos ad experimenta physica describenda, & principia quæ in scientia naturali usui sunt, inde stabilienda deducet. Quinam vero sit horum principiorum in Philosophia naturali usus, suo patebit loco, ubi eandem eadem methodo trademus, qua hactenus in Metaphysica usi sumus, & nunc in Philosophia practica utimur. Quodsi quis in omni Mathesi fuerit prorsus peregrinus ac hospes, historicam tamen propositionum hydrostaticarum cognitionem acquirere valet, observans ea quæ de primo cognitionis gradu supra, capite primo docuimus, & breviter præcedente paragrapho annotavimus; modo sibi terminos quosdam perspectos reddat: id quod facile fieri poterit, si indicis auxilio evolvat definitiones, quibus explicantur; veluti quid sibi velit ratio composita, quid directa, quid reciproca, qui termini in Arithmetica explicantur. Sane etiam Mathematum imperitus terminis tamen mathematicis uti debet, quoties aliis verbis mentem suam commode exprimere non licet, seu quoties loquendum de iis quæ ad objectum Mathematicorum spectant; quemadmodum Physicus terminis Medicorum utitur, si de rebus ad Medicinam pertinentibus ipsi dicendum. Qui enim de re quadam loqui vult, nosse quoque debet nomen ejus.

§. 263. Equidem demonstrationes hydrostaticæ nihil prorsus habent difficultatis; præsertim si quis in anterioribus, multo difficilioribus, jam fuerit versatus; negandum tamen non est, quod, cum subsidio figurarum destituamur, quæ imaginationem juvant, termini generales, quibus hic utimur, eas reddant captu difficiliores, quemadmodum ipsas propositiones intellectu. Consultum igitur est, ut demonstratio applicetur ad casum particularem, quemadmodum fecimus in theoremate 14, §. 55, ubi pro corpore specifice graviori sumsimus cubum pollicarem plumbeum, pro fluido leviori aquam; adeoque pro volumine cubum pollicarem seu digitum cubicum. Hoc pacto enim idea imaginationi suggeritur, qualem in Geometria sistit figura. Immo si ita visum fuerit, schema quoque delineari potest, quod cubum intra aquam in vase vitreo suspensum repræsentat. Neque vero verendum est, demonstrationibus hoc pacto detrahi suam universalitatem, & probato casu particulari, argumentando a particulari ad universale, colligi veritatem theorematis univer-

ſaliter enunciati. Etſi enim idea, ad quam dirigitur demonſtratio, repræſentet caſum maxime particularem; cum tamen in demonſtrando non ſumamus niſi univerſalia, quæ inſunt, ut eodem ſucceſſu particulare quodcunque aliud in illius locum ſurrogari poſſit; quod ex univerſalibus concluditur utique univerſale eſt. Sane in Geometria quoque, figura ad quam refertur demonſtratio, ſingulare quid eſt, cujus idea particulare refert, v. gr. triangulum, cujus anguli ſunt datæ magnitudinis, & latera in data quadam ratione. Enimvero cum non ex particulari, ſed univerſali, quod ideæ ineſt, procedat demonſtratio; univerſalitati non officit, quod, dum intellectus concipit univerſale, in imaginatione hæret idea quædam ſingularis, quæ caſum quendam particularem repræſentat, quoad ea quæ ipſius vi facile diſtinguuntur, nudo reflexionis actu accedente. Quamdiu in ratiocinando nonniſi vocabulis utimur, univerſalia ab imaginibus ſeparare non licet; quippe quæ non intelliguntur, niſi quatenus univerſalia in ſingularibus, ſeu imaginibus, intuemur. Hæc ſatis aperta ſunt iis, qui in Pſychologia noſtra fuerunt verſati. Ceterum eodem artificio utendum eſt in Phyſica, ſiquidem demonſtrationes facilitare volueris, quales hactenus dare neglexerunt Phyſici. Etſi enim hoc intenderit HONORATUS FABRY, qui in præfatione methodum ſibi optime perſpectam, immo tritam affirmat; ſi tamen in iis, quæ mathematica non ſunt, prætenſas demonſtrationes examines; quantum diſſideant a genuina earum forma, ſuperiorum gnarus facile deprehendet. Eidem quoque artificio locus eſt in ipſa Philoſophia practica, ſi caſum theorematis, vel problematis, exemplo quodam, ſive vero, ſive ficto, explices, quod imaginem quandam imaginationi præſentem ſiſtit; & ad idem demonſtrationem referas, quemadmodum in Geometria ad figuras; quatenus nempe in imagine, quæ exemplum repræſentat, attentionem non dirigis niſi ad univerſalia, quæ hypotheſis theorematis vel reſolutio problematis continet. Immo in ipſis Metaphyſicis idem imitari licet; quidni debemus? quamdiu deſideratur Characteriſtica generalis, vi cujus notiones abſtractæ qualitatum ab imaginibus ſeparantur, & calculus qualitatum a calculo magnitudinum utique diverſus, quem literalem vulgo vocamus, ut characterum combinationes in locum ratiociniorum ſuccedant. In hiſce enim continetur Algebra philoſophica, cujus aliam prorſus ideam ſibi finxit ROBERTUS HOOKE in Poſthumis, & quam ſpecioſam generalem appellavit LEIBNITIUS. Sed de hac dixi, quæ ſufficiunt, ut intelligantur termini, in Pſychologia empirica.

§. 264. Elementa Aërometriæ eo fine conſcripſimus, ut ſpecimine quodam

dam non admodum difficili doceremus, quomodo Mathesis ad experimenta applicetur; & ideam quandam cognitionis mathematicæ in Scientia naturali animo legentium insinuaremus; simulque usum Algebræ in Physica, exemplis non nimis difficilibus, demonstraremus. Cum postea Elementa Matheseos universæ ederemus, Aërometriam in numerum disciplinarum mathematicarum referre nulli dubitavimus; præsertim quia principiis ejus opus habemus in Hydraulica, quæ dudum inter disciplinas mathematicas locum obtinuit. Eodem nimirum jure, quo Hydrostatica, & Mechanica, immo etiam Optica, pro partibus Matheseos habentur; Aërometria quoque pars ejusdem habetur. Quamobrem facile patet, hanc Matheseos partem inprimis commendandam esse iis, qui Scientiæ naturali operam navare decreverunt; maxime ubi in cognitione philosophica subsistere non voluerint, sed ad mathematicam ascendendi animum habuerint. Supponit autem Hydrostaticam, cujus principia ad aërem, tanquam fluidum grave applicantur. Quamobrem illi studere ante debes, quam ad Aërometriam accedas. Supponuntur etiam pauca ex Mechanica, quemadmodum ex citationibus videre est. Etsi autem Aërometria potissimum ad cognitionem naturæ mathematicam manuducit tyrones; in genere tamen docet, quomodo Physica methodo demonstrativa tractari debeat; quatenus in ea etiam continentur, quæ, absque principiis mathematicis demonstrantur. Discimus præterea ex ea, quamvis in reliqua Philosophia cognitio philosophica a mathematica separari possit, in Physica tamen, nisi certitudini deesse velis, fieri non posse, quin subinde nonnulla ex principiis mathematicis demonstrentur.

§. 265. Quibus sola praxis satisfacit, illis inservient problemata de antliæ pneumaticæ, barometrorum, thermometrorum, & hygroscopiorum constructionibus, una cum scholiis, quibus horum instrumentorum usus dilucidatur. Non tamen negligenda sunt theoremata & corollaria, quibus tum fabrica, tum usus istorum instrumentorum perfectius intelligitur. Definitiones quoque expendendas esse per se patet. Cum in Elementis Matheseos Germanicis ea potissimum tradiderimus, quæ ad praxin faciunt, etsi oculatam, non omissis scilicet demonstrationibus; ex Aërometriæ quoque Elementis ea excerpsimus, quæ praxin propius respiciunt, & ad theoriam uberiorem præparant lectorem ex Latinis deinceps hauriendam.

§. 266. Inprimis autem Aërometria inservire potest illis, qui ad tertium cognitionis gradum contendunt. Si enim animum ad ea attendunt, quæ sunt methodi; ideam quandam exemplarem applicationis Matheseos puræ, Algebræ præsertim, ad experi-

perimenta & observationes inde haurient; ut in cognitione rerum naturalium certo tramite progrediantur. Multo enim clarius etiam tyrones hinc perspiciunt utilitatem cognitionis mathematicæ, tum ad certitudinem in Scientia naturali consequendam, tum ad praxin accuratissime exercendam, quam ex sublimibus istis problematis Physico-mechanicis, qualia in Mechanica complura explicavimus. Quamobrem cum pauca sint, quæ ex mechanicis in Hydrostatica & Aërometria sumuntur, demonstrandi principia, non inconsultum erit, si qui ex Mechanica tantummodo principium de æquilibrio solidorum perspexerunt, sepositis ceteris, ad Hydrostaticam & Aërometriam statim se conferant. Quodsi enim, in hisce disciplinis intellectu non adeo difficilibus, applicationem Matheseos puræ, & Algebræ inprimis, ad Naturæ cognitionem didicerint; minus difficultatis experientur in sublimioribus, quæ in Mechanica traduntur. Non est quod objicias, Elementa Matheseos cum sint in tyronum gratiam conscripta, ut scientiam inde hauriant, in iis quoque faciliora difficilioribus fuisse præmittenda, adeoque Elementa Hydrostaticæ & Aërometriæ Elementis Mechanicæ fuisse anteponenda. Etenim methodus studendi non per omnia consentit cum methodo tradendi disciplinas, & eas sibi mutuo subordinandi, atque in singulis veritati unicuique locum suum assignandi. Nimirum qui in scientiis operam navat a facilioribus incipit, & inde continuo ad difficiliora progreditur; quam legem præscribit methodus studendi. Ast disciplinæ integræ, & in iis veritates singulæ eo ordine collocandæ, ut sequentia ex antecedentibus intelligi & demonstrari possint. Non autem semper contingit ut disciplina, quæ continet intellectu faciliora, non dependeat ab alia, in qua occurrunt multo difficiliora. Unde methodo studendi convenit, ut difficilia initio seponantur, & ad faciliora properetur. Immo hac de causa, in gratiam primorum tyronum, conscribuntur compendia; in quibus nonnisi facillima & scitu maxime necessaria continentur; ut animum imbuant principiis, & ad profundiora haurienda præparent. Memini me olim cum disciplinis operam navarem, iis quæ captu difficilia videbantur non immoratum fuisse, sed ad sequentia progressum, si vel maxime eorum veritas ab istis penderet: quando enim postea, sequentibus intellectis, ea denuo expendebam, sine ulla mora obvium erat, quod antea impervium videbatur. Nec ignoro rationes, cur hoc contigerit, quippe quas Psychologia suppeditat, quas tamen hic commemorari parum refert. Absit itaque, ut, ubi quædam a te percipi non posse tibi videtur, de viribus tuis desperans, efficiaris studii desertor.

Nocet

Nocet non minus desperatio, quam nimia de viribus suis confidentia; nec ardor sciendi, qui accendere debet cupiditatem discendi, producendus in nocumentum.

§. 267. Hydraulica olim machinarum hydraulicarum & fontium salientium constructione tota absolvebatur, atque adeo non erat nisi pars Matheseos practicæ. Enimvero, postquam theoria Mechanicæ ad omnem motum solidorum fuit extensa; in Hydraulica quoque in motum fluidorum inquirere cœperunt Geometræ. Unde hæc Matheseos pars longe aliam induit formam; qua etiam sese commendat Theoristis, quibus nauseam movet praxis; ne quid commune habere videantur cum hominibus, quibus natura manus loco ingenii dedisse censetur. Nos & theoriam, & praxin æstimamus; quamvis non eodem, sed suo unamquamque pretio, ut utrique suus habeatur honor. Quamobrem in Hydraulica quoque praxin cum theoria copulavimus, nec hanc illa dehonestari opinamur. Etsi enim Mathematicus, Geometra præsertim profundus, qui arduis meditationibus sufficit, longo intervallo post se relinquat machinarum fabrum, & hic perperam pro Mathematico habeatur; non tamen ideo praxis contemnenda; quin potius Geometra profundis suis meditationibus hunc fructum deberi agnoscere debet, ut illa perficiatur. Ex Hydraulica facillime perspicere licet, quod auxilio Geometrarum indigeant, qui praxi operam navant. Exempli loco esto determinatio situs alarum molendini vi venti agitandi (§. 316 *& seqq. Hydraul.*). Quodsi non deessent, qui inventa Geometrarum profunda ad praxin communem aptarent, illud adhuc magis pateret. Dolendum vero, quod nemo ea de re cogitare velit.

§. 268. Qui soli praxi operam navant, iis sufficit, ut distincta notione constructionem machinarum hydraulicarum & fontium salientium animo concipiant. Non tamen inconsultum est, ut theoremata quoque, sive synthetice demonstrata, sive analytice investigata, percurrant; visuri num in iis quid contineatur, quod praxin juvet. Idem quoque facere tenentur, ubi praxin desiderant oculatam, hoc est, rationem quandam eorum perspicere volunt, quæ faciunt; ne subinde cœcutientes in praxi aberrent. Exemplum illustre habemus in siphonibus, quos aquis per montium vertices in oppositam planitiem deducendis sufficere existimarunt, qui causam ascensus in crure breviori ignorarunt (§. 68 *Hydraul.*). Istiusmodi exemplis convincendi sunt, qui theoriam omnem contemnunt, quantum sibi noceant, si ne historicam quidem ejus notitiam sibi comparare velint. Quamobrem in genere suademus, ne illi, quos praxis juvat, theoriam Matheseos

prorſus negligant, ſed primum cognitionis gradum ſuum eſſe credant. Ipſo nimirum uſu experientur, quænam hinc utilitas in eos ſit redundatura.

§. 269. Theoria non modo Hydraulicæ, verum etiam praxis multa continet, quæ uſui eſſe poſſunt in Phyſica. Quamobrem ſi quis, vel maxime ſe minus aptum ſentiat ad demonſtrationes & reſolutiones analyticas capiendas, qui Scientiæ naturali incumbere decrevit; ei tamen maxime commendanda eſt hiſtorica ſaltem Hydraulicæ cognitio. Enimvero quia in Scientia quoque naturali methodo demonſtrativa utendum, ſi certitudinis metam attingere velis, quantum datur; conſultius omnino eſt, ut demonſtrationes quoque expendat. Et qui Matheſin ad Phyſicam applicare voluerit; ei huic inſtituto non minus inſervire poterit Hydraulica, quam Aërometria; ut, quæ paulo ante de hac dicta ſunt, ad hanc quoque applicanda veniant.

§. 270. Hydraulica autem, ſive theoriam, ſive praxin ſpectes, attentionem eorum meretur, qui ad tertium cognitionis gradum adſpirant. Ubivis enim annotare licet artificia heuriſtica, quibus feliciſſime uſi ſunt, aut uti ſaltem potuerunt inventores veritatum tam theoreticarum, quam practicarum. Cum de Algebræ ſtudio ageremus, ad nauſeam forſan inculcavimus, qua attentione artificia iſta ſint detegenda, ut in caſu ſimili poſthac iiſdem utaris. Quamobrem nolumus hic ad particularia deſcendere; ſed nobis ſufficit monito generali excitaſſe attentionem, quam afferre debent, qui Artem inveniendi curæ cordique habent. Ne tamen quis exiſtimet, laudari artificia, quæ in Hydraulica non reperiuntur, ſingularia; exempli loco ad unum provocare licet; nimirum quo ad menſuram reducuntur, quæ menſuram reſpuere videntur. Obtinet hoc in doctrina de curſu fluminum; ubi, cum aqua omnis per totam ſectionem non eadem celeritate fluit, aquæ per candem fluenti tribuitur celeritas quædam media, qua ſi per totam ſectionem flueret, eodem tempore tantundem per eam effunderetur, quantum celeritate inæquali per eandem fertur; & quomodo media iſta celeritas inveniri poſſit docetur. Ceterum ex ſuperioribus abunde conſtat, nos ubique in ſtudio Matheſeos urgere diſtinctam eorum cognitionem, quæ actu reflexo intellectus detegenda præcipimus; cum id maxime conducat ad recte philoſophandum: quem finem intendimus, dum in ſtudio Matheſeos, intellectus perficiendi cauſa, verſamur.

CAPUT

CAPUT VII.

De Studio Opticæ, Perspectivæ, Catoptricæ & Dioptricæ.

§. 271. IN Optica strictiori sensu sumta pauca occurrunt, quæ ad praxin faciunt. Præter ea enim, quæ de camera obscura (§. 79 *Opt.*) & de quadrato geometrico ejusque usu (§. 172 *& seqq. Opt.*) & tessellatis imaginibus construendis (§. 312 *Opt.*) docentur, nonnisi problemata nonnulla de magnitudine visa *cap.* 5. & theoremata nonnulla de lumine Solis per foramen angustum radiante *cap.* 6, praxin directe respiciunt. Palmaria praxis Opticæ directæ in Perspectiva continetur. Quoniam tamen indirecte omnia, quæ de visu demonstrantur, usui esse possunt, qui praxi catoptrica & dioptrica delectantur, & quos exercitia Perspectivæ juvant; non male sibi consulunt, qui, si non omnium, præcipuorum tamen theorematum opticorum cognitionem historicam acquirere student.

§. 272. Qui ad Physicam animum appellunt, iis studium Opticæ maximopere commendandum. Non tamen sufficit nuda ejus cognitio historica, quam iis commendavimus, qui praxi student (§. 271); sed requiritur scientifica, quæ non sine accurata demonstrationum evolutione acquiritur. Visus phænomenon naturæ est; ad objectum adeo Physicæ, rerum naturalium scientiam, referendum. Nec minus lumen, umbra, & colores ad idem spectant, quæ hic tanquam visibilia considerantur. Etsi enim, in Mathesi, potissimum ratio habeatur cognitionis mathematicæ; ut tamen hæc in potestate sit, multa declarantur, quæ explicare Physici est; quemadmodum & modum visionis Physicus explicare debet. Quodsi ergo, in Optica, ea animi attentione utaris, quam hactenus in ceteris disciplinis mathematicis commendavimus; ex hac Matheseos parte discere licebit, quomodo res naturales sint explicandæ, ut certam earum cognitionem acquiras. Dum vero Geometria elementaris applicatur ad phænomena visus accurate determinanda; Optica prima & facillima cognitionis mathematicæ rerum naturalium exempla exhibet. Quamobrem si quis nullam adhuc hujus cognitionis habeat ideam, is omnium facillime ex Optica eandem hauriet. Unde suademus, ut, quamprimum principiis Arithmeticæ, Geometriæ elementaris, ac Trigonometriæ planæ imbutum habet animum, ad lectionem Opticæ accedat, intellectu multo faciliorem, quam Mechanica, Hy-

drostatica, Aërometria, & Hydraulica, ac præterea jucunditate sua animum lectoris in se trahentem. Accedit quod ex Optica etiam innotescant fallaciæ visus, a quibus sibi cavere debet Naturæ scrutator, ab observationibus inquisitionem omnem exordiens.

§. 273. Cum Perspectiva sit praxis Opticæ directæ, qua docetur delineatio objecti cujuslibet in tabula, quale, ad datam distantiam, & in data altitudine oculi, super tabula transparente inter ipsum & objectum ad horizontem perpendiculariter erecta, apparet (§. 1 *Perspect.*); qui solam praxin curant, schemata juxta ea, quæ in singulis problematis præcipiuntur, delineare, & deinceps in aliis figuris delineandis imitari debent. Quodsi quis in Architectura fuerit versatus, exempla quoque inde petere potest, ac debet. Exercitia hæc facilitabis, si Anonymi Galli *Perspectivam practicam*, cujus supra in recensione Autorum c. 8, §. 23 mentionem injecimus, in subsidium adhibeas, & deinde exempla ex ANDREÆ PUTEI *Architectura Pictorum & Sculptorum* (§. 24 *cap. cit.*) petas. Satisfacient ubivis regulæ, quas dedimus. Hic labor continuandus, donec habitum consequaris. Nemo autem non videt, Artem pictoriam cum praxi Perspectivæ esse conjungendam. Hæc enim ad illam perficiendam unice tendit. Qui vero nonnisi scientiam expetunt, iis sufficit demonstrationes praxium percepisse, quas in usum potissimum Philosophorum addidimus; quorum cum sit rationem reddere eorum quæ sunt atque fiunt, rationem quoque perspicere debent delineationum objecti cujuscunque juxta regulas Perspectivæ factarum. Qui tertium cognitionis gradum intendunt, iis notandum est artificium, quo tota Perspectiva in potestatem Geometræ redacta (§. 2 *Perspect.*), & praxin mechanicam eodem fundamento nixam, quam problemate primo exposuimus, conferant cum regulis geometricis, quæ in sequentibus problematis exponuntur; ut applicatione Geometriæ praxis perficiatur, & certa scientia eorum acquiratur, quæ nonnisi confuse percipiuntur. Eodem fine conducunt, quæ de anamorphosibus capite ultimo proponuntur.

§. 274. Catoptrica phænomena visionis reflexæ demonstrat, quæ fit ope speculorum. Specula communissima sunt plana, quorum ideo usus ceteris præfertur, quia objectum ea forma & magnitudine spectandum exhibent, quale & quantum est; ut adeo teipsum videre ac contemplari possis. Visio reflexa variat pro diversitate superficiei reflectentis: unde alia sunt speculorum planorum, alia concavorum, alia convexorum, alia ex hisce compositorum phænomena. Cumque figuræ concavæ ac convexæ in infinitum varient, phænomena quoque in infinitum variare debent.

debent. Artifices hactenus parare nequeunt nisi specula plana, convexa sphærica, cylindrica, & conica, concava sphærica, & cylindrica; prismatica enim & pyramidalia ex planis componuntur. Quamobrem contenti sumus horum speculorum phænomena demonstrasse, quæ ante experientia innotuisse, quam via demonstrationis in eadem inquisiverint Mathematici, facile largior. Fuere tamen artifices, qui specula parabolica conficere conati sunt. Unde horum quoque mentionem quandam injicere voluimus. Etsi autem specula plana sint quotidiani usus, ex eorum tamen combinatione, pro diverso ad se invicem situ, inexpectata prorsus prodeunt phænomena; quæ non modo delectant, sed ignaros quoque in admirationem rapiunt, non sine delectationis incremento. Inserviunt etiam variis technasmatis specula cetera; quæ, etsi ad delectandum fuerint excogitata, seriis tamen inserviunt meditationibus Philosophi, quippe naturam imitantis, quæ serio agere solet, etiam dum pueri ludunt. Quamobrem nec piguit technasmata ista variis speciminibus illustrare. Et quoniam in omni Mathesi praxin cum theoria conjunximus, idem quoque fecimus in Catoptrica. Qua de causa, non modo explicavimus technasmata, quæ ex theoria Catoptricæ demonstrantur, & adeo a priori deducuntur; verum etiam modum specula conficiendi: neque enim solum dedecet Mathematicum ignorare, qua arte prodeant specula, quorum phænomena demonstrat, etsi in demonstrationibus sumere possit ac debeat speculorum figuram; verum etiam hoc nosse utile est, ubi theoremata a se demonstrata per experientiam ad examen revocare voluerit. Quoniam nimirum in demonstrationibus suis supponit in rigore geometrico figuras speculorum; si de consensu demonstrationum & experimentorum judicium exactum ferre voluerit, nosse utique debet, ad quam perfectionem ars perducta fuerit, & num ea perfectionem ulteriorem recipere queat. In Mathesi mixta plurimum tribuimus connubio experientiæ ac rationis; quo consensus experimentorum & demonstrationum innotescit, & quod tantopere commendamus per universam Scientiam naturalem. Nihil adeo prætermittendum erat, quod eo ducere poterat.

§. 275. Qui adeo solam praxin amant, illis satisfacient problemata, prætermissis demonstrationibus. Non tamen prætermittere debent theoremata, cum historica eorundem cognitio æquipolleat recensioni phænomenorum: si qua enim sunt, quæ nonnisi in usum demonstrandorum aliorum afferuntur, ea facile a ceteris distinguent. Nimirum consultum est, ut theoremata experimentis subjiciant; ne omni prorsus certitudine destituatur cognitio: tumque

pate-

patebit, quænam ſint ea, quorum cognitio ſcitu neceſſaria ac utilis, etiam iis quos ſola praxis juvat. Quid quod in numero quoque theorematum ſint haud pauca, quibus in praxi locus eſt, aut quæ ad praxes transferri poſſunt. Exempli loco eſſe poteſt theorema 11, §. 71, vi cujus §. 73, exhibetur globus deſcendens in plano inclinato tanquam aſcendens in verticali. Catoptrica praxi abundat, atque hoc nomine ſeſe commendat omnibus, quotquot eandem amant, iis præſertim qui quærunt, quod delectat.

§. 276. Inter ſpecula inprimis ſeſe commendant ſphærica concava; non ſolum propter phænomenorum prorſus ſingularium raritatem; verum etiam quod ſint cauſtica, ſeu uſtoria, & lumini intendendo inſerviant. Specula cauſtica præſertim majora uſum habent in experimentis phyſicis, qualia deſcribuntur in ſchol. 4, probl. 22, §. 221, immo phænomena omnia viſionis reflexæ argumentum phyſicum ſunt, quorum adeo rationes Phyſicus reddere tenetur, etiamſi geometricas inſuper habeat demonſtrationes. Phyſicus phænomena ſumit tanquam a poſteriori cognita, & eorum rationem reddit. Mathematicus illa demonſtrat, ex ſuppoſita ſpeculi figura; vi legis reflexionis, ea deducens a priori, tanquam incognita ex cognitis. Atque adeo diverſo prorſus modo ſuo funguntur munere: quod dum uterque facit, manifeſta eſt differentia, quæ inter cognitionem philoſophicam & mathematicam, hac in parte, intercedit. Ut autem certius conſtet Phyſico, quid ſumere liceat, theoremata & technaſmata catoptrica eum docent. Quemadmodum autem Optica patefacit fallacias viſus circa viſionem directam, quas utiliter cognoſcit Phyſicus, immo Philoſophus in aliis quoque Philoſophiæ partibus; ita Catoptrica revelat fallacias viſus circa viſionem reflexam, non minore utilitate agnoſcendas. Atque adeo patet, quomodo in ſtudio Catoptricæ verſari debeat Philoſophus, qui ab omni cognitione mathematica alienum habet animum: quem etſi non probemus, tolerandum tamen cenſemus, pro diverſitate ingenii humani; quantum abſque detrimento ſcientiæ fieri poteſt. Ceterum quæ de cognitione mathematica quoad viſionem directam modo annotavimus (§. 272); ea etiam de eadem quoad reflexam notanda veniunt.

§. 277. E re eſſe videtur, ut præjudicio occurramus, quo nonnulli ſibi mirifice placent, & cui alii applaudunt, quaſi ſingulare quoddam acumen proderet. Diximus paulo ante (§. 274), nos facile largiri, quod phænomena ſpeculorum innotuerint a poſteriori, antequam de iis a priori demonſtrandis cogitarent Mathematici. Non adeo dubito fore haud paucos, qui contendent demonſtrationes mathematicas ſuperfluas

fluas esse; immo qui hinc inferent inventa, quæ in Mathesi mixta celebrantur, deberi artificibus; a quibus postquam inventa fuerant, ea demum demonstrare conati sunt Mathematici, inventionis tamen gloria inter alios eruditos eminere gestientes. Memini hoc argumento arrogantiam Mathematicorum redarguere voluisse CLERICUM, cum HERMANNI Phoronomiam recenseret. Qua de causa desiderabat, ut Geometra præclarus significaret, quantum Scientia naturalis, & Ars facta sit locupletior, postquam abstrusas istas theorias orbi literato in opere suo propinasset. Artifices enim pro inventoribus habebat; Mathematicos vero demonstratores pronunciabat; qui nonnisi in artificum inventis ingenii sui vires exerceant. Non unum est, quod hic repono. Phænomena, ipsi etiam vulgo cognita, sumit Physicus & eorum rationem reddit: non tamen ideo inanis censetur ejus opera; propterea quod illa ante innotuerint quam de rationibus eorundem reddendis cogitavit Physicus. Eccur ergo inanem operam sumere, aut nihil præclari facere dicendus est Mathematicus, qui longe ulterius progressus, phænomena non sumit, sed ex iis, quæ sumi debent, via demonstrationis a priori deducit; ut certa sit etiam ejus cognitio, qui existentiam phænomeni nondum supponit? Notandum præterea est, phænomena haud raro a posteriori non satis determinate cognosci, quæ tamen accuratissime determinantur a Mathematico in suis theorematis. Accedit porro, quod Mathematicus non omnia phænomena jam ante norit, quam ea demonstrat; sed multa potius adhuc ignorata in apricum producat. Denique inventa, quæ haud raro casui debentur, imperfectiora ad majorem perfectionem perducit; aut, siquidem ulteriorem perfectionem non admittunt, ut idem certo constet demonstrat. Quid, quod hinc inde a priori quoque deducat technasmata, quæ tentando nondum fuerunt detecta, aut prorsus non potuissent detegi? Absit autem ut tibi persuadeas ea, quæ casu plerumque aut tentando reperta fuerunt, perficere minoris esse, quam illa reperire. Non semper valet illud pervulgatum: Inventis facile est addere. Inventa nondum æstimare didicit, qui ea aliunde quam ex usu facultatum, cui debentur, æstimat. HUGENIUS, qui horologia singulari pendulorum applicatione perfecit, longo intervallo post se relinquit primum eorundem inventorem; & demonstrationes, quas de tubo optico dedit in *Dioptrica*, multo majorem laudem pariunt, quam fortuita imperfecti inventio. Ut inventa, quæ casui accepta referenda sunt, vel tentaminibus laboriosis, perficiantur, inventis haud raro opus est, non sine summo acumine & maxima ingenii vi eruendis. Plurimum adeo falluntur, inventionis

gloriam non deberi nisi iis, qui primi in quidpiam inciderunt. Sed hæc evidentiora erunt, ubi Ars inveniendi eodem habitu fuerit investita, quo Logicam indutam dudum in scenam produximus; ut ex arte æstimare detur artificem; non vero, quemadmodum nunc plerumque fieri solet, ex eo, quod inventum ejus sit utile, vel quod sit inexpectatum, vel quod aliis fuerit inaccessum, vel quod in admirationem rapiat ignaros & ita porro.

§. 278. Qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, reperient in Catoptrica, sive theoriam spectes, sive praxin, quæ Artem inveniendi illustrant & amplificant; ubi in artificia inquirere voluerint, quibus aditus paratur ad ea, quæ inaccessa videbantur. Neque eum, qui in Physica feliciter progredi voluerit, ubi non minus applicatione Matheseos puræ ad phænomena naturæ, quam connubio experientiæ ac rationis opus est, pigebit eo modo perlustrasse Catoptricam, quem ad tertium cognitionis gradum acquirendum supra præscripsimus, & cum de studio Algebræ ageremus exemplis illustravimus. Quoniam vero nobis quoque propositum est usum Algebræ in Mathesi mixta ostendere; placuit sub finem adjicere Catoptricam analyticam, seu modum investigandi theoremata catoptrica per Analysin. Substitimus autem in iis speculis, quorum antea phænomena demonstravimus, more Veterum; tum ne tyrones universalitate ipsis inutili perplexi reddantur, tum quia solutiones particulares occasionem dedere universalibus in omni curvarum genere. Discentium enim, quibus scribimus, ratio habenda fuit.

§. 279. Erunt forsan, qui, cum viderint, Algebræ beneficio, nullo fere negotio patere, quæ more Veterum non sine multo apparatu demonstrantur; demonstrationes syntheticas inutiles existimabunt, immo prorsus damnabunt. Recolenda animo hic sunt, quæ supra (§. 100 *& seqq.*) monuimus, cum de studio Matheseos intellectus perficiendi causa ageremus; quem inter usus præcipuos referimus studio mathematico tribuendos, & qui multo latius patet quam usus reliquus omnis. Quamobrem qui hac intentione ad studium Matheseos animum appellunt, iis omnino maximopere commendandum, ne demonstrationes syntheticas negligant, etiam in Catoptrica, & demonstrationes catoptricas eadem industria resolvant; ut pateat earum forma in Logica præscripta, qua demonstrationes Geometriæ elementaris resolvi præcepimus; ut non modo idea exemplaris demonstrationis consummatæ, quam in Logica vocamus, reddatur illustrior, magisque indies confirmetur, verum etiam ut habitus juxta eam operandi in omni scientiarum genere perficiatur. Pudeat enim Philosophos, seculo tam illustri, quo scien-

tiæ

tiæ mathematicæ ad tantum fastigium evectæ, diutius in ancipiti hærere, &, dum Mathematici plena luce fruuntur, in tenebris palpitare.

§. 280. Dioptrica praxi multa abundat. Agit enim de visione refracta, cujus multus usus est in spectandis objectis remotis & vicinis exiguæ molis; quorum illa, ob distantiam, hæc vero, ob parvitatem, oculis sese subducunt. Hinc, in hac parte Matheseos mixtæ, præcipue agitur de tubo optico, & microscopio. Tubi non minus optici, quam microscopia, componuntur ex vitris lenticularibus arte parandis. Atque adeo ad praxin dioptricam spectat quoque ars poliendi vitra, quam adeo integro capite accuratissime explicavimus. Quoniam tubus opticus maximam utilitatem affert in observationibus astronomicis, ita ut sine ejus auxilio Astronomia nondum ad eum perfectionis gradum fuisset perducta, ad quem eam hodie evectam cernimus; accurata lentium fabrica ipsis quoque Mathematicis curæ cordique esse debuit. Quamobrem non mirandum, Mathematicos etiam summos, veluti HUGENIUM, vitris poliendis operam dedisse, nec eos piguisse praxin manuariam exercere, etsi in theoria augenda & amplificanda inter paucos eminerent. Ad praxin dioptricam spectant quoque perspicilla, quæ quomodo Myopes & Presbytas juvent in videndis iis ad quæ oculorum acies non pertingit, in vulgus notum est. Dantur denique alia technasmata dioptrica, & catoptrico-dioptrica, qualia nonnulla descripsimus, & plura apud alios, veluti TRABERUM & ZAHNIUM, describuntur: quæ etsi nonnullis magis ludicra quam utilia videantur, & ad delectandum magis quam ad augendam scientiam composita; minime tamen contemnenda sunt. Usum enim præbent in experimentando haud raro prorsus insignem. Exempli loco, provocare licet ad prisma trigonum; quod quantum adjumenti attulerit ad naturam luminis & colorum indagandam, ex præclaro opere Viri summi ISAACI NEWTONI clarissime conspicitur. Inprimis etiam attentionem merentur, quæ (§. 476, 477 *Dioptr.*) de laterna magica in microscopium convertenda, & ad foramen cameræ obscuræ lumine solari directo illustratum applicanda annotavi; in Experimentis autem idiomate patrio descriptis fusius exposui. Novi enim Virum quendam illustrem istiusmodi microscopium parasse, & insignes prorsus ejus effectus, quos ego prædixeram, observasse. Qui adeo praxi operam navant, non modo ea, quæ de poliendis vitris, de construendis telescopiis, microscopiis, aliisque technasmatis larga manu traduntur, probe perpendere tenetur; sed ut oculata sit praxis, theoremata quoque de refractione luminis in lentibus opticis, præsertim de focis earundem, sibi familiaria reddere debent,

bent, etsi demonstrationes insuper habeant. Clarissime omnium ex Dioptrica perspicitur, quam necessaria sit theoria ad praxin; nisi hæc multa imperfectione laborare debeat, nec in eadem committendi errores, qui evitari poterant. Huc igitur velim animum advertant, qui theoriam comtemnere solent. Velim etiam ut ad hæc animum attendant, quorum est theoriam ad praxin aptare; ut ad historicam ejus cognitionem pateat aditus Artis cultoribus ad praxin eandem applicaturis. Optandum enim foret, ut quis omnes theorias, quantumvis profundas, perlustraret, & quæ in Arte usui esse possunt excerpta, sine demonstratione, in usum Artis cultorum, exponeret; experimentis confirmanda, ubi id absque multo apparatu ac sumtu facile fieri potest. Quoniam tamen Geometræ in solvendis problematis physico-mathematicis quædam sumunt, quæ, quod non invita natura sumantur, non demonstrant; atque adeo idem ipsis subinde accidit quod GALILÆO circa resistentiam solidorum, ut ex assumtis recte quidem colligant, quæ inde sequuntur, hæc tamen ab experimento dissentiant, quod illa naturæ rerum minime conveniant; ideo consultum foret, ut in Physica veriori satis versatus in hypotheses Geometrarum accurate inquireret, ea, quæ certa sunt, ab incertis aut prorsus falsis separaturus; ne, dum praxin theoria perficiendi animus est, ea inculcentur, quæ eidem magis obsunt, quam prosunt; & artificum perspicaciorum judicio, cum theoriam fallere videant, hæc tandem magis in contemtum adducatur, quam ut eidem aliquod pretium statuatur. Etsi enim a particulari ad universale non valeat argumentatio, & præcipitantiæ in judicando tribuendum sit, si quis ea utatur; hæc ipsa tamen præcipitantia tanto excusatior est in artifice, qui quoad theoriam aliorum dictis habere debet fidem; consequenter judicium suum determinare nequit, nisi per notiones communes probabilitatis extrinsecæ.

§. 281. In Dioptrica explicatur visio refracta, ac inprimis ostenditur, quomodo refractio fiat in vitris politis. Quamobrem primo omnium loco inquirendum est in legem refractionis: quæ quomodo per experimenta eruatur, primo loco docendum duximus. Equidem hodie, postquam usus telescopiorum & microscopiorum invaluit, potissimum ratio habetur refractionis in vitro factæ; addidimus tamen etiam, quomodo sese habeat in aqua & aëre, propterea quod in Physica major est utilitas legis refractionis in aqua & aëre, quam in vitro factæ. Quamvis vero etiam ostenderimus, quomodo lex refractionis in genere per calculum analyticum eruatur; experimentis tamen supersedere minime possumus, cum ratio sinus anguli inclinationis ad sinum anguli refracti, quæ per calculum constans

ſtans eruitur, non eadem deprehendatur in omni diaphano. Qui ergo ad ſecundum gradum cognitionis adſpirant, ea, quæ de refractione in genere capite primo docentur, probe expendere debent, quoniam hinc pendet certitudo ceterorum omnium, quæ in Dioptrica demonſtrantur. Quod demonſtrationes dioptricas attinet, non uno modo eaſdem contexere licet. Etenim, ſuppoſita lege refractionis, per calculum trigonometricum erui poteſt, quomodo fiat refractio in vitro cujuslibet figuræ, veluti in vitris utrinque planis, plano convexis, plano concavis, utrinque convexis, utrinque concavis & concavo-convexis ſive meniſcis. Idem reperiri poteſt per calculum algebraicum. Poteſt denique etiam geometrice demonſtrari, quod tanquam jam inventum ſupponitur, per legem refractionis, vi principiorum geometricorum, more Veterum. Ut igitur diverſos hoſce demonſtrandi modos lectorem noſtrum doceremus, nunc ad calculum trigonometricum, nunc ad algebraicum, nunc vero ad demonſtrationes geometricas Veteribus uſitatas recurrimus. In vitris politis, ex quibus tubi & microſcopia componuntur, & quæ ad alia technaſmata adhibentur, duplex occurrit refractio; altera, quæ fit in ingreſſu luminis ex aëre in vitrum; altera vero, quæ contingit in egreſſu ejuſdem ex vitro in aërem; atque adeo refractio luminis in vitris politis compoſita eſt. Ut tamen ea facilius intelligatur, primo loco docemus, quomodo refractio ſimplex fiat in ſuperficiebus tam planis, quam ſphæricis, cum cavis, tum convexis. Quodſi enim hæc principia fuerint cognita atque perſpecta; haud difficile eſt per ea demonſtrare refractionem duplicem, qualis in vitris politis occurrit. Enimvero quoniam nos principia dioptrica etiam uſui eſſe volumus in explicandis aliis Naturæ phænomenis; theoremata generaliter demonſtramus, ut ad quodlibet diaphanum applicari poſſint, modo ratio ſinus anguli incidentiæ ad ſinum refracti in eodem diaphano per experientiam fuerit definita. Quia tamen in Dioptrica potiſſimum uſui eſt refractio in vitro facta, & in Phyſica frequentiora ſunt phænomena refractionis in aqua factæ; in corollariis, theoremata de refractione in vitro & aqua facta exhibemus. Non diffiteor, theoriam dioptricam eſſe ſatis diffuſam, ſi reſpicias uſum, quem habent vitra polita in tubis opticis atque microſcopiis, & aliis nonnullis technaſmatis; ſed quibus ſcientia, quæ ſola certitudinem parit, curæ cordique eſt, illis non videretur nimis ampla, etiamſi praxis inde pendens multis adhuc arctioribus limitibus conſtringeretur. Quod vero ſubinde calculo algebraico uſi fuerimus in demonſtrandis theorematis dioptricis, non alio fine factum eſt, quam ut demonſtra-

tiones redderemus faciliores & theoriam contraheremus. Neque vero opus est ad demonstrationes algebraicas intelligendas, ut quis in studio Algebræ multum diuque fuerit versatus. Sufficit, si prima saltem rudimenta non ignoraverit, ut adeo nemo jure conqueri possit, quasi hoc nomine Dioptrica multis facta sit inaccessa. Vix enim hodie ferendum est, ut, qui Mathesin addiscere voluerit, Algebram prorsus intactam relinquat: quæ potius commendanda venit iis, qui theoriæ non multum temporis impendere possunt, eam tamen ignorare nolunt. Non exigua voluptate animum sciendi cupidum demulcent demonstrationes dioptricæ; ut adeo theoria nemini videri possit molesta, nisi ab omni sciendi cupidine prorsus immuni. Notandum vero in Dioptrica non modo quæri, quomodo lumen refringatur in transitu per diaphana diversæ densitatis; verum etiam quomodo beneficio radii sic refracti videatur visibile: quod posterius inprimis nosse debemus, ubi phænomena tubi optici ac microscopiorum aliaque visionis refractæ demonstrare voluerimus. Quamobrem in theoria quoque demonstratur, quomodo appareat visibile per radios refractos visum. Unde lentium dioptricarum duplex est usus, alter, dum lumine per ea transmisso utimur, alter vero, dum per eas visibilia respicimus. Qui adeo utrumque usum certo cognoscere studet, is etiam omnem theoriam cognitam atque perspectam habere debet: neque enim theoriam dioptricam extendimus ultra usum, quem in praxi habet.

§. 282. Refractio luminis & visio refracta phænomena naturalia sunt, quorum adeo rationes reddere tenetur Physicus. Ex Dioptrica phænomena particularia multo accuratius addisci possunt, quam per observationes absque theoriæ dioptricæ subsidio innotescunt. Et si experimenta capere volueris, ad phænomena utraque venanda; theoria Dioptricæ eadem dirigit, ut accurate cognoscantur. Quoniam in Physica phænomenorum rationes proximas ex aliis phænomenis reddimus; eo nomine Dioptrica ad scientiam naturalem plurimum affert adjumenti. Multa dantur naturæ phænomena, quæ a refractione luminis pendent. Eminent inter ea Meteora, quæ dicuntur, emphatica; quæ absque principiis Dioptricæ explicari nequeunt. Atque ea ratio est, cur subinde Mathematici de meteoris emphaticis, veluti de Iride, halonibus, parrheliis & paraselenis, in Dioptrica agant. Immo Dioptricæ theoria, si a telescopiis & aliis technasmatibus dioptricis recesseris, ad cognitionem naturæ mathematicam spectat. Quamobrem quæ paulo ante de eadem, quoad Opticam (§. 272) & Catoptricam (§. 276) monuimus; eadem quoque de Dioptrica tenenda sunt. Quamobrem

obrem qui ad Naturæ cognitionem mathematicam adſpirant, iis quoque commendamus, ut omnem Dioptricæ theoriam attenta mente perluſtrent. Quodſi enim in Optica, Catoptrica & Dioptrica didicerint, quomodo Geometria & Algebra ad Naturæ phænomena ſint applicanda, & quomodo cognitio mathematica differat a philoſophica, quidque ad perfectionem philoſophicæ conferat mathematica; ad altiora progredientes tanto minus difficultatis experientur. Extra omnem controverſiam eſt, prima cognitionis mathematicæ in Philoſophia naturali ſpecimina fuiſſe Optica, niſi forſan Aſtronomiam ipſis priorem agnoſcere volueris; quamvis noſtris demum temporibus, præſertim quod Dioptricam attinet, diſciplinæ opticæ magis fuerint excultæ, cum jam ſublimiora cognitionis Naturæ mathematicæ exempla proſtarent. Quodſi ergo a diſciplinis opticis exordiaris, ubi cognitionis hujus ideam animo complecti volueris, deinceps magis amplificandam per ea, quæ in diſciplinis mechanicis Tomo ſecundo Elementorum occurrunt: naturalem omnino dicendus es ſequi ordinem, quem tenuerunt primi inventores. Neque adeo dubitandum eſt, quin hoc pacto, a facilioribus ad difficiliora continuo progreſſus, multo intimius hunc cognitionis humanæ gradum inſpicias, quam ſi inverſo ordine, inſuper habitis primis inventis, ſtatim ad ſublimiora te conferas, ad quæ non patuit aditus niſi per faciliora inventoribus.

§. 283. Atque hoc ordine ſi progrediaris, haud parum quoque lucis affunditur ad tertium cognitionis gradum adſpiranti. Cum enim ad Artem inveniendi exercendam certa quoque requiratur mentis habitudo, ea omnino omnium commodiſſime acquiritur eo modo, quo ſucceſſive, in diverſis licet ſubjectis, incrementa ſua cœpit. Sed de hoc ipſo plura mox nobis dicenda erunt, ubi de ſtudio Aſtronomiæ in uſum tertii gradus cognitionis agendum erit. Ceterum qui Dioptricam ea lege perluſtrare voluerit, quam pro acquirendo tertio cognitionis gradu præſcripſimus; is non inanem operam a ſe ſumi ipſo facto deprehendet. Probe notandum eſt artificium, quo lex refractionis analytice inveſtigatur (§. 36 *Diopt.*); tum quod in argumento phyſico adhibeatur principium a cauſa finali deſumtum, nimirum quod Natura agat via breviſſima, tum quod methodus de maximis & minimis ad problema phyſicum applicetur. Præterea conſiderandum, quod Matheſis requirat experimenta, ſi per ejus demonſtrationes aliquid in Phyſica accurate determinandum. Etenim per analyſin mathematicam ratio ſinus anguli incidentiæ ad ſinum anguli refracti indeterminata prodit, quæ per experimenta deinde in quolibet diaphano determinanda. Etſi autem KEPPLERUS veram refractionis legem

gem non fuerit assecutus, cum rationem constantem quæsiverit in angulis, non in eorum sinibus; non tamen propterea attentione indignum est principium *Kepplerianum*, cum inde pateat, quomodo hypotheses vicarias, in locum verarum Naturæ, subinde surrogare liceat in cognitione mathematica; sive veras detegere non detur, sive eædem disquisitiones reddant molestiores; tum etiam quod inventum KEPPLERI ad veram legem refractionis inveniendam manuducere potuit SNELLIUM; quatenus constans quædam ratio inter angulum incidentiæ & angulum refractionis observatur, quamdiu anguli sinibus physice propemodum proportionales sunt: id quod tanto facilius succedere potuit, quia in ipsa Trigonometria in simili casu angulorum ratio substituitur rationi sinuum (§. 23 *Trigon.*). Et non minus demonstrationes, quam analysis dioptrica loquuntur, ubi Geometria ad Physicam applicatur, non semper observandum esse rigorem geometricum; ita ut lineæ v. gr. convergentes haberi possint pro parallelis, & anguli quantitate parva differentes pro æqualibus: id quod convenit approximationibus in Mathesi pura, & eandem cum hisce habet rationem. Quodsi singula eodem modo perlustrare velimus, quo in studio Algebræ explicando a nobis factum; multa artificia annotare licebit, quæ ad tertium cognitionis gradum faciunt. Sed nostrum jam non est in tantas ambages descendere, qui tantummodo monstramus viam, qua sit eundum. Non tamen nobis temperare possumus, quin unicum adhuc commemoremus. Nemo est qui nesciat, primam telescopii inventionem casui deberi; ejus autem perfectionem, maxima ingenii vi & acumine summo, a Mathematicis primi ordinis fuisse promotam. Fortuita telescopii inventio attento insinuat modum, quo in inveniendo casui obviam ire licet. Ac evidentissime hinc perspicitur, quod ea, in quæ casu incidimus, manum emendatricem & auxiliatricem expectent a scientia & arte inveniendi. Amplissimus sese hic aperit dicendi campus; sed eum ingredi prohibet instituti præsentis ratio. Quamvis autem in ipsis demonstrationibus dioptricis passim adhibuerimus calculum algebraicum, distantiam foci a lente determinaturi; id ipsum tamen non obstitit, quo minus doceremus, quomodo eadem analytice investigetur; non modo ut usus Algebræ in Mathesi mixta doceatur, verum etiam ut præstantia ejus appareat; cum theoremata in anterioribus operose demonstrata, quamvis ope calculi analytici fuerint contractæ demonstrationes, mira facilitate ex formula generali eliciantur: id quod extra Mathesin usui esse potest in speciebus ex dato genere determinandis. Cur vero solutionem dederimus particularem, quæ Dioptricæ sufficit, non

vero

vero universalem, sive figuram medii refringentis, sive ejus densitatem spectes, quod tanto facilius fieri poterat, cum dudum prostent solutiones generales, nec eædem supponant, nisi quæ in Analysi a nobis fuerunt tradita, ex iis liquet, quæ in superioribus jam annotavimus, cur solutiones particulares universalibus prætulerimus, in ipsa etiam Algebra, vel subinde universales nonnisi præmissis solutionibus in casu particulari subjunxerimus; ut adeo opus non sit hic repetere, quæ in anterioribus jam inculcata fuerunt. Ceterum hic quoque annotari poterat, quod, cum Dioptrica multis experimentis ansam præbeat; Ars quoque experimentandi lucem quandam hinc expectare possit. Enimvero cum suo tempore, quando nos ordo deducet ad experimentalem Philosophiam tradendam, ea de re ex instituto sit agendum; eidem in præsenti immorari non debemus.

§. 284. Antequam vero hinc discedamus, non inconsultum ducimus unum adhuc moneri Dioptricæ lectorem ad tertium cognitionis gradum adspirantem. Trigonometriam planam pro parte Artis inveniendi venditare solemus, aut, si mavis, pro methodo particulari investigandi veritatem latentem (§. 142). Unde studium trigonometricum commendamus iis, qui Artem inveniendi in genere acquirere volunt, non modo illis, qui ad tertium cognitionis gradum, in Mathesi adspirant (§. *cit.*). Non desunt, qui sibi persuadent, Trigonometriam ad Artem inveniendi parum conferre; propterea quod per eam tantummodo computentur exempla, non vero veritates universales eruantur. Hi facillime confutantur per problemata in Dioptrica trigonometrice soluta: apparet enim per Trigonometriam eadem inveniri, quæ per Algebram eruuntur. Quamvis vero opinio ista satis refelli poterat per hoc, quod ipsæ solutiones trigonometricæ problematum sint veritates generales, quæ per applicationem Trigonometriæ inveniuntur, & harum demum applicatione computari exempla; multo tamen clarius idem patet in Dioptrica, ubi etiam per computum trigonometricum eruuntur theoremata universalia Dioptricæ. Accedit, quod usus quoque Trigonometriæ in Philosophia naturali per Dioptricam elucescat. Ita ex ejus applicatione ad experimenta innotescit, quomodo lex refractionis ex. gr. in vitro detegatur, ut alia taceam.

CAPUT VIII.

De Studio Sphæricorum & Trigonometria Sphærica.

§. 285. Trigonometria sphærica demonstrari nequit, nisi præmittantur principia Sphæricorum, quæ etiam ante applicanda sunt ad Astronomiam sphæricam, quam calculo trigonometrico in eadem uti datur. Atque ea ratio est, cur Elementa sphæricorum cum Trigonometria sphærica conjunxerimus. Quamobrem qui cognitionis gradum secundum intendit, Elementa quoque sphæricorum attenta mente perlustrare tenetur, antequam ad problemata Trigonometriæ sphæricæ accedat. Quoniam demonstrationes syntheticæ sunt, quales in Geometria elementari occurrunt; eodem quoque modo expendendæ, quo demonstrationes Geometriæ elementaris resolvere docuimus. Quamobrem iis, qui methodum demonstrandi Veterum sibi familiarem reddere volunt, & demonstrationis legitimæ ideam exemplarem, quam imitentur extra Mathesin, majore luce perfundere gestiunt, lectionem quoque Elementorum sphæricorum commendamus, si vel maxime Trigonometriam sphæricam attingere noluerint. Sunt dubio procul sphæricorum Elementa pars Geometriæ, si non elementaris, certe sublimioris, quæ de lineis curvis agit, quarum etiam in numero sunt circuli in superficie sphæræ descripti. Mallem tamen eadem referre ad Geometriam elementarem, quia in hac non minus locum habet circulus, quam sphæra. Sed ea de re cum nemine ferram contentionis reciprocabimus: sufficit demonstrationes non esse difficiliores demonstrationibus Geometriæ elementaris, ex cujus etiam principiis contexuntur; nisi forsan imaginatio hinc inde minus exercitatis negotium aliquod facessat; quod tamen evanescit, ubi figuris in plano delineatis substituas globum, in cujus superficie circuli debito modo sunt descripti. Et ut hoc faciant tyrones, omnino suaserim, præsertim illi, quibus molestum accidit horum Elementorum studium, ne ejus fiant desertores. Philosophis vero hinc discere licet, quænam differentia intercedat, si imaginatio juvet, non turbet operationes intellectus.

§. 286. Quodsi igitur quis nonnisi calculum trigonometricum sibi familiarem reddere voluerit; is ex problemate primo §. 114 regulam catholicam de triangulis rectangulis probe perpendat, utque eandem intelligat, definitiones 9, 10 & 11, cum suis corollariis,

rollariis, expendat & quomodo ad omnes casus applicetur ex §. 116 *& seqq.* addiscat. Si numeri tantummodo varientur, exempla plura comminisci licet. Hæc calculi exercitia continuanda sunt, donec regulam catholicam in dato quocunque casu dextre applicare possit. Qui experiri voluerit, quantum Trigonometria sphærica per regulam catholicam facilitetur; eadem problemata more communi resolvat, quemadmodum in libellis aliis Trigonometriæ sphæricæ aut in Introductione ad Tabulas sinuum atque tangentium docetur. Ubi solutio triangulorum rectangulorum nihil amplius difficultatis facessit; addenda sunt problemata 20 *& seqq.* §. 158 *& seqq.* circa quæ eadem observanda, quæ de resolutione triangulorum rectangulorum monuimus. Nullus dubito fore, ut calculus trigonometricus absque ullo tædio addiscatur, nec majorem in eo difficultatem sentias, quam in Trigonometria plana. Quoniam multos a studio Astronomiæ practicæ abhorrere expertus sum; quod tædia calculi Trigonometriæ sphæricæ devorare cogerentur: omnem quoque operam navavi, ut Trigonometriam sphæricam redderem facilem quoad praxin, etsi theoria sit multo profundior, quam Trigonometriæ planæ.

§. 287. Trigonometriæ sphæricæ demonstrationes non modo supponunt theoremata sphærica seu Sphæricorum theoriam; sed propriam quoque theoriam habet, qua nituntur resolutiones problematum. Nimirum quemadmodum Trigonometria plana nititur theoria triangulorum planorum, seu rectilineorum, in plano descriptorum, quæ traditur in Geometria elementari; ita quoque Trigonometria sphærica pendet a theoria triangulorum sphæricorum, seu eorum quorum latera sunt arcus circulorum maximorum in superficie sphæræ descriptorum. Eam cum alibi supponere non potuerimus, in ipsa Trigonometria sphærica tradere debuimus; quemadmodum theoria triangulorum planorum in Trigonometria plana explicanda esset, nisi jam in Geometria elementari exposita fuisset. Quodsi dicas, theoriam triangulorum sphæricorum esse partem Elementorum sphæricorum, quemadmodum theoria planorum est pars Geometriæ planæ: mihi perinde erit, sive eam a Trigonometria sphærica separes eandemque tibi familiarem reddas, antequam ad hanc accedis; sive ipsam demum cum problematis, quorum solutiones inde pendent, addiscas; quamvis hoc posterius mihi videatur commodius minusque molestum, cum sic theoriæ statim pateat usus, nec difficilis præmittenda sit praxi faciliori. Theoriam autem Sphæricorum & Trigonometriæ sphæricæ plurimum commendamus iis, qui in Astronomia non modo ad secundum cognitionis gradum,

verum etiam ad ipsum tertium adspirant; consequenter omnibus, qui intellectus perficiendi gratia ad Mathesin addiscendam accedunt. Cum demonstrationes singulas eadem forma exhibuerimus, qua conspiciuntur in Geometria elementari, nisi quod nonnullæ in theoria Trigonometriæ sint prolixæ; si nostro more resolvantur, nihil difficultatis facessent, ut eadem deterreatur, qui a Geometria elementari ad sphæricam Trigonometriam statim accedit. Quodsi enim cuidam visum fuerit, neglecta Algebra & ceteris Matheseos mixtæ partibus, pergere in demonstrationibus Matheseos puræ methodo Veterum conditis, ut hanc magis subjiciat potestati suæ, nec ante ad analyticam Recentiorum accedat, quam ubi syntheticæ Veterum fuerit satis compos; is a Geometria Elementari & Trigonometria plana statim pedem promovere potest ad Elementa Sphæricorum & Trigonometriam sphæricam; cum nec hic supponantur principia, nisi quæ ex Trigonometria plana & Geometria elementari hausisti, nec alia demonstrandi methodus, quam qua ibidem usi sumus; ita ut, subjunctis Geometriæ elementari Sphæricorum Elementis, Trigonometriam sphæricam cum plana conjungere licuisset, quemadmodum vulgo a Trigonometriæ Scriptoribus fieri solet.

§. 288. Qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, iis studium Elementorum sphæricorum & Trigonometriæ sphæricæ commendandum. Etenim, sine principiis sphæricis & Trigonometria sphærica, nihil reperire licuit in Astronomia sphærica; multa etiam in Geographia ab hisce principiis pendent. Ipsemet expertus fui, cum studium Astronomiæ mihi videretur perplexum, ac tædiosum esset resolutiones problematum primi mobilis ex Autoribus petere; principiis sphæricis perspectis, nullo negotio per me ipsum eas fuisse consecutum, & beneficio illorum principiorum eas extemplo reperire potuisse, quando de iisdem cogitandum erat, etsi eas memoria non comprehendissem. Quamobrem si in Astronomia & Geographia perspicere volueris, quomodo resolutiones problematum fuerint detectæ; principia sphærica probe perspecta esse debent. Vi Trigonometriæ autem sphæricæ patet illatio, qua opus est, ut in casu particulari dato computatio legitime fiat, ope principiorum sphæricorum, triangulis & in iisdem datis detectis. Circuli, qui concipiuntur terminati in superficie sphæræ, oriuntur ex sectionibus sphæræ, quas omnes esse circulos theoremate 1, §. 13 demonstratur. Differt adeo Sphærica a Geometria plana, in qua circuli se mutuo secantes in eodem sunt plano, cum hic in diversis sint planis, omnes tamen terminentur in eadem superficie sphæræ. Unde facile patet, alium hic requiri

requiri usum facultatum cognoscendi, quam in Geometria plana. Qui vero tertium cognitionis gradum acquirere studet, is utique distincte cognoscere tenetur usum facultatum cognoscendi in veritate investiganda requisitum; consequenter ubi novus quidam usus emergit, ad eundem animum attendere debet, ne attentioni suæ sese subducat. Talia autem inprimis scrutari debet, qui Artem inveniendi distincte cognoscere avet, & Matheſi quoque in usum Philosophiæ operam navat, ejusque studio intellectum perficere studet; consequenter promptum facultatum cognoscendi usum consequi conatur, quem habere possunt. Etsi autem intra cancellos, quos præfixit præsentis instituti ratio, nos continentes ad particularia non descendamus; non possumus tamen non excitare attentionem lectoris sciendi cupidi ad artificium, quo regula catholica Trigonometriæ sphæricæ fuit eruta; præsertim cum singula huc spectantia satis distincte explicaverimus & demonstrata dederimus. Elucet enim ex eo usus prorsus singularis fictionum ad formandos conceptus universales, sub quibus comprehenduntur, quæ, propter intrinsecam diversitatem, ad commune quoddam genus, seu universalem quandam notionem reduci minime posse videbantur. Etsi enim hujus artificii jam mentionem quandam injecerimus in Analysi; singularis tamen prorsus hic occurrit applicatio, ut aliam prorsus formam induat. Regulam catholicam non alio fine investigavimus, quam ut memoriæ succurreretur, regularum multitudine non obruendæ, & ut omnis applicatio Trigonometriæ secum ferat sensum certitudinis manifestiorem. Habemus igitur hic, quod imitemur in aliis disciplinis practicis, ad praxin omnem facilitandam. Quamvis enim dentur artificia adhuc alia, quibus idem præstari potest, nec semper recurrendum sit ad fictiones; sufficit tamen hoc exemplo nos moneri, cogitandum quoque esse in Disciplinis practicis de praxi per regulas catholicas facilitanda; immo & de theoria multiplici ad notiones universales reducenda, ut facilior evadat ejus ad humana negotia applicatio. Maximæ hoc ipsum utilitatis est, cum non omnium sit theoriam, quæ multitudine regularum abundat, ita memoriæ infigere, ut singulæ veluti sua sponte præsentes sistantur intellectui, quoties usus eas requirit, cum tamen ad recte agendum illis carere nequeamus. Mirabuntur forsan nonnulli, qui, cum Mathesin sibi soli discant, ad alia, quæ extra eam sunt, animum non divertunt, nos studium Matheseos explicaturos talia proferre, quæ cum eo nihil commune habere videntur. Enimvero qui animo recoluerit, quæ supra de studio Matheseos, intellectus perficiendi gratia instituendo, in medium attulimus, & cum eodem

ſtudium Philoſophiæ verioris, quam in operibus noſtris tradimus, conjunxerit, non habebit amplius quod miretur, utilitatem eorum, quæ hinc inde commendantur, reipſa experturus.

§. 289. Trigonometriam ſphæricam non explicamus, niſi in uſum Aſtronomiæ & Geographiæ. Quamobrem non plura tradimus, quam quæ huic fini ſatisfaciunt. Et quoniam Trigonometria ſphærica demonſtrari nequit, niſi ſuppoſitis principiis ſphæricis, nec applicari in Aſtronomia & Geographia niſi mediantibus his ipſis principiis; nec ex hiſce addidimus, niſi quæ huic ſcopo ſufficiunt. Etſi itaque Algebra ad doctrinam quoque Sphæricorum & Trigonometriam ſphæricam applicari poſſit; uſum tamen Algebræ in hac Matheſeos parte prætermiſimus, cum unice propoſitum nobis fuerit praxin Trigonometriæ ſphæricæ reddere faciliorem. Ne tamen quis exiſtimet, cum vel eſſe nullum, vel adeo difficilem, ut hactenus detegi non potuerit; provoco ad exempla, quæ dedit JACOBUS KRESA e Societate Jeſu in Analyſi ſpecioſa Trigonometriæ ſphæricæ, primo mobili &c. applicata, & ad hiſce illuſtriora, quæ extant in Commentariis Academiæ Imperialis Petropolitanæ. Problemata primi mobilis per Algebram ſoluta, ſi ad Geometriam puram reducuntur, non ſunt niſi problemata ſphærica. Geometræ ſane de Sphærica nunquam cogitaſſent, niſi problemata primi mobilis in Aſtronomia de ea cogitandi anſam dediſſent. Neque dubium eſt, initio hanc Geometriæ partem ab Aſtronomia ſphærica non fuiſſe ſeparatam, quemadmodum & ipſa Trigonometria non tradebatur niſi in Aſtronomia.

CAPUT IX.

De Studio Aſtronomiæ.

§. 290. Studium Aſtronomiæ multis ſeſe nominibus commendat omnibus, qui ad ſolidam rerum cognitionem adſpirant, ſive ſecundum cognitionis gradum, ſive tertium intendant; & inprimis ſi quis intellectus perficiendi gratia Matheſi operam navet, ac ad ſcientiam naturalem excolendam animum appellere velit; immo ſi ſtudio medico ſeſe mancipandi animum habuerit. Diverſi admodum ſunt fines, cur quis ad ſtudium Aſtronomiæ accedit. Quare nec omnibus eodem modo in eodem verſandum, cum diverſos fines non eodem modo conſequi detur. Noſtrum igitur eſt docere, quid unicuique faciendum, ut finem a ſe intentum conſequatur.

§. 291.

§. 291. Sunt qui curiositatis tantummodo gratia Astronomiam addiscendam esse sibi persuadent; cui tanto magis satisfaciendum existimant, ne ignorent ea, quæ in Calendariis extant; non decere virum eruditum arbitrati, ut Calendarium quotidie in manu habeat, non tamen intelligat, quæ in eodem traduntur. Sunt alii, qui istis oculatiores longius prospiciunt, & adolescentibus ob curiositatem commendant studium astronomicum, ut eadem excitetur sciendi cupiditas & magis magisque inflammetur. Sane non alio fine in scholis introductus est JOANNIS DE SACRO BOSCO libellus de sphæra; cui deinceps alii substituere alios libellos, usum Globorum, & computum ecclesiasticum exponentes. Etsi enim ea fini etiam Theoricas Planetarum consignaverit PURBACHIUS; cum tamen Theorica magis conducere visa iis, qui ex instituto Astronomiæ operam navaturi sunt, quam promiscue omnibus, & ipse PURBACHIUS potissimum intenderit, ut ad studium astronomicum fere neglectum ac desertum aditum aperiret, & animos juvenum ad idem persequendum accenderet; Theorica ex scholis proscripta in Academias relegata, ubi præter Professorem Mathematum inferiorum, qui Mathesin puram, cum Geometria practica, & Staticæ elementis, interpretari debebat, etiam constitutus Professor Mathematum superiorum, qui Astronomiam cum Geographia, Chronologia, Gnomonica & Astrologia doceret. Unde hodienum in Academia Wittebergensi & Hafniensi duo sunt Mathematum Professores, alter Mathematum inferiorum, alter superiorum. In scholis itaque inferioribus, in quibus adolescentes ad lectiones academicas præparandi, sufficere visum, si Astronomiæ sphæricæ, & computi ecclesiastici prægustum quendam haberent, & figuras geometricas construere addiscerent. Unde memini in Gymnasiis quoque patriis, Vratislaviensibus scilicet, cum ego adolescens Magdalenæum frequentarem, Professorem Matheseos nonnisi constructiones figurarum, cum definitionibus Geometriæ elementaris, usum Globorum & computum ecclesiasticum docuisse. Et quamvis insigni cupiditate methodum mathematicam cognoscendi jam tum flagrarem, nec minor esset Algebræ addiscendæ ardor; quod illa certam acquiri posse cognitionem, cui contradicere nemo ausit; hac vero, proprio marte veritates incognitas investigari audivissem; nemo tamen erat, qui sitim meam restinguere valeret; immo non deerant, qui studium Matheseos dissuaderent, aut saltem affirmarent, me ejus auxilio non consecuturum, quod sperabam. Ego vero nunquam ab ea opinione me dimoveri passus sum, cujus quidem rationes hic exponi nil attinet.

§. 292.

§. 292. Qui adeo solius curiositatis gratia Astronomiam addiscere volunt, iis sufficit historica veritatum præcipuarum cognitio. Nimirum primo ipsis legenda sunt, quæ capite primo Astronomiæ sphæricæ, quoad observationes communes & principia inde stabilita, traduntur. Neque enim integro hoc capite continetur quidpiam, quod captum Mathematum imperiti excedat; & quocunque quis animo ad Astronomiam accedat, ea ignorare non debet, quæ in eodem continentur. Deinde ex secundo capite, quod de circulis sphæræ mundanæ agit, definitiones circulorum & aliorum nonnullorum ad eos spectantium sibi familiares reddat, omissis ceteris omnibus. In capite vero quarto legat scholia probl. 16, §. 244 *& seqq.* quæ de catalogo fixarum, & asterismis, ac magnitudine apparente illarum loquuntur. Addi possunt hinc inde scholia quædam alia, quæ utrum contineant, nec ne, quod videatur notatu dignum, quilibet facile per seipsum judicabit. Hinc statim accedat ad caput sextum, in quo constructio & usus Globi cœlestis in ipsius potissimum usum docetur. Neque male sibi consulet, si in capite septimo perlegat de refractione & parallaxi, quæ in definitionibus & scholiis habentur, & sub rubrica observationum reperiuntur: id quod etiam intelligendum de crepusculis, quibus destinatur caput 8, seu ultimum Astronomiæ sphæricæ. Et hæc satisfaciunt etiam adolescentibus ad studium Astronomiæ præparandis, quoad partem sphæricam. In parte Theorica iis, qui solius curiositatis gratia Astronomiam addiscunt, commendanda sunt capita tria priora de natura Solis ac Lunæ ceterorumque Planetarum, & mundi systemate, si pauca quædam problemata excipias, quæ prætermitti possunt. Poterunt etiam prætermitti theoremata, quæ in usum systematis mundani evincendi proponuntur §. 571 *& seqq.* Sufficit enim ut saltem theorema 27, §. 612 & theorema 28, §. 630 cum subjectis scholiis legat, demonstratione prioris insuper habita. De Theoria Planetarum, quæ capite quarto traditur, non plura cognoscere tenetur quam hypothesin: non tamen prorsus inconsultum est, ut addat definitiones, quarum in Theorica usus, propterea quod hi termini in Calendariis quoque occurrunt, quæ intelligere vult curiositatis gratia Astronomiæ operam aliquam impendens. Quod ad Lunam attinet, præter definitiones & observationes, a §. 816 usque 822, non est, quod curiosus tantummodo lector attingere teneatur. Et ex capite sexto tantummodo distantias planetarum a Terra ex §. 906, earumque magnitudines ex §. 922, haurire debet. De adspectibus capite septimo sufficiunt eidem definitiones §. 926-935, cum definitionibus eclipsium §. 937 & §. 982. Denique ex capite ultimo de stellis

lis fixis & novis atque cometis, sufficiunt theoremata absque demonstrationibus, & observationes, omissis vero problematis. Ea abunde satisfaciunt, ut de rebus astronomicis verba facere possit, quando occasio tulerit in sermone communi, & intelligere, quæ in Calendariis de iisdem habentur.

§. 293. Quodsi quis cognitionem historicam Astronomiæ accuratiorem desiderat; is omnia, omissis demonstrationibus, ea industria perlegere debet, quam pro primo cognitionis gradu præscripsimus. Quodsi tamen praxin non curat, nec opus esse videtur, ut singula problemata perlustret. Abunde sufficit, si theoriam planetarum primariorum perspectam habeat & calculi eclipsium ideam aliquam animo concipiat. Permittendum adeo est unicuique, quo usque ipsum trahat sua voluptas. Vix enim alius finis intendi potest, quam ut notitia rerum astronomicarum animum delectet. Quoniam itaque sola voluptas mensura est eorum, quæ addiscenda sunt, uniuscujusque omnino relinquendum est judicio, quantum eidem satisfaciat. Quemadmodum illam suo quisque modulo metiri debet, nec ex se judicare licet alios; ita quoque determinari nequit, quænam unicuique conducant.

§. 294. Cognitio Astronomiæ historica, quoad partem sphæricam, facilitatur continuo usu Globi cœlestis, qui semper ad manus esse debet. Etenim definitiones multo facilius intelliguntur, si ea, quæ declarant, in superficie Globi repræsententur; cum imaginatio nihil amplius facessat negotii, ob consensum ejus cum sensu seu visu. Si schemata in plano delineantur, quemadmodum fieri solet & a nobis quoque factum est; sensus non revera exhibet, quod repræsentare debebat; sed saltem dirigit imaginationem, ut vi vocabulorum, quæ in definitione continentur, sibi formet ideam ejus, quod cognosci debet. Sumamus exemplum facile, ut quæ dicuntur recte intelligantur. Declinationem stellæ definimus per distantiam ejus ab æquatore. Cumque distantiam a circulo maximo esse ostenderimus arcum circuli maximi inter duo puncta in superficie sphæræ intercepti & ad circulum maximum perpendicularem (§. 76 *Sphæric.*); ideam declinationis formaturi imaginari debemus circulum maximum in superficie sphæræ, qui per centrum stellæ, seu punctum in sphæræ superficie datum, & per æquatorem transit, & hunc ad angulos rectos secat. Quamobrem cum porro constet (§. 28 *Sphær.*), hunc circulum transire debere per polos æquatoris, quos eosdem esse cum polis mundi constat (§. 48 *Astron.*); nobis imaginari debemus sphæram cavam, in cujus centro oculus collocatus, & in eadem duos polos, circa quos vertitur, una cum æquatore intervallo quadrantis in

in superficie sphæræ descripto, & circulo transeunte per polos & stellam, seu punctum in superficie datum transeunte, qui secat æquatorem. Ita enim demum idea repræ-
Tab.IV. sentabit declinationem. In plano
Fig. 40. circulus MAPQ repræsentat sphæram mundanam, puncta P & p polos mundi diametraliter oppositos, AQ æquatorem ex altera hemisphærii parte, in qua sumitur stella S sive punctum quodcunque datum. P Sp repræsentat circulum, qui per polos mundi P & p atque punctum datum S transit, in eadem hemisphærii parte, & æquatorem in D secat. Unde arcus circuli maximi DS repræsentat Declinationem stellæ, seu puncti S. Hinc liquet, quomodo definitiones primum explicandæ sint per figuras in plano delineatas. Enimvero cum idea hujus schematis non sit ea, quæ rem ipsam, prouti concipitur, repræsentat, sed vicariam saltem operam præstet; imaginationis est, eam transformare in ideam veram. Loco igitur circuli APQpA nobis imaginamur sphæram cavam, in cujus centro oculus constitutus; in ejus superficie imaginamur porro duos polos P & p sibi diametraliter oppositos, & æquatorem ab utroque polo undiquaque eodem intervallo distantem, tandemque circulum alium per stellam in eadem superficie sumtam & duos polos transeuntem, qui necessario æquatorem secat. Atque ita demum imaginatio veluti visui percipiendam exhibet declinationem SD. Nemo non videt non sine exercitio vim istam acquiri, quæ imaginationi ad istam transformationem idearum sufficit; immo ipsam imaginationis vim jam extendendam esse, ut satis clare repræsentet quod percipiendum. Enimvero si globus fuerit ad manus, cum in ejus superficie designati sint poli, & æquator descriptus, ac præterea Meridianus circulus per polos mundi transiens, sub quo ob ejus volubilitatem circa polos, & situm Meridiani fixum, quodvis superficiei punctum pro arbitrio constitui potest; non alia re opus est, quam ut stella constituatur sub Meridiano, ita enim ejus arcus inter eandem & æquatorem interceptus repræsentat declinationem, qualem imaginatio percipiendam exhibere decet. Atque ita sensus cum eadem consentit. Non est quod excipias, Globum exhibere in superficie convexa, quod imaginatio transferre debet in concavam; consequenter nec hic sensum cum imaginatione consentire. Etenim quis non videt, cum non necessarium sit ut oculus collocetur in centro sphæræ, fingi posse quod is extra sphæram collocetur? quod ubi imaginamur, imaginatio a sensu non dissentit. Quodsi vero imaginationis vi ipsam sphæram mundanam repræsentare velis, qualis nobis apparet, dum noctu cœlum stellis superbiens contuemur; multo jam facilius accidit ea, quæ

quæ oculo extra sphæram mundanam per fictionem constituto apparent, eidem in centrum sphæræ retracto, tanquam in concava, percipienda exhibere.

§. 295. Non dubito fore haud paucos, qui nodum in scirpo quæri existimaturi sunt, & sine istiusmodi scrupulositate Astronomiæ cognitionem historicam acquiri posse tanto confidentius sibi aliisque persuaderi conabuntur, quod experientia testetur, ex schematismis in plana delineatis satis intelligi, absque ulla opera, quæ per definitiones explicantur, & in resolutionibus problematum præcipiuntur. Enimvero quis vitio vertet Philosopho, quod distincte explicet usum facultatum, quem alii de eodem parum cogitantes faciunt, præsertim eo fine, ut simul ostendat, quomodo usum istum facilitare liceat? Homines & animalia moventur absque cognitione regularum Staticæ, nec norunt, quem faciant eorundem usum, dum easdem inviolabiliter observant. Ecquis vero reprehendit BORELLUM, quod, in egregio opere de motu animalium, ex regulis Staticæ eundem demonstrandum sibi sumserit? Si quis fuerit Astronomus, qui in Psychologia simul versatus, ut acumine suo discernere possit, quæ modificationibus animæ insunt; is utique agnoscet vera esse, quæ de idea vi imaginationis formanda ad clare percipienda, quæ in Astronomia sphærica docentur, in medium attulimus (§. 294).

§. 296. Quemadmodum vero illam idearum transformationem juvat, præter Globum cœlestem, sphæra etiam armillaris; ita non inutile foret, si, ad similem usum in parte Astronomiæ theorica obtinendum, adhiberentur Instrumenta levi sumtu parabilia, quibus phænomena motus secundi apte repræsentarentur; non quidem ea accuratione, ut calculi vicem subire possent, sed quantum sufficit, ut motus secundus, seu proprius, distincta notione comprehendatur. Intendebat hoc PURBACHIUS cum suis Theoricis Planetarum; sed cum, Astronomiæ parte theorica per COPERNICUM inprimis ac KEPPLERUM reformata, nullus amplius illarum sit usus; alia prorsus forma fieri hodie deberent instrumenta ad motus secundi phænomena eodem modo repræsentanda, quo ope Globi artificialis repræsentantur phænomena motus primi. Equidem non ignoro, non defuisse aliquos, qui de motu secundo Planetarum organice repræsentando cogitarunt; sed desunt instrumenta, quæ ad communem discentium usum adhiberi possent. Neque vero negandum est in Theoricis defectum istiusmodi instrumentorum esse tolerabiliorem quam in sphæricis; quia, per schemata in plano descripta, non adeo confunditur imaginatio, quam in sphærica; & quod ad Theoricam demum accedas sphærica absoluta; consequenter ubi notionibus astronomicis jam adsuetus animus.

§. 297. Qui propter praxin Astronomiæ operam navant, cum ea varia sit, nec omnes eodem modo in ea versari debent. Constat, ad praxin Astronomiæ facilitandam, conditas esse Tabulas tam primi mobilis, quam motus Planetarum. Illarum usus est in parte sphærica; harum vero in theorica. Quibus adeo calculus astronomicus curæ cordique est, illi usum Tabularum multiplici computatione sibi familiarem reddere tenentur. Præfiguntur Tabulis præcepta calculi, quæ non in omnibus sunt prorsus eadem. Quamobrem ut ea intelligantur, cognitio saltem historica ex Elementis Astronomiæ præmittenda. Quo accuratior hæc fuerit, eo melior. Equidem fieri potest, ut calculum astronomicum juxta Tabulas absolvat, qui terminos tantummodo cognitos atque perspectos habet; sed in tenebris quasi versatur, qui nihil prorsus rationis regularum perspicit. Suadendum igitur est, ut theoriæ, tam sphæricæ, quam theoricæ cognitione historica animum imbuas, antequam ad calculum accedas. Dedimus ipsimet præcepta calculi astronomici, eademque exemplis illustravimus. Quamobrem qui ad hanc praxin adspirat, ad ea animum advertere tenetur. Exemplorum typum ita repræsentavimus, ut ideam exemplarem calculi animo ingenerare possit, quæ regularum vicem tueri potest, ubi plura exempla computaveris, & eadem forma calculum descripseris. Antequam autem satis exercitatus fueris, ut tibi fidere possis, quod nulla ex parte aberraveris; exempla computanda sunt, quæ in Ephemeridibus habentur, ut cum iis conferre queas, quæ calculus tuus prodit.

§. 298. Tabulæ astronomicæ non alio fine conduntur, quam ut calculus reddatur facilior & brevior. Computantur autem ex observationibus calculo geometrico, aut, si mavis trigonometrico. Quamobrem Tabularum conditoribus calculus geometricus perspectus esse debet. Formam quoque hujus calculi cognoscere tenetur, quicunque solidam Astronomiæ scientiam acquirere debet. Nos in Elementis nostris hunc calculum, non modo regulis perspicue ac distincte propositis, comprehendimus; verum etiam exemplis illustravimus, & typum calculi ita exhibuimus, ut in praxi commode regularum vice fungatur, ipseque calculus prolixus ab omni perplexitate & molestia liberetur. Usi nimirum hic sumus eodem artificio, quo calculum algebraicum facilitare studuimus. Quamobrem, si quis præcepta calculi cum typo conferat, non habebit, quod conqueratur de obscuritate, sed plena luce fruetur in iis intelligendis; modo in Trigonometria fuerit versatus, cujus problemata familiaria supponuntur, nec ignoret terminos, quos ex definitionibus perspectos habere debet. Neque enim accedendum

dendum est ad calculum geometricum, nisi intellectis terminis astronomicis & Trigonometriæ, tam sphæricæ, quam planæ, praxi in potestatem suam redacta. Si quis numeros datos variaverit, in aliis exemplis calculi typum imitaturus; is non modo habitum computandi sibi comparabit; verum etiam ideam calculi exemplarem memoriæ infiget, ope schematis delineati in memoriam facile revocandam, quoties calculo isto utendum. Atque hoc ipso obtinetur, ut non modo molestia omnis a calculo astronomico arceatur, sed etiam ut animo placido, nec perturbato sanguinis circulo, calculos continues per tantum temporis spatium, quantum libuerit; modo tibi non molestum accidat tempus calculis fallere, quod scientiæ amplificandæ impendere malles. Neque enim tædia, ex diverso fonte propullulantia, pro diversitate inclinationum naturalium quibus natura homines a se invicem differre voluit, in unum confundenda; errore manifesto iis, qui in Psychologia cum laude sunt versati. Quodsi vero præcepta calculi, quæ numeris suis distincta sigillatim exhibuimus, tranquillo animo lente festinans perpendas; formæ calculi notionem distinctam consequeris, usus regulis quas in Logica pro acquirenda notione distincta præscripsimus; etiamsi illas nunquam didiceris, nec, dum juxta eas determinas facultatum cognoscendi usum, earum tibi conscius fueris. Quantum hoc conducat ad perficiendum intellectum, ut etiam extra Mathesin distincte concipere adsuescas, quæ meditaris, & ordine in meditando cogitationes tuas promoveas, nunc demonstrare nolo; etsi demonstratio ex Psychologiæ ac Logicæ principiis dari poterat; utpote assensum non nisi eorum extorsura, qui Metaphysicæ, prouti a nobis tradita, jam operam debitam navarunt. Sufficit monuisse, quod credendum sit experto; & oculata futura sit fides singulis, quotquot consilio nostro aurem benignam præbere non dedignati fuerint. Qui Astronomiam non sibi discunt, sed intellectus perficiendi gratia eidem incumbunt, id quod faciendum plurimis (cum paucis admodum Astronomis opus habeat genus humanum) illis formam calculi animo concepisse sufficit, nec opus est, ut in eodem sint exercitati. Quatenus tamen exempla lucem affundunt præceptis, non inconsultum est, ut unicum saltem, quod exhibuimus, exemplum computent, singulis præceptis ad idem applicatis; præsertim cum etiam extra Mathesin, in Philosophia præsertim practica, magna sit exemplorum vis; quemadmodum in parte altera Philosophiæ practicæ universalis demonstravimus; atque adeo utile sit ad Philosophiam animum appellenti præcepta ad exempla dextre ac expedite applicare. Ecce igitur tibi usum universalem eumque maximi faciendum,

dum, ob quem hæc pars ſtudii aſtronomici promiſcue commendari meretur omnibus, quos ſolida rerum cognitio juvat; etſi ætatem omnem in calculis aſtronomicis conſumere nolint; immo etſi futurum vitæ genus minime ferat, ut notitiam multo labore acquiſitam conſervent. Quoniam enim ea conſervari, hoc non obſtante, poteſt intellectus habitudo, quam hoc ſtudio acquiſiviſti; non eſt quod conqueraris, te in ſpem futuræ oblivionis diſcendo ea, quæ tibi nulli uſui ſunt, tempus inutiliter conſumſiſſe.

§. 299. Peculiaris quoque praxis aſtronomica eſt phænomena ſiderum obſervandi, omnis praxeos reliquæ baſis. Ex obſervationibus enim calculo geometrico eruuntur, quæ in Aſtronomia ſcire intendimus; nec abſque iis, calculi hujus beneficio, conduntur Tabulæ, quarum in praxi tam commodus eſt uſus. Immo, abſque obſervationibus non licet perficere Tabulas, ut major ſit earum cum cœlo conſenſus. Ne igitur hac in parte quoque deeſſemus; modum quoque obſervandi expoſuimus, ut aliquam ejus ideam animo concipere detur. Nemo autem a nobis requiſiverit, ut omnia minutiſſime perſequamur, quæ ad dexteritatem in obſervando faciunt. Quodſi enim quis obſervatorem agere voluerit, is non modo intellectis iis, quæ a nobis traduntur, legat Autores ſupra commemoratos, cum ſcripta Aſtronomorum recenſeremus; verum etiam in obſervatorio aliquo celebri, quale eſt Pariſinum in Gallia & Grenovicenſe in Anglia, per aliquod tempus commoretur, ut, quæ ad obſervandi dexteritatem faciunt, ab Obſervatoribus exercitatis addiſcat. Quamvis enim impoſſibile non ſit, ut eandem multo exercitio per ſe aſſequatur, ſi in obſervando ſedulus ac continuus ſit; facilius tamen longe accidit, ubi alios præeuntes imitamur, quam ſi demum multa circumſpectione ipſimet detegere ea debeamus, quæ ad obſervationem accuratam conducunt. Quodſi quis inſtrumenta, modumque obſervandi Veterum cum recentioribus & recentiſſimis conferre voluerit; is animadvertet cum theoria Aſtronomiæ creviſſe quoque obſervationum perfectionem. Unde conficitur, cum, qui obſervationibus aſtronomicis vacare voluerit, theoriam quoque Aſtronomiæ ſibi perſpectam reddere debere. Immo ex iis, quæ in noſtris Elementis demonſtrantur, jam patebit, obſervatorem in calculo quoque aſtronomico, ipſo etiam geometrico verſatum eſſe debere. Sane qui obſervatorem agere voluerit, Aſtronomiam omnem, tam theoreticam quam practicam, intime perſpectam habere debet. Ad obſervandum requiruntur inſtrumenta &, ſi obſervationes accuratæ eſſe debent, accuratis quoque opus eſt inſtrumentis. Quamobrem qui obſervationibus

tionibus aſtronomicis ſeſe dare voluerit, inſtrumentorum quoque fabricam, uſum, & examen intime perſpicere debet. Notio inſtrumenti adæquata eſſe debet, qualis ſufficit ei, qui artificem ejus fabricam docere vellet, aut, ſi arte polleret, ipſemet idem conſtrueret. Rationes ſingulorum in fabrica obſervandorum ex theoria Aſtronomiæ reddendæ, ut ſcientifica ſit inſtrumenti cognitio. Uſum accuratum determinat Aſtronomiæ theoria ad conſtructionem inſtrumenti applicata. Conſtruitur enim inſtrumentum in certum finem, veluti magnus Gnomon ad obſervandas altitudines Solis meridianas per ſingulos anni dies; ex theoria autem Aſtronomiæ conſtat, quanta exactitudine finem intentum conſequi debeamus. Inſtrumenti igitur is fieri debet uſus, quem finis conſequendus exigit. Examina non modo pro diverſitate inſtrumentorum, verum etiam pro uno eodemque inſtrumento varia eſſe poſſunt. Eo autem tendunt omnia, ut inde conſtet, inſtrumenta eſſe accurate facta, atque adeo iis in obſervando fidendum eſſe, ſi quidem certus ſis te debitam in obſervando diligentiam adhibuiſſe. Ad hæc examina referendum, ſi quis inſtrumento ſuo eadem ἀκριβείᾳ phænomenon obſervat, qua ab aliis celebribus Obſervatoribus alias fuit obſervatum; veluti ſi quis per teleſcopium ſuum Saturni eaſdem phaſes videt, quales primus exquiſitiſſimis teleſcopiis obſervavit HUGENIUS. De examinibus iſtis ſpecialia in medium afferre non licet. Supponunt enim accuratam Inſtrumentorum deſcriptionem, qualem hic dare non licet. Sufficit adeo monuiſſe, quod iſtiuſmodi examinibus opus ſit, ne magno conatu ac maxima diligentia nihil agas. Obſervationes aſtronomicæ ſunt pauciſſimorum; propterea quod non quilibet, qui Aſtronomiæ ſtudio delectatur, gaudet ſupellectili ad obſervandum neceſſario, fruiturque otio ac commoditate obſervandi. Quamobrem in noſtris Elementis nonniſi ea tradidimus, quæ ſufficiunt, ut intelligatur, qualibus obſervationibus opus habeat Aſtronomus.

§. 300. Qui tertium cognitionis gradum intendunt, Elementa Aſtronomiæ integra eodem modo perluſtrare tenentur, quem ſupra pro cognitionis gradu ſecundo acquirendo præſcripſimus. Eum enim in finem Elementa Aſtronomiæ eadem methodo conſcripſimus, qua Elementa Geometriæ condidimus; etſi communiter Aſtronomi continuo diſcurſu, quemadmodum vulgo faciunt Autores, ſua proponant; ſit ita quod demonſtrationes eidem interſerant: quem morem etiam hodie Geometræ ſequuntur, in ſchediaſmatis præſertim quibus inventa ſua orbi literato communicant in Diariis Eruditorum & Commentariis Societatum Regiarum. Conſtat ipſum.

ipsum PTOLOMÆUM eundem morem tenuisse in Almagesto suo. Negari tamen non potest, quod methodus *Euclidea*, quam nos adhibuimus, multo sit clarior; præsertim si omnia rigide demonstranda, nec sumenda, quorum demonstratio lectoris industriæ relinquitur, neque etiam immiscenda, quæ prorsus non demonstrantur. In parte etiam sphærica, ex principiis sphæricis rigide demonstravimus, quæ vulgo ab Astronomis fiducia illorum principiorum sumuntur, ne evidentiam desiderent tyrones; inprimis ubi Elementa Geometriæ tam scrupulosa industria pertractarunt, quam supra præscripsimus, & qua omnino opus est, siquidem ideam methodi demonstrativæ exemplarem in usum Philosophiæ ex Mathesi haurire volueris. Neque porro negari potest, studium Astronomiæ hoc pacto facilitari. Sane non alia de causa PURBACHIUS studium Astronomiæ amplificaturus, & ad captum tyronum accommodaturus, Almagestum PTOLOMÆI, idem methodo *Euclidea* digerere cœpit; telam vix cœptam, post obitum ejus, jure legati, pertexente REGIOMONTANO. Non igitur fecimus, nisi quod judicio REGIOMONTANI, Astronomi summi, probetur. REGIOMONTANUS nullis problemata illustravit exemplis: id quod tamen apprime necessarium esse ex iis, quæ modo in antecedentibus inculcavimus, abunde elucet. Præterea ipsa res loquitur, quod, cum is nonnisi Almagestum PTOLOMÆI in formam Elementorum EUCLIDIS redigere voluerit, idem non tradat nisi Astronomiam antiquam, a qua recentior plurimum differt, præsertim in theorica, ut adeo dici nequeat nos actum egisse. Quemadmodum vero Elementa Geometriæ *Euclidea* multo clariora & evidentiora reddidimus, tum quod demonstrationes fecerimus completas & ordinatas, quales esse debent, si quis methodum demonstrativam in usum philosophandi addiscere voluerit, tum quod resolutiones problematum magis distincte exhibuerimus; ita idem observavimus, ut in ceteris Matheseos partibus, sic etiam in Elementis Astronomiæ. Observationes præterea, quales in Mathesi pura nullæ occurrunt, sigillatim quoque ita recensuimus, ut præter facta nihil contineant; ea vero, quæ inde concluduntur, per modum corollariorum deduximus; quemadmodum vult Logica verior, & fieri debere in Logica nostra evicimus: id quod etiam in disciplinis opticis jam fecimus. Sicuti enim methodus demonstrativa in iis, quæ operationibus intellectus perficiuntur, ad amussim observat regulas in Logica præscriptas: ita etiam in iis, quæ sensuum usu sub directione intellectus innotescunt, ejusdem regulas sequi debet. Nihil adeo a nobis prætermissum existimamus, quod methodus accurata exigere poterat. Cum in theoricis nonnulla dentur,

tur, quæ rigide demonſtrata eſſe dici nondum poteſt, etſi rationi & experientiæ admodum conſentanea videantur, & quæ in uſum Aſtronomiæ practicæ ſumenda eſſe unanimiter hodie conſentiunt Aſtronomi; veluti quod Terra moveatur motu vertiginis, & motu translationis circa Solem (§. 622), & deſcriptio Syſtematis mundi (§. 630); demonſtrationis quoque titulum omiſimus; ne, contra regulas Logicæ de demonſtratione, pro tali venditemus, quæ non eſt, ut ab incautis vulgo pro tali habeatur. Nulli igitur dubitamus fore, ut certam nobiliſſimæ ſcientiæ cognitionem ex Elementis noſtris hauriat, qui non perfunctoria opera in iiſdem verſari voluerit. In Theoricis ſecuti ſumus hypotheſin KEPPLERI; quam cum cœlo magis conſentire ceteris hypotheſibus commentitiis omnibus in confeſſo hodie eſt, apud Aſtronomos omnes, fiducia obſervationum quibus in Aſtronomia omnia dirimenda. Quamobrem quoque placuit calculum geometricum explicare, qualem dedit KEPPLERUS in Commentariis de ſtella Martis, & in Epitome Aſtronomiæ Copernicanæ; ut & conſtructio Tabularum Rudolphinarum, & calculus Rudolphinus intelligatur. Quoniam tamen hodie majore fruimur luce in Geometria, quam KEPPLERI ævo; ea quoque addidimus, quæ lubens ipſe in theoriam ſuam recepiſſet, ſiquidem ipſi ea videre licuiſſet.

§. 301. Neminem vero, qui Dioptricam ante didicit, quam ad Aſtronomiam accederet; quemadmodum omnino fieri debet, ob eximium teleſcopiorum in omni Aſtronomia uſum; offendet, ubi obſervaverit in theorica quædam ſumi, quæ in rigore geometrico vera non ſunt, ad veritatem tamen propius accedunt. Etenim in cognitione Naturæ mathematica, ad quam etiam Aſtronomia referenda, præſertim ſi more *Keppleriano* tractetur, non attendendus eſt rigor geometricus, modo conſtet quæ eodem invito ſumuntur ad veritatem prope accedere; præſertim ubi theoria quæritur propter praxin, ubi approximationes æquipollent veritati. Vidimus quoque in Mechanica iſtiuſmodi hypotheſes in locum hypotheſium naturæ utiliter ſubſtitui; immo ſi praxin unice reſpicias, ſubſtituendas eſſe. Quoniam tamen ad Aſtronomiam accedere licet, Mechanica ſepoſita, ſtatim a Geometria elementari & Trigonometria utraque; non inconſultum duximus denuo inculcare, quod attento lectori ex anterioribus jam patere poterat. Neque hoc abhorret a more priſcorum Aſtronomorum, cum tamen antiquiſſimis temporibus rigor demonſtrandi maxime ſeſe probaret Geometris. Etenim in computo eclipſium ſumſerunt, quemadmodum adhuc fieri ſolet, lineas rectas pro arcubus circulorum, & triangula ſphærica in

plana converterunt, ad facilitandum calculum; propterea quod non committitur error ſenſibilis, ſed qui obſervabili minor; error autem obſervabili minor in Aſtronomia practica habetur pro nullo. Huc etiam referri debet, quod in doctrina primi mobilis ſemidiameter Telluris habeatur pro puncto, reſpectu diſtantiæ fixarum. Quando vero dicimus, in demonſtrationibus aſtronomicis non ſemper obſervari rigorem demonſtrandi; id non intelligendum de forma, ſed de materia demonſtrationis. Conſtat nimirum ex Logica, formam probationis ſemper eandem eſſe debere, nec ab ea unquam recedendum, ſi methodus accurata eſſe debet: id quod etiam uſui eſt in rigore demonſtrandi agnoſcendo; ne quis ſibi perſuadeat ſupponi, quæ vera ſunt, ſibi autem in memoriam venire nequeunt. Nullo igitur modo probamus, ſi rigor demonſtrandi quoad formam negligatur; quicquid etiam videatur aliis. Notandum vero & hoc eſt; in Aſtronomia a rigore demonſtrandi quoad materiam recedi, abſque ullo ſcientiæ detrimento; quemadmodum etiam in Dioptrica contingit. Quod enim ſumitur contra veritatem, eadem tamen non invita ſumitur; quia quod ſumitur quoad praxin in locum veri ſurrogare licet, nec ſine utilitate. Alia vero longe ratio eſt, ſi dubium ſumitur tanquam verum, non ſine formidine oppoſiti. Hoc enim in caſu ſubeundum eſt periculum errandi, quale non metuendum in præſenti caſu. Sunt equidem etiam in Aſtronomia, quæ dubia ſunt, & ad certitudinem hactenus deduci minime potuerunt: ſed ea a ceteris ſatis aperte diſtinguimus, ne cum certis confundantur. De hiſce plura mox monebimus in ſequentibus. Non vero vitio vertitur Aſtronomo, ſi in dubiis acquieſcit, ubi certitudo haberi nequit: illud demum vitio vertendum fuerat, ſi dubia pro certis venditaret. A priori nullum damnum metuendum ſcientiæ; a poſteriori autem detrimentum patitur ſcientia. Ingenue confitentur Aſtronomi, ſe a certitudine adhuc abeſſe, ubi eam nondum conſecuti; minime autem certa & explorata videri volunt, quæ non ſunt. Immo ſi contingat a vero aberratum eſſe, obſervationibus contrarium ejus, quod ſtatutum fuerat, loquentibus; diſſenſum ab obſervationibus minime diſſimulant; multo minus erroribus incruſtandis ac pertinaciter defendendis operam impendunt, prouti eruditis ceteris ſolenne. Veritatem nimirum quærunt, quam ubi nondum invenerunt, eandem inveniſſe videri nolunt; ne ſibi non minus quam aliis ad eam inveniendam viam præcludant. In iis quoque, quæ dubia ſunt, unus non ægre fert diſſenſum alterius, quantuſcunque fuerit; nec propter diſſenſum unus alterius laudi detrahit, multo minus eundem inſectatur,

quem-

quemadmodum denuo ab aliis eruditis fieri assolet. Quamobrem & nos in dubiis adversas sententias recensuimus, citra injuriam in ullum dissentientium; & unicuique liberum reliquimus, cuinam illarum accedere velit, aut num inter extremas mediam amplecti malit.

§. 302. Qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, sive in Mathesi acquiescere, sive intellectum in usum philosophandi perficere velint, iis multa suppeditabit Astronomia. Etenim a parvis initiis continuo crevit, & per multiplices ambages ad ea tandem accessit, quæ a cognitione humana maxime remota videbantur. Ad progressum adeo Astronomiæ animum maxime attendere debet, qui artificia cognoscere studet, quibus abdita Naturæ rimari datur. Pars ejus sphærica multo facilior theorica. Quamobrem de illa nobis primum sigillatim dicendum. Capite primo recensuimus observationes communes, ac inde prima Astronomiæ sphæricæ principia stabilivimus. Observationes communes sua sese sponte offerunt cœlum contuentibus, nec vulgi captum transcendunt. Atque adeo liquet prima principia esse Astronomo cum vulgo communia. Neque etiam aliter fieri potuit, quam ut, qui primus de Astronomia cogitavit, aliunde notiones aliquas distinctas acquireret ad ulteriora profuturas, quam reflectendo super iis, quæ nemo ignorat, nisi rationis usu omni destitutus. Per hasce communes observationes, cœlum percipitur instar sphæræ cavæ, in cujus centro Terra est, cui insistimus, & cujus superficiei affixæ sunt stellæ, quæ autem circa Terram continuo revolvitur. Vulgo hæc notio confusa est; sed Astronomus, qui notionem sphæræ distinctam ex Geometria hausit, eam applicans ad ea, quæ percipit, distinctam consequitur notionem. Atque ita Astronomiæ studiosus, immo primus ejus inventor ultra vulgus sapere cœpit, dum, notione communi ad distinctam revocata, aditum sibi ad ulteriora pandit; cum vulgus in confusa acquiescens ulterius progredi nequeat, sed in iis, quæ percipit, subsistere teneatur. Quæritur vero jam, an quod apparet revera quoque ita se habeat; nimirum an cœlum sit sphæra cava, an Terra sit in centro ejus, ibidemque quiescat, an cœlum circa eandem continuo rotetur, an stellæ omnes superficiei ejus sint affixæ? Hoc pacto liquet, quomodo statim inventori plura invenienda sese offerant. Quodsi ponas eum esse circumspectum, ne per præcipitantiam statuat; ad quæstiones hasce animum advertens, eas omnes hinc pendere animadvertit, num semper quod apparet ita quoque revera sese habeat. Ponamus Opticam nondum esse inventam, quemadmodum probabile est Astronomiæ eandem ortum suum debere: nemo non videt re-

currendum fuiſſe ad obſervationes communes de iis, quæ nobis apparent. Videtur nobis cœlum ſphæra cava, in cujus centro ſumus; quod ſtellæ omnes eandem diſtantiam a Terra habere videntur; nullumque corpus aliud inter oculum & ſtellas interpoſitum apparet. Quodſi ergo experientiam communem conſulimus; objecta remota, etſi aliquo intervallo a ſe invicem diſtent, eodem tamen a nobis abeſſe videntur, ubi inter ea nullum aliud corpus interpoſitum conſpicimus; veluti dum arborem in agro a ſylva procul adhuc remotam huic conterminam videmus e longinquo. Incertum adeo eſſe cognoſcimus, num cœlum ſit ſphæra cava; num ſuperficiei ejus affixæ ſint ſtellæ; num denique Terra ſit in centro. Cumque ex obſervationibus communibus hæc decidere non detur; quid ſtatuendum ſit, dubitandum; neque hactenus apparet, quomodo a dubitatione liberari queamus. Immo ex progreſſu patebit, non adeo facile fuiſſe, ut ab eadem liberaremur. Non plura ſecula, ſed integri millenarii elapſi ſunt, antequam aliqua ſaltem probabilitatis ſpecie ſtatui potuerit, quid veritati conſentaneum videatur. Liquet adeo, a præcipitantia non abeſſe, qui ſcepticiſmum amplectuntur, quamprimum animadvertunt ſe a dubitatione liberari non poſſe, adeoque veritatem fruſtra quæri ſibi aliiſque perſuadent. Quodſi jam porro diſpiciant, num quod quieſcere videtur, revera quieſcat, & quod moveri videtur, revera moveatur; obſervationes denuo communes loquuntur, quieſcentibus in re celerrime mota, quæ quieſcunt in partem contrariam ferri videri; veluti dum curru celerrime vecto per ſylvam arbores nobis in eodem ſedentibus in plagam contrariam currere videntur, vel dum littora moveri in partem contrariam in navi celerrime mota ſedentibus apparet. Quamobrem denuo in dubitationem adducimur, utrum Terra quieſcat, & cœlum circa eandem rotetur; an vero ſtellæ quieſcant & Terra motu vertiginis in plagam contrariam convertatur. Liquet autem, ut ante, ex obſervationibus communibus decidi minime poſſe, a qua parte ſtet veritas. Quodſi ergo qui primi ad Aſtronomiam animum appulerunt, ſcepticiſmo locum dare voluiſſent; omni adhuc Aſtronomia careremus. Enimvero quid faciendum erat in hiſce anguſtiis conſtitutis? Ea tanquam dubia erant notanda, & obſervationes communes ulterius expendendæ, num forſan per eas major lux ſit affulſura, & an nos deducant ad alia intellectui magis obvia. Quodſi hoc facias, in notionem ortus & occaſus incidis, quemadmodum capite primo oſtendimus; quos ubi invicem confers notionem habes moræ ſupra horizontem. Secundam porro obſervationem expendens, continuam ſtellarum ſitus reſpectu

ſpectu

ſpectu verticis tui variationem deprehendis, diſtantia a vertice a primo ejus ortu continuo decreſcente, donec ad minimam pervenerit, & deinde rurſus creſcente, donec ad maximam regreſſa in parte cœli oppoſita occidit. Præterea hinc diſcimus, continuo alias ſtellas oriri; eas autem, quæ per aliquod tempus conſpicuæ fuerant, denuo occidere. Hæc ubi diſtincte conſiderantur, quærendorum ſeſe offert numerus; nimirum quando ſtella aliqua oriatur, quando occidat, quanto temporis intervallo in parte cœli nobis conſpicua commoretur, ſeu quodnam tempus inter ortum atque occaſum intercedat, quænam ſit minima ejus a vertice diſtantia, quandonam ad eandem perveniat, quo tempore ſingulas intermedias in utraque cœli viſibilis parte acquirat. Nemo non videt, phænomena, quæ quærenda animo inſinuant, pendere ab eo quod cœlum, cujus ſuperficiei ſtellæ affixæ ſunt, videatur circa Terram quieſcentem, in qua fixum tuemur locum, moveri, atque ex hoc aſſumto rationem eorundem reddi poſſe. Unde manifeſtum eſt, in gratiam horum phænomenorum, ubi quæſtiones, ad quas nos ea deducunt, reſolvendæ, inſtar hypotheſeos ſumi poſſe; quod cœlum ſit ſphæra cava, in cujus ſuperficie hæreant ſtellæ eidem affixæ, & quæ circa Tellurem in centro ejus quieſcentem continuo gyratur. Quoniam ex anterioribus conſtat, phænomena eadem preditura, ſi Terra in plagam contrariam circa axem ſuum convertatur, cœlo cum ſtellis quieſcente; æquipollentia utriuſque hypotheſeos probe perpendenda: ita enim conſtabit, ubi non quæritur niſi quæſtionum illarum, quas commemoravimus, ſolutio, ſalva veritate ſumi poſſe utramvis; conſequenter in Aſtronomiæ parte prima, quæ de motu communi agit, nos feliciter progredi poſſe, etiamſi ignoretur, quænam harum hypotheſium ſit vera. Enimvero utraque hypotheſis non eadem facilitate ſeſe commendat dictas quæſtiones reſoluturis. In inveniendo itaque & demonſtrando præferenda ea, quæ faciliorem operam parit. Ac ea de cauſa in parte ſphærica Aſtronomiæ ſumitur motus cœli & quies Telluris; ac bona methodus jubet ſumi, etiamſi contrarium verum eſſe invictis argumentis demonſtrari poſſet. Etenim in inveniendo & demonſtrando, præſertim ubi praxin intendimus, hypotheſis vicaria in locum hypotheſeos naturæ ſeu veritatis ſurrogatur; quemadmodum jam vidimus in aliis quoque diſciplinis mathematicis fieri. Hinc itaque eluceſcit, progreſſui Aſtronomiæ ſphæricæ non obeſſe ignorantiam veritatis, ſed, eadem in dubio relicta, non minus praxi ſatisfieri, & in ea ad liquidam veritatem pertingi poſſe, ac ſi a primis dubitationibus prorſus eſſemus liberati. Neque dicendus es a vero aberrare ac

erroribus locum dare; modo caveas, ne per præcipitantiam quoad ea erres quæ sumis. Etsi enim in præsenti negotio error non noceat, nocere tamen potest in aliis; iis scilicet quæ ab eo pendent quod est, non vero ab eo, quod apparet.

§. 303. Probe ea, quæ modo dixi, perpendant velim, qui ad Philosophiam animum appellunt; etsi Mathematicis, qui, antecessorum suorum inventa addiscendo, sibi habitum quendam inveniendi compararunt, talia puerilia videantur & contemnantur; qui tamen contemtui dant pœnas, quoties de rebus philosophicis judicium sibi sumunt, aut superbo supercilio Philosophiam contemnunt omnem, propterea quod quæ in ea vulgo docentur a certitudine, qualis in Mathesi datur, immenso intervallo distant. Quodsi vero acumine quo pollent usi, ad animum revocarent ea quæ modo dixi; haud difficulter animadverterent, Philosophiam hactenus in infantia fuisse; infantiam vero ejus prorsus convenire cum infantia Astronomiæ; quæ, si ob eundem statum negligenda, non educanda fuisset, nunquam ad virilem ætatem adolevisset. Sane non rectius videre licet, quomodo scientiæ philosophicæ, quæ ex communi vulgi notitia tanquam ex semine nascuntur, in primo ortu esse debeant, quam si ad ortum Astronomiæ animum attendant. Quodsi porro eandem attentionem ad progressum ipsius afferant; quid fieri debeat, ut Philosophia quoque humano generi adeo utilis adolescat, haud difficulter perspicient Astronomos imitaturi, quantum fert differentia, quæ inter cognitionem philosophicam & mathematicam intercedit. Demus exemplum. Communi experientia constat, animam in perceptionibus suis dependere a corpore, & vicissim corpus quoad motus organorum externorum & sui totius, ab anima. Hæc dependentia phænomenon est, quale est figura sphærica mundi, cujus superficiei stellæ affixæ & quæ circa Tellurem in centro ejus quiescentem continuo gyratur. Philosophus, perinde ac Astronomus, notionem confusam revocat ad distinctam, animamque a corpore dependere agnoscit, quoad specificationem perceptionum & continuitatem temporis, quo cum mutationibus in organis sensoriis contingunt; & corpus ab anima, quoad specificationem motuum voluntariorum & continuitatem temporis, quo cum volitionibus animæ contingunt (§. 962 *Psych. empir.*); notitionibus adjutus ontologicis quemadmodum Astronomus geometricis. Atque hoc pacto primo passu discedit a cognitione vulgi, sibi aditum paraturus ad ulteriora. Quoniam vero novit, notionibus confusis non esse fidendum, cum per eas appareant haud raro, quæ non sunt; ad hasce quæstiones delabitur, utrum illa dependentia sit realis, an vero saltem appareat; seu num

anima

anima & corpus revera in se invicem agant, & a se invicem patiantur, an vero tantummodo in se agere, & a se invicem pati videantur; quemadmodum Astronomus quærit, num cœlum cum stellis fixis circa Tellurem in centro ejus collocatam revera moveatur, an saltem moveri circa eandem videatur, & utrum Telluris situs revera talis sit, qualis apparet, nec ne. Experientia communi quæstiones suas dirimi non posse, perinde ac Astronomus agnoscit. Quemadmodum enim hic motum cœli circa Tellurem non observat, neque etiam situm ejus in centro sphæræ mundanæ; ita similiter Philosophus nullam observat actionem corporis in animam, nec animæ in corpus (§. 949, 955 *Psych. empir.*). Quodsi dicas, NEWTONUM, virum perspicacissimum, affirmare, actionem illam mutuam animæ ac corporis in se invicem, singulis momentis, nos experiri; facilis est responsio. Acumine summo polluit in geometricis, non vero in metaphysicis: acumen autem Geometræ, quod ab imaginatione pendet, non est idem cum metaphysico, quod imaginationi prorsus subducitur. Quemadmodum itaque per præcipitantiam judicarunt Astronomi, si qui experiri sese sibi visi fuerint figuram mundi sphæricam, situm Telluris in centro ejusdem, & motum continuum circa Tellurem in centro quiescentem; ita quoque per præcipitantiam judicavit NEWTONUS, quando sibi visus fuit experiri actionem mutuam corporis ac animæ in se invicem, qua una substantia in modificationibus suis efficiatur dependens ab altera. Ab hac præcipitantia sibi utique cavisset, siquidem ortum Astronomiæ distincte expendere voluisset, Astronomiam non sibi soli addiscens, sed in usum quoque philosophandi. Quod hoc facere debuerit, minime contendimus, nullius jus violaturi, quod Natura unicuique concessit; utpote qui ab omni injuria procul remotum habemus animum, multo minus ejus laudi detrahere cupimus, quam summam ipsi merito suo magno deferimus; ne quicquam contra humanitatis officia, ad quæ aliis prompte præstanda obligamur, admittamus. Veritati non minus debetur honos suus, quam hominibus præclare de eadem detegenda, & ejus thesauris amplificandis, promeritis. Neque præsumendum est, viros magnos velle, ut, dum laudamus, adulemur; cum adulatio potius ansam det laudibus promeritis detrahendi, quam eas amplificandi, nec ipsi appetere censendi sint nisi veritati consentaneas. Certum adeo manet, Philosophum circumspectum, non minus ac Astronomum (§. 302), in dubitationem adduci, quid de dependentia animæ ac corporis a se invicem, in modificationibus suis, statuendum sit, ubi ejus ratio ex essentia & natura utriusque reddenda;

denda ; quemadmodum eam non aliunde reddendam esse per prima philosophiæ principia edoctus est. Quemadmodum vero Astronomus, in limine Astronomiæ adhuc constitutus, non videt quomodo a dubitatione liberari possit ; ita similiter nec Philosophus, in limine Philosophiæ adhuc constitutus, reperit quomodo ex dubitatione eluctari queat. Quid igitur faciendum? Num animus omnis prorsus abjiciendus & in scepticismum eundum? Absit ut hoc faciat, qui philosophari decrevit! Imitari convenit Astronomum. Inquirendum itaque, num observentur alia, quæ ab ista mutua modificationum animæ ac corporis dependentia a se invicem porro dependent. Videmus a sensatione pendere alios actus facultatis cognoscitivæ, & ab his actus facultatis appetitivæ & aversativæ: videmus etiam actuum non minus internorum animæ, quam motuum organorum corporis, seu actionum externarum, determinationem pendere a nutu animæ ; consequenter eidem competere directionem actionum externarum & internarum quandam. Horum rationem reddi posse apparet ex mutua illa dependentia. In hæc igitur omnia inquirere, & praxes hinc a priori deducere licet ; nondum licet cognita ratione mutuæ illius dependentiæ modificationum animæ ac corporis a se invicem. Quamobrem sicuti in Astronomia sumimus motum communem tanquam phænomenon, & inde deducimus alia, quæ ab eodem pendent, parum solliciti, num revera detur, an saltem appareat; ita quoque, in Philosophia, mutua animæ ac corporis quoad modificationes a se invicem dependentia sumenda tanquam phænomenon, ac inde deducenda sunt alia, quæ hinc porro pendent; nec ea Philosophum tangere debet cura, num illa dependentia realis sit, an tantummodo apparens, & quænam sit ejus causa. Immo cum constet, quæcunque tandem causa sit illius dependentiæ, semper tamen supponendum esse animam & corpus ita agere, ac si in se invicem influerent ; quemadmodum in Psychologia rationali evicimus; si vel maxime falsum esset, animam & corpus in se invicem influere, veritate tamen illæsa, sumi potest tanquam hypothesis naturæ vicaria, quoad regimen corporis, quod animæ tribuitur, immo quoad regimen sui ipsius, quatenus a corpore pendere videtur, animam & corpus in se mutuo influere ; quemadmodum, in Astronomia, quoad motum communem sumimus, cœlum esse sphæram cavam, cujus superficiei affixæ sunt stellæ, & quæ circa Tellurem in centro ejus collocatam ab oriente in occidentem convertitur, etiamsi persuasi simus, hæc a veritate abhorrere, ob rationem paulo ante (§. 302) dictam. Memini cum systema harmoniæ præstabilitæ maxima animorum acerbitate impugnaretur,

tur, quasi per ipsum omnis moralitas, omne regimen politicum, immo omnis religio funditus evertatur, cumque ad avertendum tantum ab eo periculum ista monerem; Theologo cuidam celebri hoc paradoxum, immo absonum visum fuisse. Sed hoc ipsi condonandum erat, tanquam methodi demonstrativæ, ac Artis analyticæ prorsus ignaro, cujus nec notionem ullam, nec exemplum habebat. Ecquis enim est qui nesciat, si vel in sola Mathesi attentionem suam desiderari minime passus fuerit, sine methodi demonstrativæ notitia, nemini esse posse ideam dependentiæ veritatum a se invicem, nec sine Artis analyticæ cognitione constare posse, quænam, etsi nondum definita, sumi queant illæsa veritate ad alia investiganda, quæ usum in praxi habent? Enimvero, si qua sunt quæ a causa illius mutuæ ac corporis dependentiæ a se invicem dependent; tum ea non amplius sumitur tanquam vera, nisi demonstratum fuerit, utrum ea realis sit, an tantummodo apparens; quemadmodum in parte theorica, Astronomi non amplius sumunt Telluris quietem & motum communem, sed potius motum vertiginis Telluris, cœlique ac stellarum quietem. Poteramus alia addere exempla, ex Physica generali pariter, ac speciali, nisi unicum sufficeret, ut intelligatur, quomodo in re præsenti Astronomum imitari debeat Philosophus.

§. 304. Postquam in Astronomia parte sphærica Astronomi sumserunt, cœlum esse sphæram cavam, cujus superficiei stellæ omnes sunt affixæ, & quæ circa Tellurem in centro ejus quiescentem ab oriente in occidentem continuo circumvolvitur; ad hoc phænomenon Geometriam applicarunt, ut alia hinc pendentia determinarent, cum phænomenorum motus primi, sive communis, cognitionem mathematicam quærerent. Quamobrem qui tertium cognitionis gradum intendit, in capite secundo, quod de circulis sphæræ mundanæ agit, ei inquirendum est, quem in finem circulos istos in ejus superficie descriptos imaginentur. Ipsa natura quasi circulum descripsit, qui visum oculi undiquaque terminat, & sphæram mundanam in duo hemisphæria dividit, Horizon ideo dictus. Circulus hic immotus est, dum sphæra mundana continuo volvitur; adeoque ultra sphæram mundanam imaginari tenemur aliam immobilem, in cujus superficie peripheria hujus circuli descripta. Ipsa adeo natura Astronomos deduxit ad distinguendos circulos mobiles ab immotis, antequam perpenderent, quales circuli superficiei sphæræ mundanæ sint inscribendi. Videmus hinc cognitionem Naturæ mathematicam, imaginaria admittere, tanquam principia ex quibus deducitur, & fictionibus locum dare: id quod præpostere imitari minime

debet

debet Philosophus; etsi in nonnullis utiliter imitetur, quemadmodum modo vidimus (§. 303). Hinc vero accidit, quod Mathematici, ad res philosophicas celeri nimis gradu properantes, imaginaria a realibus non distinguant; & notiones in Mathesi toleranter veras, tanquam reales, importuno ausu in Philosophiam inferant; quemadmodum nec alia fuit ratio, quod olim Physici mundum ex sphæris crystallinis cavis compositum finxerint; donec tandem hypothesis insulsa, a TYCHONE DE BRAHE explosa, nullam amplius hodie inveniat fidem. Utinam huc animum serio adverterent, qui, ex Principiis Philosophiæ naturalis mathematicis & Optica Mathematici summi ISAACI NEWTONI, nescio quam Philosophiam *Newtonianam* exsculpere volunt; quasi notiones imaginariæ, quæ ad cognitionem Naturæ mathematicam sufficiunt, & in ea fœcundæ deprehenduntur, in Philosophiam primam & naturalem utiliter inveherentur; immo quasi ex istis notionibus imaginariis inferri possent, quæ ad Theologiam naturalem, & Cosmologiam generalem spectant. Idem enim revera agunt, quod fecere antiqui, qui notionem imaginariam mundi, quæ Astronomo in explicando motu communi adeo proficua fuit, tanquam realem in Physicam inferre ausi sunt. In usum cognitionis mathematicæ multa fingere licet; sed fictiones istæ mathematicæ non sunt veræ causæ, quibus effectus Naturæ intelligibili modo explicantur. Absit autem, ut quis hinc inferat, quasi laudibus Mathematicorum detrahere & supra Mathematicos Philosophos extollere velimus! Neque enim nobis jam propositum est Philosophos cum Mathematicis committere, nec de Jure præcedentiæ controversiam movere. Diversitatem saltem notionum imaginariarum & realium inculcamus; ne in detrimentum scientiæ confundantur, quæ diversa sunt; sed legitimus utrarumque conservetur usus. Nihil decedit laudi Mathematici, etsi non habeatur Philosophus: quemadmodum nec Philosophos laude sua, quam meretur, frustratur quod non simul habeatur Mathematicus. Mathematici & Philosophi in numerum eorum entium referendi, quorum non est ad se invicem ratio; utut maxime consultum sit Philosophum simul esse Mathematicum, præsertim ubi in Philosophia ad tertium cognitionis gradum adspirat; cum Mathematicus in arte sua summus esse possit, utut nullam inter Philosophos laudem mereatur.

§. 305. De sphæricorum theoria non ante cogitarunt Geometræ, quam cum Astronomia ad eandem eos invitaret. Qui ergo ad tertium cognitionis gradum adspirat, ei suademus, ut primo, in usum secundi, totum caput secundum perlustret, & quomodo principia illius theoriæ ad sphæ-

ſphæram mundanam applicentur expendat, donec ſingula, quæ hic explicantur & demonſtrantur, habuerit perſpecta; parum ſolicitus, quomodo primi inventores in ea incidere potuerint. Enimvero ubi ſingula ipſi probe cognita atque perſpecta fuerint; jam ſecundis curis idem caput perluſtret; atque jam ſupponat, quaſi nulla adhuc proſtaret ſphæricorum theoria; & inquirat, quomodo ſuppoſito phænomeno, (quod veluti baſis eſt totius Aſtronomiæ ſphæricæ, tanquam fonte rationum de ceteris quæ quæruntur reddendarum, dum in phænomenorum motus communis rationes inquirimus,) in circulos, quæ in ſphæræ ſuperficie concipi debent, aut ſi mavis tanquam ſphæram ſecantia plana conſiderantur, incidamus. Immo non inconſultum erit, ſi ante, quinque priora capita, in uſum ſecundi gradus cognitionis, pertractet, quam quæ in uſum tertii perpendenda ſunt, exquirat; quoniam hoc pacto evidentius ipſi conſtabit, quænam ſint phænomena motus communis in hac Aſtronomiæ parte determinanda; ſicque facilius apparebit, quonam circulorum apparatu ea fini ſit opus. Dum vero curis ſecundis caput ſecundum percurrit, attentione inprimis opus eſt, ut obſervetur, quomodo theoria imperfecta nos deducat ad obſervationes, quibus perficiatur, ſimulque ad obſervationes, quibus ad praxin aptatur. Ex. gr. Vi phænomeni fundamentalis, ſphæra mundana circa Tellurem continuo circumvolvitur. Enimvero quæritur an puncta illa fixa circa quæ rotatur, & qui poli dicuntur, ſemper ſint iidem; an vero mutentur. Quid ſumi debeat, per obſervationes definiendum. Similiter, cum motus vel æquabilis, vel inæquabilis, eſſe poſſit, & celeritas in diverſis revolutionibus vel eadem, vel diverſa; denuo quid ſumendum ſit per obſervationes definiendum. Equidem per modum hypotheſeos ſumi poteſt, polos ſemper manere eoſdem, motum non modo eſſe æquabilem, ſed eandem quoque eſſe in qualibet rotatione celeritatem. Enimvero, ubi examinanda hypotheſis, ad obſervationes tandem confugiendum. Atque adeo videmus, quomodo theoria imperfecta beneficio obſervationum reddatur perfectior. Similiter, ubi per theoriam agnoſcis Meridianum ſecare hemiſphærium in duas partes æquales, & in eodem altitudines ſtellarum eſſe maximas, ſeu diſtantias a vertice minimas quas habere poſſunt; in uſum praxis ſitus Meridiani determinandus eſt reſpectu tui loci. Nec abſimili modo patet ſitum quoque poli reſpectu loci tui determinandum eſſe. Deducit adeo nos theoria ad obſervationes, quibus eadem ad praxin aptatur. Unde liquet, quomodo ea, quæ per meditationes deteguntur, ulterius quærenda inſinuent, de quibus ante cogitare non poteras. Probe autem notan-

dum est, quomodo observationes sine circulo vitioso, quem Logici vocant, instituantur, quando utraque alteram supponere videtur, quales subinde in Astronomia occurrunt. Habemus exemplum, in invenienda linea meridiana, ad determinandum planum meridiani in dato loco §. 120. Etenim ea supponit stellæ declinationem, vel etiam Solis intra tempus observationis non mutari. Supponit observatio immutabilitatis declinationis immutabilitatem poli, quæ ex immutabilitare altitudinis maximæ, adeoque in plano meridiani, demonstratur §. 114. Quod si tamen perpendas, quæ §. 110 *& seqq.* docentur; videbis, quomodo absque periculo circuli vitiosi committendi hæc dirimantur. Equidem non negaverim, initio Astronomos plurima sumsisse per modum hypotheseos, quemadmodum idem quoque haud raro fieri debuisse ex Theoricis constabit; & cum ex istis hypothesibus deducta cum cœlo, deinceps per alias observationes, consentire deprehenderent; assumtis demum plenum assensum præbuisse: hoc tamen minime obstat, quo minus Astronomiam methodo synthetica traditurі ostendamus, quomodo scrupulosiores in infantia statim Astronomiæ certitudini prospicere potuerint; cum nobis propositum sit eam ita tradere, ut methodum imitari liceat, non modo in Philosophia naturali, verum etiam in aliis ejus partibus, ubi a posteriori quædam stabilienda, ut alia inde deduci queant.

§. 305. Qui tertium cognitionis gradum intendit, problemata per Trigonometriam sphæricam soluta analytico more expendere debet. Artificium heuristicum, quo hic utendum, in eo consistit, ut interfectione circulorum sphæram secantium detegatur triangulum, cujus id, quod quæritur, pars aliqua est, sive latus, sive angulus; ac præterea attendatur, num per observationem, principia sphærica, aut calculos præcedentes dentur tres ejusdem trianguli partes aliæ. Constat enim ex tribus datis per Trigonometriam sphæricam semper inveniri posse quartum, quod quæritur. Facillimum exemplum præbet problema quartum §. 198, quo inveniri jubetur puncti cujuscunque dati Eclipticæ declinatio. Quoniam declinationem metitur arcus circuli maximi, inter æquatorem & punctum datum interceptus, atque ad æquatorem perpendicularis (§. 76 *Astron.*), qui circulus declinationis dicitur (§. 78 *Astron.*); hinc colligitur, animum advertendum esse ad æquatorem, eclipticam & circulum declinationis. Quamobrem in charta describitur circulus, qui sphæram mundanam repræsentare fingitur; cumque situs æquatoris dependeat a polis mundi (§. 48 *Astron.*); in eo sumitur pro arbitrio punctum P, quod polum repræsentet. Jam æquator sphæram mundanam in duo hemisphæria dividit (§. 50 *Astron.* Tab. IV. Fig. 40.

Aſtron.), & ſingula ejus puncta a polo mundi quadrantis intervallo diſtant (§. 49 *Aſtron*). Ex polo igitur P, intervallo quadrantis AP, deſcribitur circino arcus AQ, qui æquatorem repræſentat. Cum polus eclipticæ certo intervallo a polo mundi P diſtet (§. 179 *Aſtron.*), & illa æquatorem ſecet (§. 172 *Aſtron.*); pro arbitrio ſumitur punctum M tanquam polus eclipticæ & ex eo quadrantis intervallo ME deſcribitur arcus EL, qui eclipticam repræſentat, & æquatorem AQ in G ſecat. Cum circulus declinationis tranſeat per polos mundi P & *p* (§. 78 *Aſtron.*) & ex principiis ſphæricis pateat, quod poli ejus ſint in æquatore, punctum vero S in ecliptica pro lubitu ſumi poſſit; deſcribatur denique arcus PSD, qui quadrantem circuli declinationis repræſentat (§. 79 *Aſtron.*). Patet hoc modo interſectione æquatoris, eclipticæ & circuli declinationis obtineri triangulum DGS in ſuperficie ſphæræ mundanæ, cujus crus DS repræſentat declinationem puncti eclipticæ S, quæ quæritur. Inquirendum igitur porro eſt, num in eodem triangulo tria tanquam aliunde cognita deprehendantur. Quoniam itaque punctum eclipticæ S, cujus declinatio quæritur, pro lubitu ſumitur a Tabularum conditore, aut in alio caſu datur; in priori caſu punctum G, in quo ecliptica æquatorem ſecat, ſumi poteſt, vel pro principio arietis, vel pro principio libræ (§. 158, 160 *Aſtron.*), in poſteriori ex dato puncto eclipticæ patet, num punctum G repræſentet principium arietis, an vero principium libræ. Ponamus in præſenti punctum G eſſe principium arietis. Quia punctum eclipticæ S datur, ejus diſtantia a principio arietis ſeu arcus eclipticæ SG datur. Datur præterea angulus obliquitatis eclipticæ per obſervationem (§. 163, 178 *Aſtron.*). Et ex ſphæricis conſtat angulum ad D eſſe rectum (§. 76 *Aſtron.*). Habemus itaque in triangulo DGS tria data, nimirum angulum rectum D in interſectione æquatoris AQ & circuli declinationis PD, angulum obliquitatis eclipticæ G, diſtantiam SG puncti eclipticæ S a puncto æquinoctiali G. Inveniri autem debet latus DS angulo obliquo G oppoſitum: id quod fieri poſſe, per Trigonometriam ſphæricam patet. Videmus adeo, qua analyſi reſolutio problematis de invenienda declinatione puncti cujuſcunque eclipticæ fuerit inveſtigata, & ex hac analyſi facile condi poterat demonſtratio problematis ad morem Veterum Geometrarum, ſiquidem tanto rigore demonſtrandi foret opus. Nimirum qui ad Aſtronomiam accedit, cum in Elementis Arithmeticæ, Geometriæ, Trigonometriæ utriuſque & ſphæricorum, Opticæ item, Catoptricæ atque Dioptricæ jam ita verſatus ſupponatur, ut, quæ in iſtis Ma-

theſeos partibus traduntur, familiaria experiatur, in Methodo demonſtrandi jam ſatis exercitatus eſt, ut non minutiſſima quæque ipſi enucleari ſit opus. Non tamen inconſultum eſt, ut, qui intellectus perficiendi gratia Matheſi operam navat, eodem rite extra eandem uſurus, analyſi quam hic commendamus ſedulo incumbat, ac ſyntheticas demonſtrationes hinc eruat.

§. 306. Qui in ſeipſis experiuntur ſe, abſque iſta analyſi quam hic urgemus, ſine mora ſchemata delineare, & triangulorum reſolutiones invenire poſſe, ac abſque demonſtratione hinc derivata, veritatem ſolutionis problematum propoſitæ perſpicere; tantum apparatum condemnabunt, ac tempus inanibus ſpeculationibus falli exiſtimabunt, quod longe utilius in aliis addiſcendis collocari queat. Immo non deerunt, qui, cum inter Aſtronomos merito ſuo emineant, analyſin iſtam ac derivatas inde ſyntheticas demonſtrationes inter ſuperflua referent; forſan tanquam puerilia prorſus ridebunt. Quamobrem apprime neceſſarium videtur, ut quædam ad avertendum præjudicium philoſophaturo admodum nocuum annotemus. Nemo in dubium vocare poteſt, omnibus iſtis notionibus quæ analyſin noſtram ingrediuntur, animum ejus imbutum eſſe debere, qui proprio marte ſolutionem problematis de inveſtiganda declinatione ſingulorum graduum, aut puncti cujuslibet eclipticæ invenire, aut veritatis ejuſdem, ubi ab alio inventa ſupponitur, plene convinci debet. Pone enim quamcunque illarum eſſe tibi incognitam; extemplo conſtabit, tibi de veritate ſolutionis dubium aliquod adhuc ſupereſſe; conſequenter abeſſe convictionem, quæ omnem dubitationem excludit. Notiones igitur iſtæ omnes influunt in determinationem aſſenſus, quem præbes ſolutioni tanquam veræ. Quamobrem ſi diſtincte exponendum, quomodo generetur aſſenſus, & qui fieri potuerit, ut a priori in ſolutionem problematis inciderit primus inventor; nulla illarum notionum prætermittenda; ſit ita quod inventor, vel qui ſolutionem jam inventam addiſcit, in confuſis notionibus acquieſcat, nec quæ ideæ a qua pendet convictio inſunt, ſingula a ſe invicem actu mentis diſcernat. Sane cum Philoſophi ſit rationem reddere iſtius aſſenſus ac modi, quo ad ſolutionem problematis inventor pervenire potuerit; nemo niſi cognitionis philoſophicæ contemtor reprehendet, quod quæ actibus animæ inſunt diſtincte explicet, utut utilitatem non pervideat. Hanc vero eſſe maximam, ſi quis animum ad philoſophandum appellit, haud difficulter oſtenditur. In Aſtronomia, ſchemata, notiones, quas antea tibi comparaviſti, imaginationi præſentes ſiſtunt; ut confuſa quædam idea animum attendenti ſufficiat ad veritatem proti-

protinus perſpiciendam. Enimvero in Philoſophia, præſertim in Metaphyſicis ac Moralibus, iſtiuſmodi ſubſidio destituimur, quo imaginatio apta efficitur ad vicarias intellectus operas præſtandas; nec confuſis ejus ideis tuto fidere licet, ſiquidem errandi periculum ſubire nolueris. Ipſe igitur intellectus agere debet, quod ſuum eſt; adeoque non admittendæ ſunt niſi notiones diſtinctæ, nec in exacta earundem evolutione unquam nimii ſumus; ſiquidem eam deſideraverimus evidentiam, quæ in Matheſi datur. Quamobrem ut evolutioni huic adſueſcamus, conſultum omnino eſt analyſin problematum primi mobilis inſtituere, quemadmodum præcepimus: id quod in Aſtronomia multo facilius ſuccedit, quam in Philoſophia; quia intellectus dirigitur ab ipſa imaginatione, modo ad imaginem, quæ ob oculos verſatur, animum attendas; cum, in Philoſophia, imaginatio ac ſenſus ſuppetias ferre nequeant, ſed intellectui magis obſtaculo ſint, ne ſuo munere dextre fungatur. Non ſuadeo niſi experta & quorum veritatem in ſeipſo experiri poterit, qui voluerit. Quicquid igitur videatur aliis, qui Aſtronomiæ totos ſeſe dederunt, nec Philoſophiæ excolendæ operam impendendi otio fruuntur; ego iſtam Analyſin admodum proficuam judico omnibus, quotquot ad hanc excolendam animum appellere decreverunt. Neque enim exiſtimandum eſt levi opera conſequi te poſſe, ut methodo demonſtrativa in philoſophando rite utaris. Plurima enim ſunt, ad quæ per exempla felicius, quam per præcepta patet aditus: exempla vero tutiſſima offert Matheſis, ſi accurata demonſtrationum analyſis curæ cordique fuerit. Nos, quibus methodi intimius cognoſcendæ cupido ſtudium Matheſeos commendavit a prima ætate, Matheſin quoque hoc nomine maximi facimus. Non jam commemorare lubet, quod diſtincta uſus facultatum animæ explicatio augeat ſcientiam philoſophicam, & quod eum cognoſcere teneatur Philoſophus, ſi in Philoſophia morali tradere velit, quæ ſatis faciunt: hic enim, ubi intellectus perficiendi nonniſi ratio habetur, ad methodum tantummodo digitum intendimus.

§. 307. Non lubet ad particularia deſcendere, quæ utiliter moneri poterant: neque enim conſultum eſt, ut prima ſtatim vice minutiſſime perſequatur ſingula, qui intellectus perficiendi gratia ad ſtudium aſtronomicum accedit. Quodſi enim hiſce tantummodo obſervatis, quæ docuimus, ad ſtudium pſychologicum & ontologicum acceſſerit; in Ontologia & Pſychologia probe verſatus, proprio, quod acquiſivit, acumine deteget, quæ adhuc annotari poterant. Merentur autem attentionem, quæ de refractione, parallaxi, & crepuſculis dicuntur; eo etiam fine, ut intel-

intelligatur, quam necessarium sit experientiæ & rationis connubium, ne per theoriam fieri posse videantur, quæ tamen in praxi minime succedunt. Nimirum qui experientiam negligit, subinde fieri posse sumit, quæ ob circumstantias a priori non definiendas haud quaquam fieri possunt. Unde contingit nos incidere in resolutiones problematum, quibus satisfieri nequit. Observanda hæc sunt Philosopho, non minus in Philosophia morali, quam civili; ne sibi jam consecutus videatur, quæ adhuc in quærendorum numero sunt; & a veritate inquirenda desistat, quam detegere in potestate ipsius erat, modo præjudicio isto non habuisset mentem præpeditam.

§. 308. Pars theorica Astronomiæ ad perficiendum intellectum, ut eodem extra Mathesin utaris, plurimum confert; modo omnem afferas attentionem ad methodum, tantopere a nobis commendatam, & tam sollicite inculcatam. Capite primo & secundo, in quibus de natura Solis ac Lunæ, ceterorumque planetarum, tam superiorum, quam inferiorum, eorumque satellitum agitur; docentur, quæ ad Physicam magis, quam Astronomiam spectant, etsi Astronomus jure suo sibi ea arroget, quæ observationibus suis debentur. Quamobrem hinc discere licet, quomodo utiliter in Philosophia naturali, seu Physica, sit versandum; nimirum quomodo quærendæ sint observationes tam communes, quæ sua veluti sponte sese offerunt, quam studio quæsitæ; ac inde a posteriori colligantur propositiones, quas a priori detegere non dabatur, principiis ad ratiocinandum necessariis deficientibus. Nos in Physica dogmatica, quam idiomate patrio evulgavimus, eandem viam ingressi sumus. Etsi autem facilis videatur hæc methodus; non tamen adeo facilem deprehendet, quantum putat, qui eadem rite uti voluerit. Nimirum acumine nonnisi multa exercitatione acquisito opus est, ne observationibus inserantur, nisi quæ sensui patent; ut eædem ab omni prorsus vitio subreptionis, quod in Logica vocamus, sint liberæ: qua in re multum peccatur a Medicis, utut virorum experientissimorum titulum, quasi sibi proprium, dudum consecutis. Neque facilius est facta, quæ observantur, notione distincta comprehendere, & verbis aptis singula in eadem contenta enunciare, ut certi quid inde concludi possit. Artis præterea est, nec plus, nec minus inde colligere, quam certo ratiocinio inferri potest. Qui his accurate satisfacere voluerit, etsi in demonstrando nihil difficultatis deprehendat, nondum tamen ex voto omnia sibi succedere experietur. Quamobrem ad observationes, quas commemoramus, animum probe attendat; ut idea exemplaris eas rite describendi animo insinuetur; nec minorem attentionem afferat ad corol-

laria

laria, in quibus propositiones ex iisdem eliciuntur; ut modum stabiliendi per observationes principia, seu ex iis eruendi propositiones, comprehendat. Utilitatem non modo in Physica, verum etiam in ipsa Philosophia morali & civili experietur. Inprimis etiam eandem animadvertet, qui Medicinam ad majorem certitudinem perducere voluerit. Sed memini me de hisce jam plura dixisse, in Horis subsecivis, cum de Medico Astronomum imitante verba facerem. Non inanem operam sumet, qui ea, quæ in Logica de experientia præcipiuntur, cum observationibus ac inde deductis propositionibus confert: ita enim facilius intelliget regulas methodi, quas proprio marte abstrahere non poterat. Immo praxin Logicæ, quoad hanc partem, hoc pacto sibi comparabit. Qui novit, quantam utilitatem nobis afferat cognitio a posteriori acquisita; eum nunquam pœnitebit studii, quod in methodo hac intimius perspicienda collocaverit.

§. 309. Theoricam tradidimus juxta hypothesin COPERNICI, atque KEPPLERI; nimirum supposito Terræ motu, & orbitis Planetarum ellipticis; in quibus Planetæ ea lege incedunt, quemadmodum sagacitate sua primus detexit KEPPLERUS; propterea quod sic prodit theoria cum cœlo omnium maxime consentiens. Etsi autem methodum *Kepplerianam* exposuerimus computandi loca Planetarum; non tamen negleximus, quæ recentiorum industria, postquam Geometria & Astronomia magis exculta fuit, ad ejus perfectionem ulteriorem accesserunt. Quodsi tamen quis tertium cognitionis gradum intendit, ei suademus, ut, probe intellectis iis, quæ de motu Planetarum elliptico traduntur, Astronomiam quoque veterem perlustret, qualem tradidit PTOLEMÆUS, juxta Epitomen a REGIOMONTANO factam, & in subsidium vocato RICCIOLI *Almagesto*, in quo exponuntur, quæ ad eam magis excolendam post eum accesserunt. Hinc enim omnium optime addiscet, quomodo Philosophia naturalis per hypotheses sit excolenda, ubi ad veritatem liquidam pertingere non licet; & eundem morem imitabitur in Medicina ad certitudinem successive evehendam; immo in reliqua etiam Philosophia, præsertim practica, ac ipsa praxi vitæ humanæ. Equidem non ignoro esse hodie nonnullos, qui omnem hypothesium usum in Philosophia naturali & Medicina damnant; sed hi, propter abusum, ipsum etiam usum rejiciunt: id quod sine scientiæ incremento haud quaquam facere licet. Diximus nonnulla huc spectantia in Discursu præliminari de Philosophia, quem Logicæ præmisimus, methodum philosophicam explicantes. Laudant quidam NEWTONUM, quod ex Philosophia naturali eliminaverit hypotheses; qui tamen hypothesibus indulget in iis ipsis, in quibus eum ab iisdem abstinuisse existimant. Quid enim at-

tractio, seu gravitas universalis quæ per modum attractionis repræsentatur, aliud est quam hypothesis, quæ in gratiam quorundam phænomenorum sumitur, & ad omnem deinde materiam extenditur? Immo nonne explicatio systematis mundani, quæ præcipua pars est Principiorum Philosophiæ naturalis mathematicorum, per motum projectionis, & gravitationem in Solem, aut centrum Planetæ primarii, hypothesis philosophica est; quam HEVELIUS in *Cometagraphia*, ad imitationem motus projectorum a GALILÆO detecti, imaginatus est, & quæ in Mathesi utiliter surrogatur in locum hypotheseos naturæ; phænomenorum autem causas physicas non attingit, quas scrutari debet Physicus? Facile quidem largior hoc non videre eum, qui soli Mathesi assiduam operam navavit, ac ideo notionibus imaginariis animum imbutum possidet: extemplo tamen videt, qui cum Matheseos studio Philosophiæ, præsertim Metaphysicæ, studium conjunxit. Sed mittamus hæc, & per nos suo quisque abundet sensu. Videamus potius, quomodo in cognoscenda methodo, per hypotheses cognitionem humanam promovendi, sit progrediendum. Quemadmodum in anterioribus observavimus, omnem cognitionem humanam initium capere ab observationibus communibus; ita similiter de parte Astronomiæ theorica idem dicendum. Ex observationibus communibus innotuit motus proprius Solis (§. 27 *Astron.*): quo scilicet indies, ab occasu versus ortum, certo intervallo promovetur (§. 30 *Astron.*): non tamen tanquam verus; cum applicata Mathesi ad observationem constet (§. 571 *Astron.*), motum Solis eodem modo e Tellure spectari, sive ipse circa Terram intra orbitam quiescenrem revera moveatur, sive Terra circa Solem quiescentem feratur. Quando itaque Astronomus sumebat Terram quiescere, & Solem motu annuo circa eandem ab occasu in ortum moveri; quod sumebat, hypothesis erat, quæ, admisso motu vertiginis Telluris, hypothesi naturæ æquipollet; si quod autem sumitur a veritate alienum, admisso motu communi tanquam vero, hypothesis nonnisi imaginaria est, cui adeo in Mathesi quidem locus conceditur, minime autem in Physica. Finge jam Astronomum noluisse uti hypothesi: nemo Astronomiæ gnarus diffitebitur, eum statim in limine nobilissimam hanc scientiam deserere debuisse, nulla spe ad veritatem liquidam perveniendi relicta, absque conjecturis hypothesi innixis. Immo si quis, posito motu communi tanquam vero, hypothesin imaginariam de motu Solis communi, in Philosophiam naturalem, tanquam veritatem, inferre voluisset; ecquis sanus Philosophus hoc approbare potuisset, propterea quod ea satisfacit Astronomo ad cognitionem mathematicam motus proprii Solis acquirendam? Ex observationibus itidem communibus, sed majore attentione factis, constabat, Solem ab eodem puncto digressum ad idem redire.

Hinc

Hinc pronum erat inferre, quod Sol motu proprio feratur per lineam in se redeuntem, intra cujus ambitum collocata Terra. Enimvero cum infinitæ sint lineæ in se redeuntes, quemadmodum ex Geometria constat; quæstio incidebat, quænam linearum in se redeuntium sit orbita Solis. Ex Geometria elementari notum erat, in harum numero esse circulum, cujus proprietates & symptomata sunt magis obvia quam ceterarum. Sumebant igitur Astronomi, per modum hypotheseos, orbitam Solis esse circularem. Quodsi hypothesi uti noluissent, non sumendum esse contendentes, nisi quod sit demonstratum; impossibile fuisset, ut theoriam motus Solis cœlo consentientem detegerent, & Astronomia adhuc deserta & inculta jaceret. Enimvero, quemadmodum in veritate investiganda accidit, ut, si uni quæstioni satisfacias, quantum datur, nimirum vel veritatem detegendo, vel conjecturæ locum faciendo, enascantur aliæ; ita etiam in casu præsenti jam quærebatur, in quonam puncto, intra ambitum circuli sito, posita sit Terra. Ex Geometria elementari tyronibus notum est, circulum AHPI habere centrum C, a quo singula puncta peripheria AHPI æqualiter distant. Quæstio igitur huc redibat, num Terra sit in centro orbitæ C, an vero extra centrum veluti in T. Eam dirimere non licebat, nisi denuo interea alterutro assumto tanquam vero, consequenter confugiendo ad hypothesin. Nullum adeo est dubium, quin primus inventor sumserit, veritatis investigandæ gratia, Terram esse in centro C. Inquirendum ergo erat, quomodo loca Solis definiantur ad datum tempus, in hac hypothesi, ut locus Solis computatus cum eo, qui per observationem eruitur (§. 203 *Astron.*), conferri, sicque hypothesis ad examen referri posset. Hoc ubi investigare volebat Astronomus, cum per principia Geometriæ elementaris ipsi perspectum esset, si arcus AD & DE sint æquales, angulos ACD & DCE esse æquales (§. 141 *Geom.*); nova incidebat quæstio, utrum Sol motu æquabili incedat in orbita sua, ut arcus AD & DE æquali tempore percurrantur, an vero inæquabili, ut iidem arcus absolvantur tempore inæquali. Nemo non videt, hic denuo confugiendum fuisse ad hypothesin, alterutrum horum assumendo tanquam verum; donec examen hypotheseos, per observationes decretorias, proderet quod certum est. Cum motus æquabilis sit uniformis, & intellectu facilior inæquabili; legibus artis conjectandi, quibus in assumendis hypothesibus locus est, conveniens erat supponere, quod sit æquabilis. Unde enascebatur hypothesis Solis concentrica, qua Sol supponitur motu æquabili incedere in orbita sua secundum signorum successionem, Terra in centro ejus collocata. Atque hoc pacto hypothesis sufficienter determinata erat ad calculum geometricum instituendum; ut adeo non alia re opus esset, quam

Tab.IV. Fig. 41. (margin, left column at "Terra. Ex Geometria")

Tab.IV. Fig. 41. (margin, right column at "investigare volebat")

ratiocinando hinc colligere, quæ ad eum spectant. Si Sol motu æquabili percurrit orbitam; arcus, quos percurrit AF & FG, consequenter etiam anguli ACF & FCG, sunt tempori proportionales. Quamobrem, ut dato tempori respondens angulus ACF, seu arcus AF, computari possit, notum esse debet, quo tempore Sol integram orbitam percurrat: quod cum sit facti, aliter innotescere non poterat, nisi per observationem. Observari nimirum debebat, tempore quodam, locus Solis in dato aliquo puncto A; ac porro observandum, quo tempore ad idem redeat punctum. Etsi autem initio indifferens videretur, quodcunque punctum eligatur; ubi tamen ad observationem accedebat Astronomus, non commode observari posse tempus advertit, quo Sol ad idem punctum promiscue assumtum redit. Quoniam itaque planum æquatoris determinari potest independenter a theoria Solis (§. 149 *Astron.*); commodissima videbatur huic instituto observatio appulsus Solis ad æquatorem; modo constaret, æquatorem constanter secare orbitam Solis in eodem puncto, seu, astronomice loquendo, puncta æquinoctialia esse fixa. Sumebatur hoc primum denuo per modum hypotheseos, & inquirebatur in modum observandi tempus, quo centrum Solis ad æquatorem appellit. Et sic incidebatur in armillas æquatoreales, quibus Veteres observasse æquinoctia novimus. Quoniam sic, etsi adhuc ruditer constare poterat quantitas anni solaris, si momentum æquinoctii vernalis sumebatur pro epocha; per regulam trium computari poterat locus Solis ad datum quemvis diem in hypothesi concentrica, quemadmodum docuimus (§. 672, 673 *Astron.*). Quodsi jam loca computata conferebantur cum observatis (§. 203 *Astron.*); illa cum his minime consentire deprehendebantur; adeoque hypothesin concentricam a veritate alienam esse palam erat. Quoniam igitur Terra intra ambitum orbitæ Solis constituitur, centrum illius extra centrum hujus situm esse debet in hypothesi circulari. Atque adeo in locum concentrici circuli sumebatur, per modum hypotheseos, circulus eccentricus, retento motu æquabili. Ponamus jam in C esse centrum orbitæ, in T centrum Telluris, in H punctum æquinoctiale unum, in I alterum. Repræsentabit schema hypothesin Solis circularem eccentricam. Inquirendum adeo erat, quænam ex ea consequantur, ut denuo quæ inde colliguntur cum observationibus, quibus inde deducta occasionem præbent, conferri possint. Quia nos Solem ex puncto T intuemur; statim apparebat, distantiam ejus continuo variari, cum TS sit major ipsa TL, eamque in A esse maximam, in P minimam (§. 303 *Geom.*). Atque sic nascebatur notio Apogæi A (§. 636 *Astron.*) & Perigæi P (§. 635 *Astron.*), atque eccentricitatis Solis TC (§. 639 *Astron.*

Tab. IV. Fig. 43.

Tab. V. Fig. 44.

Astron.). Enimvero jam incidebat quæstio, utrum æquinoctium vernale, seu principium arietis supponendum sit in H, an vero in I; item in quo orbitæ solaris puncto, si ad eclipticam referatur, hæreat Apogæum A, in quonam Perigæum P, & quanta sit eccentricitas TC. Nemo non videt confugiendum hic esse ad observationes, quales autem eædem esse debeant, ut sint decisivæ, ex hypothesi deducendum. Quodsi Sol sit in S; patet distantiam ab Apogæo in centro orbitæ C videri sub angulo ACS; ex Tellure autem in T sub angulo ATS: quod cum ita sese habeat per integrum semicirculum HAI; distantia Solis ab Apogæo semper minor videtur, quam revera est in eo semicirculo, in quo hæret Apogæum Solis A. Ex adverso si Sol sit in L, ex centro orbitæ distantia a Perigæo PL videtur sub angulo PCL, ex Tellure in T autem sub angulo PTL, adeoque in semicirculo IPH continuo apparet major, quam revera est, (§. 239 *Geom.* & §. 209 *Optic.*). Consideremus porro Solem in punctis æquinoctialibus H & I. Quodsi spectetur ex centro orbitæ C, distantiæ ab Apogæo A, nempe AI & AH, videntur sub angulis rectis ACI & ACH, ut adeo Sol videatur absolvisse semicirculum, ab uno æquinoctio usque ad alterum, dum revera semicirculum HAI percurrit, in quo Apogæum A hæret: enimvero ex Terra spectantur distantiæ AI & AH ab Apogæo A, sub angulis ATI & ATH, qui sunt rectis minores (§. 239 *Geom.*); consequenter HAI minor semicirculo apparet (§. 209 *Optic.*), adeoque Sol minus temporis spatium consumere videtur in semicirculo HAI, in quo est Apogæum A, quam in altero IPH, in quo hæret Perigæum P. Jam cum porro in semicirculo HAI distantiæ Solis a centro Terræ T sint majores distantiis a centro orbitæ, veluti TS major CS, & in Apogæo A distantia TA sit maxima (§. 303 *Geom.*), in semicirculo autem IPH distantiæ Solis a Terra sint minores distantiis a centro orbitæ, veluti TL minor CL, & in Perigæo P distantia TP sit omnium minima (§. *cit. Geom.*); Sol ipse major videri debet in semicirculo IPH, in quo est Perigæum, quam in semicirculo HAI, in quo est Apogæum A. Quodsi jam meditationem cœptam eodem, quo hactenus, modo continuare velimus; observationes determinare licebit, quales esse debeant, quæ desiderantur. Sed ne justo prolixiores simus, filum abrumpendum est, contentis monstrasse viam, qua sit eundum, quantum ad præsens institutum sufficit. Annotabimus potius alia nonnulla, quæ usui esse possunt illis, qui Matheseos studio intellectum perficere gestiunt, ut eodem rite extra eandem utantur.

Tab. IV. Fig. 45. Tab. IV. Fig. 44.

§. 310. Ex iis, quæ diximus, clarissime perspicitur, quomodo in investigandis veritatibus a posteriori sit procedendum, & quam indispensabilis usus sit hypothesium, ut, si iisdem

uti nolueris, nulla superſit ſpes veritatis unquam detegendæ. Non eſt quod excipias hypotheſibus equidem locum eſſe concedendum in inveniendo, ab iis tamen eſſe abſtinendum in libris, qui publici juris fiunt. Etenim ubi veritates ab iis, quæ nobis perſpecta ſunt, principiis procul remotæ ſunt, ut a priori denegatur ad eas acceſſus; non ſemper unius hominis eſt ea abſolvere, quæ a poſteriori acceſſibilem faciunt: quin potius haud raro ſociæ requiruntur operæ, cum hic valeat illud pervulgatum, oculos plures plus videre quam oculum unum; & ſubinde qui acceſſum parare ſtudet, laborem cœptum aliis continuandum relinquere tenetur. Qui animum ad ea attendit, quæ de theoria Solis investigata modo annotavimus, dictis facilem præbebit aurem; etſi rationes non perſpiciat, quas dare poteramus, ſi prolixiores eſſe liceret. Quamvis igitur, examine inſtituto, hypotheſes deprehendantur a veritate alienæ; non tamen ideo cenſendæ ſunt inutiles; propterea quod aberrando a veritate deducimur ad veritatem, ubi methodo conjecturali opus eſt. Unde memini me ſæpius auditoribus meis inculcaſſe, deberi etiam a veritate aberrantibus ſuas laudes, ubi nobis errandum fuiſſet, niſi ipſi priores erraſſent. In aliorum enim meritis cenſendis æqui eſſe debemus, ne quid admittamus, quod contra officium boni viri eſt. Nemo Aſtronomus vitio vertet ei, qui primus de theoria Solis cogitavit; ſi hypotheſin motus æquabilis in orbita concentrica excoluerit, utut ſucceſſores eam a veritate alienam examine per obſervationes inſtituto deprehenderint. Videt enim eum feciſſe, quod initio faciendum erat, & aliis perficiendum reliquiſſe, quod ipſi perficere vel non licebat, vel quod perficere nolebat. Quodſi Phyſici Aſtronomos imitari fuiſſent, ex obſervationibus communibus eliciendo hypotheſes, & has, per obſervationes ſtudio quæſitas & experimenta, examinatas corrigendo ac perficiendo, nullus profecto dubito, quin Philoſophia naturalis dudum magis promota fuiſſet. Idem dicendum de Medicina, de qua jam diſertius dixi in Horis ſubſecivis, cum Medicum Aſtronomos imitantem in ſcenam producerem.

§. 311. Diſcimus etiam, quales eſſe debeant hypotheſes, quibus in Philoſophia concedendus eſt locus; nimirum quas methodus conjecturalis ſuggerit, qua in veritate inveſtiganda utendum. Sumitur nimirum in gratiam nonnullorum phænomenorum, unde ratio eorum reddi poteſt; ac deinde inquiritur, num ceterorum quoque per id, quod ſumitur, ratio reddi poſſit; quatenus ea, quæ ex hypotheſi a priori colliguntur, conferuntur cum iis, quæ obſervantur. Perinde enim eſt, ſive antea obſervaris phænomena, & poſtea demum inquiras, num eadem a priori ex hypotheſi deducantur; ſive primum a priori deducas

ducas ex hypothesi, quæ inde necessario consequuntur, & postea demum observes, num eadem quoque in rerum natura ita sese habeant. Patet autem certum esse debere, quod id, quod sumitur, in se spectatum possibile sit. Ita sumebatur in Astronomia, orbitam Solis esse circulum. Certum nimirum erat, eam esse lineam in se redeuntem. Quamobrem cum circulus sit linea in se rediens, in se spectatum non impossibile est, ut orbita Solis sit circulus. Non igitur probamus commentitias hypotheses, quas hodie bene multi in Philosophiam naturalem invehunt, quidvis pro lubitu fingentes, utut demonstrare minime possint talia, quæ sibi imaginantur, in rerum natura existere posse. Immo facile largimur, istiusmodi commenta non esse qualitatibus occultis scholasticorum meliora. Quamobrem in Physica, quam patrio sermone edidimus, maluimus phænomena ex phænomenis explicare, nec in hypothesibus admittere nisi quæ ex observationibus colliguntur; ne incerta cum certis confundantur, & in inventorum numerum referantur, quæ sunt in quæstionum numero. Omnium minime autem probamus, si ex commentitiis hypothesibus rationes reddantur in Medicina; quippe quæ non modo usum nullum in praxi habent, verum etiam nocent, si in praxi earum rationem habere volueris. Et huc dubio procul animum adverterunt, qui Philosophiam naturalem & Medicinam ab hypothesibus liberam esse voluerunt; atque inter theoriam physicam & medicam in arte salutari distinxerunt. Propter abusum tamen hypothesium, non tollendus erat usus; sed hypotheses ad inveniendum veritatem aptæ discernendæ a figmentis, quæ in eorum locum surrogantur.

§. 312. Liquet porro ex iis, quæ de theoria Solis analytice pervestiganda diximus, in veritate a posteriori investiganda perpetuum esse debere experientiæ ac rationis connubium. Neque enim ex observationibus communibus, quæ primo loco assumuntur, quicquam concluditur, nisi in subsidium vocatis principiis geometricis. Immo ipsæ hypotheses inde non derivantur ratiocinando, nisi vi illorum principiorum. Et ubi ex hypothesi a priori deducenda quæ ex ea necessario consequuntur, & sine quibus eadem examini subjici nequit, principiis mathematicis denuo opus habemus, neque absque horum ope observationes in hunc usum capiendæ determinari possunt. Quamobrem si Astronomos in Philosophia naturali, & eidem agnata Medicina, imitari velimus; cogitandum erat de theoria demonstrativa. Ontologia, qualem dedimus, suppeditat notiones directrices, de quibus plura diximus in Horis subsecivis. Et hisce inprimis locus est, ubi analyticam viam ingressuri colligere debemus, quid sit faciendum; quamvis etiam principia ontologica conducant ad conclusiones ex observationi-

vationibus & experimentis eliciendas. Subinde etiam usui sunt principia mathematica, de quorum ad experimenta applicatione nonnulla diximus in superioribus capitibus quinto, sexto, & septimo, cum de studio Mechanicæ, Hydrostaticæ, Aërometriæ, Hydraulicæ, & Opticæ ageremus. Ex observationibus quoque atque experimentis eliciendæ sunt propositiones determinatæ, eo modo quem in Logica capite 2, sect. 2, part. 2, exposuimus, cum methodum formandi judicia intuitiva & notiones a posteriori traderemus; atque ex hisce principiis demonstranda sunt alia, quæ a priori inde deducuntur. Hoc enim pacto condenda forent Elementa Philosophiæ naturalis, eundem usum promittentia, quem habent elementa EUCLIDIS in Mathesi. Quamdiu enim desiderantur principia certa, quibus in ratiocinando utaris, luxurianti imaginationi omnia tribuuntur, atque adeo non mirum, si abortus imaginationis pro veritate in Philosophia & theoria medica obtruduntur. Neque mirum videri debet, quod de eodem subjecto meditati incidant in cogitationes toto cœlo diversas; ita ut unus per principia chymica explicare velit, quod alter explicat per mechanica, alius per figmenta, ad imitationem causarum sibi notarum, quæ effectum ei similem producunt, cujus causa vel ratio quæritur. Abstinemus ab exemplis, ne sint odiosa. Censere alios videri nolumus, dum docere nobis propositum est. Quodsi Deus nobis vitam animi, ac corporis vires conservaverit, ut ad Physicam, Philosophia practica absoluta, progredi licuerit; operam dabimus, ut istiusmodi principia stabiliamus; ne facultatibus inferioribus tribuatur, quod ab intellectu expectandum. Eorum autem necessitatem in dubium revocare nequit, qui facultates cognoscendi earumque usum perspexit. Immo si distinctam ratiocinii notionem ex Logica hausit, eam agnoscere tenetur. Observatio enim, & experimentum, non suppeditat nisi propositionem unam, quæ in syllogismo minoris vicem tuetur. Quodsi ergo hinc inferenda conclusio, principio opus est, quod majoris locum occupat. Cumque non semper unico syllogismo inferatur conclusio, pluribus quoque principiis opus. Quæ enim ratio est, cur multi multa cumulaverint experimenta, multas collegerint observationes rariores; nihil tamen inde intulerint, quod ad alia ratiocinando detegenda prodesset, ut phænomena nondum observata prævidere ac prædicere liceret? Sane non alia, quam quod deficiant principia, quorum ad experimenta & observationes applicatione inferantur conclusiones. Observationes communes, quæ basis sunt omnis cognitionis astronomicæ, in vulgus notæ. Cur vero Astronomus hinc colligat, quæ alii inde colligere nequeunt, non alia ratio est, quam quod ille principia Geometriæ, quæ ipsi perspecta sunt,

ad illas applicet, his vero nulla ſint principia, quæ ad eaſdem applicare poſſint. ROBERTUS BOYLE multa dedit de qualitatibus ſenſibilibus experimenta: quid vero hinc colligit? Nil niſi generalem hanc propoſitionem, quæ in Coſmologia ex principiis metaphyſicis demonſtratur, omnia in natura fieri mechanice. Provocare poteram ad Chymiam, cujus theoria fœcunda, ad inveniendum apta, adhuc deſideratur; & uſus in Scientia naturali prædicatur, ſed non oſtenditur: ſed in re per anteriora ſatis manifeſta prolixiores eſſe nolumus.

§. 313. Aſtronomia quoque nos docet, conjunctis viribus ſcientiam eſſe excolendam, & inventa anteceſſorum eſſe emendanda, perficienda, confirmanda, prout occaſio tulerit; conſequenter quæ ab aliis tradita ſunt ante addiſcenda, quam ad ſcientiam amplificandam animum appellas. Quantum hic peccetur ab aliis, qui Aſtronomorum non ſequuntur morem, in vulgus proh dolor! notum eſt. In inventorum numero eſſe volunt, qui diſcentium ſubſellia occupare debebant. Quæ ab aliis tradita ſunt contemnunt, antequam ea didicerunt. Sibi ſoli ſapere videntur, qui ex aliena doctrina ſapere debebant: Sibi ſoli ſufficere videntur, qui alieno auxilio maxime indigent. Quo quis indoctior, eo in cenſendis aliis audacior. Vana virium fiducia ſumma audent, quæ nullo negotio a ſe confici poſſe putant, cum vulgaribus capiendis eædem vix ac ne vix quidem ſufficiant. Non amore veritatis ducuntur, ſed vanæ ambitioni litantes, vulgo imperito ut placeant unice ſtudent. Argumentis extrinſecis pugnant, qui rationes intrinſecas ut perſpicerent, operam dare debebant. Quodſi Aſtronomi iiſdem moribus fuiſſent præditi, nihil adhuc præclari de motu ſiderum ſciretur, nec phænomena cœleſtia tanta certitudine prædicere daretur, quemadmodum hodie ab Aſtronomis fieri ſolet. Quantum, quæſo, promota fuit ſcientia aſtronomica altercationibus iſtis de motu Telluris? Quantum vero incrementi debet hypotheſi Terræ motæ legitime excultæ? Utinam igitur omnes Aſtronomiæ operam navarent, eamque analytice expenderent, quemadmodum paulo ante inculcavimus, quotquot ad ſcientias excolendas animum appellere decreverunt. Ego hunc fructum longe maximum judico, qui ex ſtudio aſtronomico ſperari poteſt; nec me pœniteret temporis quod in eo conſumſi, etiamſi alium nullum inde reportaſſem. Diſcant hinc, quantum ſibi deſint, qui ſtudium Aſtronomiæ negligunt, hac ſola de cauſa, quod nullam ejus utilitatem eſſe ſibi perſuadeant in eo vitæ genere, quod olim ſequi ſtatuerunt. Quaſi vero ea mentis metamorphoſis, quæ a ſtudio aſtronomico expectanda, nullius momenti ſit in quolibet vitæ genere, quod Eruditi ſequi tenentur. Vulgo quidem ingeminatur;

Didicisse fideliter artes
Emollit mores, nec sinit esse feros:
quod etsi multo laxiore sensu verum sit, quam vulgo accipitur, in praxi tamen parum attenditur. Nemo enim quærit, quantum studium aliquod faciat ad mores emolliendos, aut, ut clarius dicam, ad omnem facultatum nostrarum promptum & genuinum usum.

§. 314. Occurrendum vero est objectioni, quam forsan nonnulli movere poterant Astronomiæ non modo periti, verum etiam in eadem perficienda utiliter versati. Existimabunt enim, eo, quem diximus (§. 309), modo veritatem astronomicam non fuisse detectam. Incessisse inventores per multas ambages, antequam ad viam, qua sit eundum, ipsis pervenire datum fuerit, ac, multis frustra tentatis, tandem reperisse quod ad progressum ulteriorem faceret. Immo plures in deviis substitisse, antequam uni licuerit esse adeo felici, ut in viam rectam incideret. Multum haud raro temporis præterlapsum fuisse, antequam surgeret Astronomus, qui quid daret, cui in Analysi nostra locus esse poterat. Non igitur tam ardua, qualia sunt Astronomorum inventa, tanta facilitate inveniri potuisse, quantam præ se fert analysis nostra. Ubi veritates detectæ sint, earum investigationem videri obviam, quæ prorsus inaccessæ videntur, ubi adhuc ignorantur. Non nego, si facta sola respicias, vera omnino esse, quæ dicuntur: neque enim nobis difficile foret exemplis ea confirmare. Verum enimvero nobis non jam quæstio est de eo, quod factum est; sed de methodo, qua veritas latens tandem in apricum producta. Quodsi regulæ methodi, quibus legitimus facultatum nostrarum usus præcipitur, primis inventoribus distincte fuissent perspectæ, nec defecisset theoria, principia ad ratiocinandum necessaria suppeditans, aut hæc satis familiaria illis fuissent; in ambages inutiles non incidissent, sed rectam, qua eundum est, viam statim animadvertissent, nec in devia delapsi fuissent, multo minus in iisdem diu substitissent. Breviori adeo tempore ea dedissent, quæ in analysi nostra locum merentur, nisi quantum observandi opportunitas moram injecisset. Quando in apricum productum, quod quærebatur; quonam usu facultatum nostrarum id fuerit factum, reperire licet; ac tanto quidem evidentius id patet, si quis in principiis psychologicis fuerit versatus. Non igitur inutile, immo potius necessarium est, nisi incrementum Artis inveniendi negligere voluerimus, ut in eundem omni animi contentione inquiramus, atque eum ad distinctas notiones revocemus, ut constet, quomodo certa methodo reperiri potuisset ab uno, quod nonnisi post multa tentamina, in quibus casui multum tribuitur, detectum. Qui ea perpendit, quæ de Logica artificiali in Prolegomenis Logicæ inculcavimus, dictis

facile

facile assentietur. Homines multi considerantur instar unius, in quo nonnisi locum habet rectus facultatum, quem fecerunt, usus; rejectis aberrationibus, quæ vel usus hujus defectui, vel abusui tribuendæ. Quodsi enim extitisset homo, qui rectum facultatum suarum usum, absque ulla aberratione, facere potuisset; is nonnisi ea fecisset, quæ ad detegendam veritatem latentem spectassent. Quemadmodum in moralibus observandum illud CATONIS, ut ex alieno casu discas quæ vites, & nonnisi ea imiteris quæ ad rectum facultatumu sum faciunt; ita similiter hoc tenendum in Arte inveniendi, & omni veritatis cognitione. Fictio illa, quæ hic admittitur, nihil absurdi habet, atque longe utilissima est. Meretur itaque attentionem, quoad omnia, quæ a facultatum humanarum usu proficisci possunt. Qui studio Matheseos intellectum perficere vult, non aliud intendit, quam ut rectum consequatur facultatum usum, aberrationes omnes, quantum datur, posthac evitaturus. Animum igitur attendere debet ad ea, quæ usum istum loquuntur; parum sollicitus, utrum in eodem, an in diversis subjectis ea sint observanda; modo constet, nonnisi his factis ad scopum contendisse inventores, cetera vero ipsis nihil profuisse, sed inutiles tantummodo moras peperisse, ab illis minime intentas, sed moleste latas. Nisi hoc observaveris, aliorum exempla & casus tibi parum proderunt ad perfectionem propriam promovendam; quam tamen metam esse in Philosophia practica universali demonstravimus, ad quam continuo contendere tenemur, nisi obligationi nostræ naturali deesse, ac felicitati propriæ obicem ponere velimus.

§. 315. Nemo non videt amplissimum hic esse dicendorum campum, siquidem omnia, quæ ad præsentem scopum spectant, minutissime persequi velimus: sed tantæ prolixitati sese immergere non patitur præsens institutum. Neque etiam diffitemur, quod, si quis ulterius progredi voluerit, ei alios quoque autores consulendos esse, tum Veteres, quorum placita collegit RICCIOLUS in Almagesto, tum Recentiores, quos superius laudavimus, cum scriptores rerum astronomicarum recenseremus. Quodsi enim ante sibi cognita atque perspecta reddiderit, quæ nos nostro more explicavimus, ut sine hæsitatione in legendis aliorum scriptis progredi possit, quam ad hæc legenda accedat; & ordinem temporis observet, quo prodita fuerunt, ut pateat, quodnam cogitata anteriora adjumentum attulerint ad posteriora: quæ exempli loco modo in medium protulimus haud difficulter imitabitur; præsertim si in disciplinis anterioribus, more nostro, fuerit versatus, nec ullibi suam passus desiderari operam. Hoc consilium qui sequi voluerit, sua sponte animadvertet, quomodo cum Geometria creverit quoque Astronomia. Sane quæ KEPPLE-

RUS dare non poterat, utut sagacissimi ingenii vir, non invita Minerva tentarunt alii; postquam nostro ævo Geometria magis exculta, & ad multo majus fastigium evecta, quam KEPPLERI tempore attigerat. Est etiam Algebræ suus usus in parte Astronomiæ theorica, cujus latissimus usus per universam Mathesin. KEPPLERI ævo adeo ignorabatur, ut ne somniando quidem eum prævidere daretur; nec mirari debeamus, quod abjecta subinde vir summus de Algebra senserit. In gratiam igitur eorum, qui Algebræ studio delectantur, unum alterumque specimen dedimus, quo præclarum ejus in Astronomia usum insinuaremus. Plura suppeditat GREGORIUS in *Elementis Astronomiæ*, & illustria admodum exempla petere licet ex *Commentariis Petropolitanis*.

§. 316. Erunt forsitan nonnulli, qui sibi persuadebunt, inanem operam sumi in tractatione analytica studii astronomici, propterea quod absque ea Astronomi sua invenerint, ac hodienum inventa antecessorum perficiant, novisque accessionibus nobilissimam scientiam locupletent. Enimvero facilis est responsio. Qui quæ ab aliis inventa sunt attenta mente considerant, eorum animis idea quædam exemplaris usus facultatum sese insinuat ad particulare hoc objectum restricta, quam, etsi confusam, imitantur quoad idem objectum, nescii omnino quemnam facultatum usum faciant; quemadmodum accidit iis qui in tractandis negotiis imitantur alios in casu simili, theoria omni destituti. Neque diffitendum, hac imitatione niti omnem praxin Artis inveniendi in Astronomia; quidni etiam in Mathesi reliqua, si a regulis Algebræ, seu Analyseos Mathematicæ recesseris; quamvis etiam in Algebræ praxi huic imitationi multus sit locus. Quam multum vero in hac imitatione tribuatur casui, & quam multis ideo tentaminibus locus sit, meum non est in præsenti exponere. Enimvero tota nostra tractatio analytica non alio tendit, quam ut idea ista confusa revocetur ad distinctam; quo facto, imitatio, quæ fuerat empirica, rationalis evadit, & multo latius extenditur, immo etiam casui subducitur. Nos jam potissimum intendimus, ut Philosophus imitetur Astronomum in qualibet Philosophiæ parte; immo Eruditus quicunque in suo scibili; cum de intellectu studio Matheseos perficiendo agamus, ut eodem extra Mathesin rite utamur. Hæc vero imitatio expectari nequit ab idea confusa, quæ Astronomo prodest in Astronomia excolenda. Immo si qui eam audent, quam sint infelices satis patet. Non deessent exempla illustria, quibus hoc doceri poterat; nisi consultius existimaremus ab iis producendis abstinere.

CAPUT.

CAPUT X.

De Studio Geographiæ, Gnomonicæ, & Chronologiæ.

§. 317. Geographia mathematica, cum qua hic nobis negotium est, multum affinitatis habet cum Astronomia, præsertim sphærica, a cujus principiis tota pendet. Unde etiam Veteres eandem ab Astronomia non separarunt, sed quæ in eadem traduntur, ad Astronomiam retulerunt. Quamobrem quæ de studio Astronomiæ sphæricæ dicta sunt, de Geographiæ quoque studio tenenda sunt. Et quoniam Geographia, quemadmodum modo diximus, principiis Astronomiæ sphæricæ præsertim nititur; ad eam accedere minime debet nisi eorundem gnarus. Quemadmodum itaque, in Elementis nostris, Astronomiam Geographiæ præmisimus; ita etiam in Astronomia ante versari debet, quam ad Geographiam pedem promoveat, qui inoffenso pede in hac progredi voluerit. Quodsi quis, extra systema, Geographiam mathematicam tradere voluerit, ei multa explicanda sunt, quæ in Astronomia docentur; quemadmodum etiam a nonnullis factum vidimus.

§. 318. Qui nonnisi historicam Geographiæ cognitionem sibi acquirere student, iis sufficiunt, quæ ad Globum terrestrem, atque mappas geographicas, & tam illius, quam harum, usum cognoscendum faciunt. Ex capite itaque primo ea addiscere tenentur, quæ de figura Telluris, & circulis in ejus superficie concipiendis, habentur; prætermissis problematis ad investigandam semidiametrum Telluris spectantibus. Sufficit iisdem notasse, quæ de quantitate semidiametri Telluris, & unius milliaris Germanici, in pedibus Parisinis leguntur (§. 43 *Geogr.*). Curiosior si quis fuerit, addere potest magnitudinem superficiei, ac soliditatis Terræ (§. 44 *Geogr.*). Nec usu caret, si Tabulam, quæ in scholio problematis 7 (§. 46 *Geogr.*) exhibetur, de convertendis gradibus singulorum parallelorum in milliaria Germanica inspiciat. Ex capite secundo, definitiones distantiæ locorum, longitudinis item, ac latitudinis sibi perspectas reddere tenentur, & quod latitudo loci æqualis sit elevationi poli notent, ut intelligant, quid sibi velit Tabula Latitudinis & Longitudinis locorum (§. 60 *Geogr.*); prætermissis problematis de distantia locorum per Trigonometriam sphæricam solvendis. In capite tertio, ultra definitiones zonarum, & tempestatum statarum, non progrediendum, additis theorematis 8 & sequentibus, sed absque demonstrationibus. Eadem

fere tenenda ſunt, in perluſtrando capite quarto, nimirum ut, præter definitiones, nonniſi theoremata pleraque abſque demonſtratione notentur, & uſus Tabulæ climatum (§. 138 *Geogr.*) inſpiciatur. Niſi quis curioſior fuerit, caput quintum ſicco pede tranſire poteſt; ex ſexto autem, ſufficient definitiones. Ex ſeptimo, diviſionem plagarum ad dignoſcendos ventos cognoſci perutile eſt, una cum theorematis de ventorum proprietatibus, quorum uſus eſt in dijudicandis tempeſtatibus vagis. Inprimis autem horum ſtudio inſervit caput 8, de Globi terreſtris conſtructione & uſu. Immo ſuademus ut Globus ſemper ad manus ſit, in prima ſtatim tractatione Geographiæ; quo facilius intelligantur, quæ in anterioribus docentur. Tandem ex capite nono, quod de mappis geographicis agit, nonniſi ea haurienda ſunt, quæ rudem quandam earundem ideam animo ingenerant, & uſum ipſarum explicant. Nimirum ad manus eſſe debent mappæ, tum univerſales, tum particulares, & addiſcendum, quid denotent lineæ in iiſdem deſcriptæ, quidque indigitent numeri in margine adſcripti. Ita enim conſtructio intelligitur, quantum ſufficit ad earum uſum: neque eo fine requiritur, ut quis modum conſtruendi mappas geographicas capiat. Paucis adeo horis, ſtudium Geographiæ abſolvere poteſt, qui in hiſtorica ejus cognitione acquieſcit; ultra quam nemini progrediendum, qui aliud non intendit, quam ut mapparum geographicarum ideam quandam diſtinctam animo concipiat, quarum hodie promiſcuus omnium uſus eſt.

§. 319. Qui ad ſecundum cognitionis gradum adſpirant, Elementa Geographiæ integra, eo quo a nobis conſcripta ſunt ordine, perluſtrare debent; obſervatis iis, quæ ad nauſeam uſque inculcavimus, cum de ſtudio Aſtronomiæ ſphæricæ ageremus: neque enim inter theoremata ac problemata Aſtronomiæ ſphæricæ & Geographiæ ulla differentia eſt, cum utrobique ad primum mobile referantur, ſeu a motu communi Solis & ſtellarum pendeant; ut adeo etiam, olim præſertim, problemata geographica ad problemata primi mobilis fuerint relata. Loquuntur demonſtrationes, principia ubivis peti ex Aſtronomia. Unde, me tacente, intelligitur ſcientificam Geographiæ mathematicæ cognitionem acquiri minime poſſe, niſi ab eo qui in Aſtronomia fuerit verſatus. Equidem non deſunt, qui, quæ de aſciis, amphiſciis, heteroſciis & periſciis, nec non de antœcis, periœcis & antipodibus docentur, pro futilibus habent, quæ utiliter ignorentur; judicium tamen præcipitant, vel terminorum inſuetorum ſono deluſi, vel ex eorum definitionibus non proſpicientes doctrinæ uſum. Quibus terminorum inſuetorum ſonus imponit, illi cum Scholaſticorum terminis metaphyſicis nondum intellectos comparant, & quod de his inculcari audiverunt

runt

runt judicium, ad hos applicant, cœca imitatione, iis solenni qui de rerum valore ex ipsarum notionibus per se statuere nesciunt. Oppido autem falluntur: termini enim geographici accuratis definitionibus explicantur, quæ optime intelliguntur, modo terminos eas ingredientes ex anterioribus habueris perspectos; non vero definitionibus magis obscurantur, quemadmodum a Scholasticis fieri suevit. Præterea ex his ipsis definitionibus demonstrantur accurata methodo, quemadmodum in ceteris Matheseos partibus, quæ ad cognitionem Telluris mathematicam spectant, adeoque in Geographia prætermittenda non sunt (§. 1 *Geogr.*). Non minor est præcipitantia eorum, qui negant, quæ prospicere nequeunt. In Geographia mathematica doceri debet omnis differentia phænomenorum, quæ per universam Terræ superficiem a primo mobili pendent. Inter hæc vero etiam sunt umbrarum differentiæ, quæ corpora a Sole illuminata projiciunt, & differentiæ longitudinum dierum atque noctium, atque tempestatum statarum, nec non ortus & occasus stellarum. Has itaque cognoscere tenetur, qui omnem in diversis Telluris locis differentiam perspicere voluerit, etiamsi locum, quo ipse commoratur, nunquam fuerit egressus. Quæ ad umbras spectant, in doctrina de asciis, amphisciis, heterosciis & perisciis explicantur; quæ vero ad dierum, & tempestatum statarum, aliorumque phænomenorum agnatorum, differentias pertinent, doctrina de antœcis, periœcis, & antipodibus continet. Non igitur nugæ inanes sunt, quæ hic demonstrantur, sed veritates necessariæ, non modo animum sciendi cupidum oblectantes, verum etiam aliis in posterum inveniendis inservientes. Non jam inquirimus in casus, quibus interest cognosci statum Telluris in dato loco, quoad hæc phænomena. Qui enim nulla sciendi cupiditate flagrat, eum quoque parum movebit utilitas, quam nondum existimat suam, sed alienam judicat. Unicum moneri consultum duco, de constructione mapparum geographicarum, præsertim universalium. Mappæ universales non sunt nisi projectiones sphæræ in plano: unde sub hoc etiam nomine earum constructionem docuimus (§. 272 & *seq. Geogr.*). Non igitur diffitemur, si doctrinam de projectione sphæræ præmittere libuisset, quemadmodum Sphæricorum Elementa præmisimus Astronomiæ, multo concinnius constructionem istam demonstrari potuisse. Quoniam tamen brevitati consulere decrevimus, quæ de projectione sphæræ præsupponi debebant, ipsis demonstrationibus geographicis inseruimus. Non tamen ideo Elementa projectionis sphæræ tanquam inutilia rejicimus: probe enim novimus, quantus eorum sit usus, tum in constructione Astrolabiorum demonstranda, tum etiam in projiciendis eclipsibus solaribus; quas projectiones

jectiones hodie non inutiliter adhibent Astronomi. Quoniam vero nos ea non attingimus, in quibus potissimum usus illorum sese exerit; nec præter necessitatem theoriam nostrorum Elementorum multiplicare voluimus, abunde persuasi, quod nostrorum gnarus, absque ulla difficultate, ea aliunde haurire possit, siquidem iisdem habuerit opus.

§. 320. Abunde constat ex antecedentibus, qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, eos via analytica progredi debere, ut inquirant in artificia, quibus veritas, quæ demonstratur, in apricum fuerit perducta. Utimur, in eruendis plerisque quæ traduntur, Trigonometria, tam plana, quam potissimum sphærica. Quamobrem quæ in Astronomia eo fine dicta sunt, hic repetenda veniunt. Cetera ex principiis astronomicis, & geometricis, pauca quædam de umbris ex Opticis, communi methodo Logica deducuntur; adeoque patent per ea, quæ de usu Logicæ in veritate a priori investiganda docuimus in Opere logico, & uberius explicata fuerunt in superioribus, cum de studio Arithmeticæ & Geometriæ elementaris ageremus. Non itaque opus est, ut diutius hisce immoremur, cum ad Geographiam accedere minime debeat, nisi Arithmeticæ, Geometriæ & Astronomiæ, immo etiam Opticæ gnarus. Equidem dubitandum non est, esse etiam Algebræ in solvendis problematis geographicis usum, etsi hactenus ad Geographiam parum applicata fuerit. Neque etiam dubitamus fore ut, quemadmodum Algebra applicari cœpit ad partem Astronomiæ sphæricam, seu problemata primi mobilis, in posterum non defuturi sint, qui solutiones problematum in Geographia adhuc desideratorum dabunt. Sed cum ea, quæ nostro scopo sufficere visa sunt, absque Algebræ auxilio tradi possint; hac vice consultius visum fuit a calculis algebraicis abstinere. Neque enim Elementis Matheseos omnia inserenda sunt, quæ hactenus fuerunt detecta, aut per ea ulterius detegi poterant; ne studium Matheseos, per se satis amplum, reddatur nimis diffusum, & ejus faciamus desertores, quos ad idem allicere & ad ulteriora præparare intendimus. Quid quod nec nobis conveniat tempus in Mathesi consumere, quod Philosophiæ reformandæ impendere debemus; cum hodie non desint multi, qui Mathesi excolendæ utilem operam navant; nemo autem propemodum sit, qui similem Philosophiæ præstare velit. Unum tamen adhuc restat, quod silentio prætereundum non est. Constat hodie figuram Telluris non esse sphæricam, quemadmodum crediderе Veteres, sed potius sphæroidicam, prouti annotavimus (§.4 *Geogr.*). Neque ignotum est, ope Algebræ, in figuram Telluris inquisivisse, non infelici successu, Geometras præclaros. Problema adeo tam illustre non videbatur omittendum; quod præsertim

præ-

præstantiam Analyseos recentioris tam aperte loquitur. Enimvero monuimus, jam loco citato, sub judice adhuc esse litem de vera Telluris figura. Quamobrem cum controversia ratiociniis solis definiri minime possit; & figura sphærica satisfaciat in Geographia, qualem tradere debuimus; a figura vera ejusdem determinanda abstinendum erat; præsertim quod ea, quæ a nobis tradita sunt de Analysi moderna, & ejus ad problemata physico-mechanica applicatione in Mechanica, abunde sufficiant ad intelligendas analyticas solutiones problematis de figura Telluris, quas dederunt Geometræ recentiores. Elementa nostra Matheseos non eo fine conscripsimus, ut Matheseos cultores a lectione aliorum librorum avocemus; sed ut eos ad eandem præparemus, & aptos efficiamus, non sine multo temporis ac laboris compendio, & ut iis pervia sit Mathesis, qui intellectus perficiendi gratia in eadem versari debent, quo eodem felicius extra eandem utantur: id quod ex tota hac tractatione de studio Matheseos recte instituendo abunde elucescit.

§. 321. In gratiam eorum, qui intellectus perficiendi gratia in Geographia versantur, ut eodem prompte extra eandem utantur, non est quod addam. Geographiam omnem methodo synthetica concinnavimus, qua usi sumus in Geometria elementari & aliis Matheseos partibus, inprimis etiam in parte Astronomiæ sphærica, ad quam proxime accedit. Quamobrem quæ eo fine ibidem inculcavimus, ea hic quoque observanda sunt. Neque vero existimandum est, propterea studium geographicum tuto negligi posse; cum ab eo sperandum non sit, quod non jam dederint disciplinæ aliæ, quibus ante operam navare tenemur, quam ad Geographiam pedem promoveamus. Etenim cum habitus omnis crebro exercitio acquiratur, & continuo exercitio conservetur ac perficiatur; non superflua videri debet opera, quæ Geographiæ analytice expendendæ impenditur. Neque est quod dicas, idem obtineri posse sola repetitione disciplinarum ceterarum. Præstat enim varietate obtinere, quod eorundem repetitio promittere videbatur. Quemadmodum nimirum varietas delectat, eorundem vero repetitio molesta accidit; ita quoque illa attentionem apprime hic necessariam excitat & conservat, quam hæc labefactat, ut difficilius conservetur. Exercitia itaque ad eundem habitum tendentia, quæ quoad hunc scopum eadem sunt, diversa tamen apparere debent; ita ut quasi continuo aliud agendo in eundem scopum collinees, & per diversa media finem tibi consequi videaris. Neque hoc singulare quidpiam ac insolitum existimandum. Sane in ipsa Arithmetica practica varietate exemplorum consequi studemus, quod repetitione ejusdem exempli obtineri poterat, si habitum acquirendum in se spectes.

§. 322. Hydrographia, quæ de navigatione per mare agit, apud nos nonnisi curiositatis gratia addiscitur. Quamobrem qui eam negligere voluerit, per nos negligat. Mathematicum tamen decet, ne eandem ignoret. Quodsi vero eandem perlustrare volueris, eodem prorsus modo in eo versaberis, quemadmodum in Geographia. Eadem enim methodo conscripta est, qua Geographiam tradidimus, &,perinde ac hæc, principiis astronomicis tota nititur; ut adeo hæc Matheseos pars longe utilissima fructus Astronomiæ sit &, si Astronomia non alium usum haberet, propter hunc solum,summo cum studio excoli mereretur. Qui animum sciendi cupidum possident, eos studium Hydrographiæ mirifice delectat; quatenus vident, quomodo ex principiis mathematicis, præsertim astronomicis, deducta fuerint quæ intellectui humano prorsus inaccessa videri poterant, & fœcunditatem principiorum mathematicorum, quæ in se sterilia apparebant ipso facto experiuntur. Plura non addimus: quæ enim dici poterant, ex anterioribus abunde intelliguntur.

§. 323. Quod studium Chronologiæ attinet, de eo non multa nobis dicenda sunt. Pleraque enim, quæ in Chronologia traduntur, non majorem requirunt attentionem, quam quæ acquirendæ cognitioni historicæ sufficit. Qui nonnisi vulgarem Chronologiæ notitiam sibi comparare student, iis satisfaciunt definitiones diei, & noctis, epochæ diei civilis, horæ, horæ astronomicæ, Europææ, & Judaicæ, minuti primi denique, atque secundi, ex capite primo. Ex secundo, perspectas sibi reddere debent definitiones omnes, una cum quantitate mensis lunaris communis, & embolimæi, seu corollario primo definitionis 28. Ex capite tertio, sufficit annotasse, quæ de anno Juliano, & Gregoriano dicuntur. Si paulo curiosior fuerit, addet ea, quæ dicuntur de recente Judæorum & Turcarum anno. Ex capite quarto, ad intelligendum calendarium addiscant, quid sit cyclus Solis, cyclus Lunæ, & cyclus Indictionum, atque periodus Juliana; & ex capite quinto, petant, quid sit epocha Russorum, epocha mundi conditi Judaica, & epocha Muhamedica: qui vero in legendis Autoribus classicis versatur, addat definitiones epochæ Olympiadum, & epochæ Urbis conditæ. Denique, ad vulgarem Chronologiæ notitiam, sufficit aliqua Calendarii Juliani & Gregoriani cognitio, ex capite sexto haurienda, &, ubi quis curiosior fuerit, similem Calendarii Judaici, & Muhamedani, ex definitionibus potissimum capitis ultimi sibi comparet. Calculos enim, qui in problematis docentur, una cum corollariis, quibus eorum rationes continentur, tuto negligere poterit. Brevi adeo labore totum studium chronologicum absolvi poterit, in quo memoriæ omnes fere sunt partes. Me autem tacente, patet terminos nonnullos ex Astronomia per-

perſpectos eſſe debere, ut definitiones chronologicæ intelligantur.

§. 324. Qui accuratiorem Chronologiæ cognitionem appetunt, eam totam perluſtrare tenentur: id quod nullo fere negotio fiet, ubi in Aſtronomia fuerint verſati; cum eorum, quæ in Chronologia intricata ſunt, & hoc ſtudium perplexum atque moleſtum reddunt, nonniſi cognitionem hiſtoricam ſuggeramus. Hiſce principiis imbutus, & in Aſtronomia cum laude verſatus, adeat Autores, quos ſupra ſuo loco commendavimus, ubi ſpinoſis difficultatibus ſeſe immergere voluerit, ut judicium ferre queat, quid veri ſubſit iis, quæ aliorum fide aſſumuntur. Neque enim exiſtimandum eſt ſingula quæ dicuntur, ad chronologiam hiſtoricam ſpectantia, ex monumentis Veterum, quæ nobis ſuperſunt, eſſe adeo aperta & explorata, ut de eorum veritate ambigi minime poſſit. Hoc omnino monendum eſſe duximus; ne, qui Elementa noſtra Chronologiæ perlegit, miretur, cur vulgo conqueratur ſtudium Chronologiæ eſſe abſtruſum, perplexum, atque difficile; cum tamen nullum videatur, quod in eo collocandum, ſi comparetur cum eo, quod in tractandis ceteris Matheſeos partibus hactenus præcepimus.

§. 325. Qui ad tertium cognitionis gradum adſpirant, in Chronologia quoque quædam invenient, quæ ad ipſorum ſunt palatum. Juvabit perpendere, quomodo menſuræ temporis, ex motu ſiderum fuerint deductæ & ad uſum civilem aptatæ, ut tempus civile cum aſtronomico in concordiam reducatur: quod poſterius cum non uno modo factum ſit, quatenus arbitrium humanum in determinationem influit; obſervare hic licet, quæ in veritatibus neceſſariis locum minime habent. Singularem quoque hic attentionem merentur, quæ de characteribus temporis, præſertim artificialibus, & variis cyclis, atque periodo Juliana docentur. Denique probe perpendenda ſunt, quæ de Calendario Chriſtiano, & Judaico traduntur. Etſi enim calendarium Judaicum principiis nonnullis nitatur ſuperſtitioſis; calculus tamen, quo in computatione utendum, admodum ingenioſus eſt; ut ab Artis inveniendi cupido probe perpendi mereatur. Præbet Chronologia exemplum, quomodo veritates, quas cognovimus, ad uſum vitæ civilis aptentur; ubi ſummus rigor attendi nequit, id tamen agendum, ne ab eo longius recedas in præjudicium finis intenti. Simile quid occurrit, ubi Jus naturæ ad definienda negotia humana, tam privata, quam publica, adhibetur, cujus rigor ſummus obſervari nequit; ut adeo ex eodem condendum ſit Jus civile, ac Jus gentium arbitrarium, quod ab eo quam minimum recedat, & quo caveatur, ne fine civitatum particularium & civitatis maximæ, quam Gentes conſtituunt, excidamus. Suppeditat itaque Chronologia, modo in abſtrahendo

satis fueris acutus, nec destituaris illo acumine, quo abstracta in concretis pervidemus, principia generalia, quæ notionum directricium loco esse possunt in istiusmodi casibus. Qui in Philosophia nostra fuerint versati, iis satis clara & perspicua erunt, quæ dicuntur. Nimis autem prolixi esse deberemus, si uberius explicanda essent, ne ceteris quoque obscura viderentur. Videmus adeo (id quod etiam haud pauca ante dicta ulterius confirmant), quam utile sit studium Philosophiæ verioris, qualem nos profitemur, cum studio mathematico conjungi; siquidem usus omnis, quem hoc præstat in intellectu perficiendo, compos fieri volueris. Ita demum obtinebitur, ut Mathesis prosit ad recte philosophandum: id quod sola applicatione, ad cognitionem Naturæ mathematicam promovendam, obtineri nequit; ut ut ea præclara sit, & maxime commendandum ingeniis excelsis, ut hoc cognitionis genus excolatur.

§. 326. Gnomonica disciplina tota practica est, in qua sola praxis intenditur. Quamobrem a perplexis quoque demonstrationibus abstinuimus, quas legere nolunt, qui intelligere poterant; ceteri autem non capiunt. Quodsi quis theoriam omnem aspernatur, nec nisi constructionem horologiorum solarium curæ cordique habet; ei satisfacient definitiones, & problematum resolutiones. Si quæ problemata ipsi magis curiosa, quam utilia videntur; suo stabit judicio in omittendis iis, quorum notitia se carere posse existimat. Descriptionem horologiorum solarium adeo perspicue exposuimus ut eadem faciliate absolvi possit, qua figuræ in Geometria elementari delineantur, & alia ejus problemata construuntur. Ne tamen hæreat circa terminos, nec satis intelligat quid fieri debeat; omnino consultum est, ut levem quandam Astronomiæ sphæricæ, Geographiæ, & Chronologiæ notitiam sibi comparet; qualem commendavimus iis, qui nonnisi historicam cognitionem sibi comparare student. Inprimis autem hic usui est, si ideas, quæ lumen praxi Gnomonicæ affundere debent, ne in ea prorsus cœcutias, imaginationi insinuari cures. Exempli loco esse potest, si ipsam descriptionem horologiorum solarium, applicatione actuali horologii æquinoctialis ad planum in quo describendum, ostendas. Usum hic habent machinæ gnomonicæ, quas in usum descriptionis horologiorum solarium commendat, & brevi quodam Tractatu descripsit PARDIES; quamvis instituto præsenti sufficiat horologium æquinoctionale simplici tantummodo modo descriptum, quemadmodum ex problemate quarto (§. 36 *Gnom.*) facile intelligitur.

§. 327. Etsi autem a perplexis & intricatis demonstrationibus, quales dedit CLAVIUS, & quas parum amant studio gnomonico sese mancipantes, consulto abstinuerimus, ne nobis scriberemus, dum alios erudire volumus; id

id tamen egimus, ut, quanta fieri potuit brevitate ac facilitate, satisfaceremus iis, qui scientificam horologiorum solarium cognitionem appetunt, ne ignorent genuinas constructionum rationes. Ad hanc igitur qui adspirant, eo modo in Gnomica versentur, quo in Geometria elementari versandum esse docuimus, ubi secundus cognitionis gradus intenditur. Haurit Gnomonica principia sua ex Arithmetica, Geometria elementari, Trigonometria utraque, Astronomiæ sphærica præsertim parte, Geographia, & Chronologia. Antequam igitur ad illam tractandam accedat scientificæ cognitionis cupidus, harum tractationem præmittere debet. Hoc pacto, in omni Gnomonica nihil deprehendet, quod non satis intelligat, & de cujus veritate dubium quoddam supersit. Quoniam vero, quemadmodum modo diximus (§. 326), Gnomonica tota practica est; qui eidem operam navat, singula quoque horologia in charta delineare tenetur. Quodsi dicas, tibi nunquam propositum esse, ut aliquando horologium quoddam solare actu construas; sed sufficere, ut intelligas, quomodo construantur, & cur hoc pacto construi possint; consequenter te scopo tuo potiri posse, si tantummodo resolutiones problematum cum schemate conferas; me per omnia consentientem minime habes. Etenim si horologia in charta ipsemet delinees, non modo facilius & clarius eorum constructionem intelligis, verum etiam ipsorum ideam memoriæ firmius imprimis. Quotiescunque veritates practicas cognoscere studemus; suadendum omnino est, ut eas in nobismetipsis experiamur. Hinc etiam, non dissentiente CONFUCIO, summo Sinarum Philosopho, in Moralibus inculcare soleo, ut eorum, quæ docentur, veritatem in nobismetipsis experiri studeamus: quod quantam afferat utilitatem, in parte altera Philosophiæ practicæ universalis, a priori abunde demonstravimus. Qui adeo cognitioni scientificæ operam navat, in omni Mathesi solutiones problematum ipsemet tentare tenetur, sive constructiones geometricas, sive calculos arithmeticos præcipiant.

§. 328. Qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, resolutionem problematis tanquam incognitam supponere debent, & vi definitionis horologii, quod describi jubetur, inquirendum, quomodo describi debeat. Etenim, ex datis ratiocinando, colligendum quod quæritur. Non datur nisi definitio horologii describendi, quippe quæ ex anterioribus tanquam data supponi potest ac debet: quæritur modus idem describendi, quem resolutio explicat. Modus adeo describendi horologium, ratiocinando eruendus ex ejus definitione. Definitio horologii specialis supponit definitionem horologii solaris generalem. Quamobrem facile patet, eam quoque tanquam datam supponi debere; nisi eam inter principia referre velis, quæ vi

vi eorum, quæ definitioni speciali insunt, in memoriam revocantur. Ex definitione adeo petendæ sunt primæ propositiones, quarum ope in memoriam revocantur principia, ex Astronomia vel aliunde cognita, ut ex illa ratiocinando colligi queat conclusio. Satis hæc intelliguntur ex superioribus, quæ de tertio cognitionis gradu acquirendo inculcavimus (§. *66 & seqq.*). Non diffiteor, faciliorem fore operam, si demonstrationes problematum eo ordine concinnatæ essent, qui in methodo analytica observandus; non sumendo resolutionem tanquam hypothesin theorematis, quemadmodum in demonstrationibus syntheticis fieri solet (§. 51 *& seqq.*). Enimvero, si quis in Geometria elementari problemata analytice tractaverit, & methodum, qua ibidem usus, in aliis imitatus fuerit; ejus vires nec superabit analytica problematum gnomonicorum tractatio. Et quamvis tyronibus hoc difficile videatur, non tamen difficile erit eorum magistris, nisi quis intempestive docentium numero sese ingerat, qui discentium subsellia potiore jure occupare debebat. Elementa Arithmeticæ Germanica, methodo analytica, conscripsimus, eandemque in iis explicandis magis adhuc illustramus. Quodsi ergo quis ideam quandam exemplarem inde hauserit; ea ipsi facem præferet non modo in Gnomonica, sed & in aliis Matheseos partibus; immo extra eandem in disciplinis aliis. Et si quis Elementa ista vel non legit, vel legere nequit linguæ Germanicæ ignarus, aut etiam Batavæ, in quam conversa sunt; ideam tamen quandam animo concipiet vi analyseos demonstrationum, quam supra (§. 38 *& seqq.*) amplissime exposuimus. Non igitur opus esse judicamus, ut ad particularia descendamus.

§. 329. Ceterum Gnomonica in numero artium est, quemadmodum Mechanica practica, quæ machinarum compositarum structuram explicat. Quoniam in Gnomonica constructiones horologiorum solarium demonstrantur; ex ea discimus, quomodo Artes scientifica methodo tractandæ sint. Deducitur ea prorsus a priori, atque adeo methodi artes scientifice tractandi ideam omnium optime exhibet. Artes ceteræ, si non omnes, saltem plurimæ, inventæ sunt a posteriori, etsi subinde in nonnullis a priori perfectæ. Ars poliendi vitra omnino a posteriori detecta, perinde ac constructio telescopii; etsi hæc deinde a priori, per principia dioptrica, magis fuerit perfecta. Phænomena telescopiorum dudum ante a posteriori innotuerunt, quam earum accuratas & rigorosas demonstrationes dederint Mathematici. Idem dicendum est de speculis, quorum phænomena in Catoptrica demonstrantur. Ad Gnomonicam tamen quam proxime accedit Ars navigandi, & construendi globos artificiales, atque mappas geographicas, & hydrographicas. Quibus adeo animus fuerit scientiam artium excolendi,

di, illi hanc differentiam probe perpendere debent. Ex Gnomonica inprimis videre licet progressum artis a priori continuandum; quomodo scilicet inventa anteriora non modo ansam suppeditent de aliis cogitandi, quorum cogitatio alias animum minime subiisset; verum etiam ad ulteriora invenienda adjumento sint; ut adeo idem sit in arte, qui in scientia progressus, cum utrobique eædem deprehendantur rationes. Huc inprimis animum advertere debent, qui Artem inveniendi ad formam Artis reducere gestiunt, quemadmodum Logicam ad eandem redactam videmus. Nos, qui nullum Matheseos usum aspernamur, ad ea quoque animum advertimus, quæ vulgo non attenduntur; & usum, quem Mathesis habere potest in excolendo intellectu, ut eodem in omni Scientiarum genere, in quavis Arte, & in ipsis negotiis, tam privatis, quam publicis, prompte ac rite utamur, majoris facimus, quam quem per se habere potest; utut singula æquo pretio æstimantes, nec meritam detrahamus iis laudem, qui in aliqua Matheseos parte excolenda omnem ætatem consumunt. Neque enim ea est hominis ætas, immo nec eæ sunt ejus vires, ut unus omnia possit, &, nisi essent, qui particulari studio scientiam egregie promoverent, nec is a Mathesi exspectari poterat fructus in omni sua extensione, quem tantopere commendamus, & cui tantum statuimus pretium. Quamvis adeo in Gnomonica multa occurrunt, quæ magis curiosa, quam utilia videntur iis, qui utilitatem ex necessitate ad vitam commode degendam metiuntur; immo quæ a severis inventorum censoribus ad lusus Mathematicorum referuntur, ipsis subinde Geometris excelsi ingenii, profundique acuminis non dissentientibus, propterea quod unusquisque suam amat & laudat Minervam; nobis tamen ea non contemnenda, sed magni facienda videntur, quatenus analytica eorundem consideratio prodest ad augendam Artem inveniendi; immo etiam sola eorundem scientifica cognitio intellectum perficit, etiamsi de eo perficiendo non cogites.

CAPUT XI.

De Studio Pyrotechniæ, Architecturæ Militaris, & Architecturæ civilis.

§. 330. Pyrotechnia paucas continet demonstrationes, quæ ex Geometria elementari principia sua mutuantur: quas negligere facile potest, qui soli praxi studet. Ceterum quæ ad praxin faciunt, non modo perspicue,

ſpicue, ſed & diſtincte propoſuimus; ut ideam diſtinctam eorum, quæ fieri debent, animo nullo negotio concipere detur. Nulli adeo dubitamus, quin ſtudium pyrotechnicum per facile reddiderimus. Si quis praxi operam dare voluerit, is omnino ipſo opere exequi tenetur, quæ præſcribuntur: quo facto ipſemet in ſe experietur, reſolutiones problematum eodem modo eſſe datas, quo reſolutiones Geometriæ practicæ, veluti triangulorum conſtructionem, linearum perpendicularium deſcriptionem, in Geometria elementari exhibuimus. Quodſi quis ante ſingulorum, quæ fieri jubentur, ideam diſtinctam ſibi comparavit, quam ad ea facienda ſe conferat; is non ſolum ad id, quod faciendum, majorem attentionem conferet, ſed & majore cum voluptate artem manuariam addiſcet. Qui in nuda cognitione hiſtorica acquieſcere volunt, iis quidem ſufficere poſſunt, quæ tradimus; ubi tamen occaſio offertur ipſis oculis uſurpandi ſingula, quomodo parentur, eam negligere minime debent; cum hoc pacto ideæ efficiantur clariores, quatenus diſtincte explicatis inſunt confuſe percipienda.

§. 331. Quibus ſecundus cognitionis gradus curæ cordique eſt, non modo addere debent perpaucas demonſtrationes, quæ hinc inde adjiciuntur; verum etiam eorum, quæ ex principiis geometricis demonſtrari nequeunt, rationes paſſim indicatas perpendere tenentur, & ad ea applicare ſtudeant, quæ ſine illarum allegatione proponuntur. Dantur equidem nonnulla in Pyrotechnia, quæ Geometriæ ſublimioris & Analyſeos recentioris gnarus legibus mathematicis adſtringere poterat, cum nunc ſolo arbitrio regantur; ſed nobis minime vacat in talia inquirere. Hanc igitur telam aliis pertexendam lubentiſſime relinquimus, nobiſque ſufficit ea tradidiſſe, quæ ante perſpecta habere debent, quam ingenii ſui vires periclitentur.

§. 332. Pleraque, quæ in Pyrotechnia traduntur, ſunt inventa, quæ artificum tentaminibus debentur, ubi caſus multas ſibi partes vindicat. Qui ad tertium cognitionis gradum adſpirant, & intellectum præſertim perficere intendunt, ut eodem extra Matheſin prompte ac rite utantur, hoc etiam inventorum genus probe expendere tenentur: neque enim rerum ceterarum, quemadmodum mathematicarum, tam exaſciata proſtat theoria, ut ſuppetant principia, quorum vi a priori detegere licet omnia, quæ quæruntur. Empirica inveniendi methodus, qua utuntur artifices experientiæ qua pollent omnem facientes uſum qui a notionibus confuſis expectari poteſt, in rebus utiliſſimis detegendis omne fert punctum, modo eadem rite uti noris: id quod tibi promittere poteris, ſi eundo per exempla, qualia ſuppeditat Pyrotechnia, eam revoces ad notiones diſtinctas. Qui vel ea legit, quæ in Prolegomenis de differentia Logicæ naturalis & artificialis docuimus, non modo

modo dicta plene intelliget, verum etiam iisdem facilem habebit fidem. Quodsi attentius resolutiones problematum pyrotechnicorum expendas, easque tanquam inveniendas tibi proponas; methodo empiricæ inveniendi misceri rationalem, aut saltem misceri posse deprehendes: quemadmodum nemo hominum in actionibus suis totus empiricus est, ut non etiam rationi aliquæ deferantur partes. Et si forsan objecerit quispiam, te in modum inquirentem, quo eædem fuerint repertæ, haud raro, immo plerumque, incidere in alium ab eo, quo usi sunt inventores, prorsus diversum; non tamen inde conficitur, te nihil agere: sufficit enim si ostendere possis quod eo, quem concipis, modo reperiri potuerit quod quærebatur. Cum enim non alio fine in modum inveniendi inquiras, quam ut eundem in casu simili imiteris; eundem ex asse consecutus, si vel maxime de eo non cogitavit, qui quid invenit: id quod de omni analysi notandum, quam quasi divinando eruere studemus. Ceterum, si quæ compositiones occurrunt, quarum nullam reddidimus rationem; in eam eo modo inquirendum, quo rationem compositionis pulveris pyrii casu detectæ eruimus (§. 17. *& seqq. Pyrotech.*)

§. 333. Qui Architecturæ militaris nonnisi cognitionem historicam desiderant, ex definitionibus terminos sibi perspectos reddere tenentur; nec inconsultum est, si ad manus fuerit idea quædam materialis munimenti, sive ex ligno, sive ex charta, sive etiam ex argilla parata. Cum enim terminos non alio fine addiscant, quam ut munimenta videntes singula suis nominibus indicare valeant, & ut nominibus auditis respondentes iisdem ideæ imaginationi præsentes sistantur; ideæ hæ facilius memoriæ imprimuntur per conspectum ideæ materialis, quam notionibus distinctis, quibus definitiones constant. Quodsi tamen hæ accedant, imprimentur tanto firmius, & jucundius, ut facilius eadem retineantur, nec sine voluptate labore hoc defungaris. Deinde sufficit munimenti unius vel alterius Protographiam saltem conficere, quæ nonnisi ambitum totius munimenti & operum externorum exhibet, ut hoc pacto idea munimenti integri acquiratur, nec ejus deinde conspectus adspicientem confundat. Idem tenendum est de operibus hostium campestribus, quorum in praxi offensiva & defensiva opus est. Neque Inconsultum est, ut, terminis intellectis, ichnographias munimentorum ad manus sumat, & per eos easdem explicare discat. Rudis hæc Architecturæ militaris notitia usui est iter facientibus & loca munita invisentibus; tum etiam prodest ad intelligendas novellas publicas, quando de obsidionibus urbium munitarum loquuntur.

§. 334. Qui cognitionem Architecturæ militaris scientificam sibi acquirere student, Elementa integra, eo quo conscripta sunt ordine, perlustrare debent. Ex capite igitur primo, principia sibi perspecta reddere tenen-

tur, ex quibus omne de diversis muniendi formis judicium pendet. Secundum hæc principia examinare debet diversas muniendi formas, quæ in capite secundo proponuntur. Neque parum sibi consulet, ubi deinceps ex STURMII Architectura militari hypothetica, simili examini alias adhuc muniendi formas subjiciat, vel ex aliis libris, quos de Architectura militari recensuimus, alias petat. Ita nimirum non modo principia ipsa sibi reddet multo clariora, eaque magis familiaria; verum etiam eorundem applicationem in suam magis rediget potestatem. Neque etiam contemnendus est calculus trigonometricus: quod qui faciunt, ejus utilitatem minime prospiciunt. Nemo non novit in qualibet muniendi forma non omnia sumi posse, principiis in capite primo expositis convenienter; sed per quædam assumta determinari cetera. Horum adeo quantitas ex iis, quæ sumuntur, per calculum geometricum eruenda, siquidem accurate de eadem constare debet. Nullum equidem dubium est, ex iisdem, constructione geometrica, easdem lineas, eosdemque angulos determinari,& illarum magnitudinem, ope scalæ geometricæ, horum vero quantitatem, ope instrumenti transportatorii, investigari posse; nemo tamen est qui nesciat,methodum hanc, non modo supponere constructionem accuratissimam, verum etiam ne hac quidem supposita adeo accurate investigantur, quemadmodum per calculum trigonometricum eruuntur quantitates linearum & angulorum. Quodsi excipias, in praxi acribiam trigonometricam observandam non esse, immo nec semper observari posse, si vel maxime velis; utrumque largior: non tamen hinc recte infertur, quod inutile sit nosse angulorum ac linearum magnitudinem quam accuratissime. Etenim hinc non modo certus es, te in ea definienda nullum admisisse errorem, qui facile irrepere poterat eam mechanice investigando; sed & hinc attentior efficitur animus, ne in praxi a rigore magis recedas, quam par erat. Taceo, quod ad scientificam Architecturæ militaris cognitionem etiam requiratur, ut constet quomodo ex iis, quæ principiis in parte prima expositis convenienter sumuntur, investigentur cetera, quæ per ea determinantur. Ut vero tanto minus in dubium revocari possit utilitas calculi trigonometrici in Architectura militari; hoc unum adhuc probe perpendi velim. Subinde per ea, quæ in methodo muniendi sumuntur, vi principiorum generalium, molesta est constructio geometrica, siquidem accurata desideretur. Quodsi vero lineæ aliæ supputentur, ex iis tanquam cognitis jam multo simplicior evadit & accuratior. Exemplum habemus in methodo muniendi *Blondelliana* (§. 151. *Arch. mil.*), cujus constructio, per calculum trigonometricum, ad *Paganianam* revocatur. Immo, ope hujus calculi, constructio, ex latere interno assumto, potest revocari ad alteram, quæ ex externo procedit, & contra: id quod subin-

ſubinde uſui eſſe poteſt, præſertim in munitionibus irregularibus. Munimenta irregularia expendimus capite tertio, & quænam hic ſint obſervanda, exponimus. Enimvero in methodo muniendi irregulari inprimis opus eſt, ut principia generalia conſtanter ob oculos verſentur, ne quid contra ea admittatur: id quod facile accidit, niſi per ea examinentur, quæ in delineandis munimentis irregularibus facis. Hic ſane haud raro cœcutiunt, qui ea non ſatis perſpecta habent, vel in eorum applicatione hæſitant. Unde apparet, quam neceſſaria ſit ſcientifica Architecturæ militaris cognitio, cum irregularia munimenta ſint frequentiora regularibus; ut adeo is demum Artis muniendi peritus ſit dicendus, qui in delineandis munimentis irregularibus non hæret, nec ceſpitat. Denique qui rationes quoque operum campeſtrium, quæ capite ultimo deſcribimus, perſpicere voluerit, is duo ſcholia, quæ in fine adjicimus, attente perlegat, ut proceſſus obſidionis ideam animo concipiat, & quænam obſeſſi defenſionis gratia faciunt, intelligat. Hinc enim multo clarius intelliguntur, quæ de illis præcipiuntur.

§. 335. Quodſi quis praxi Architecturæ militaris operam dare decreverit, ei ſcientificam ejus cognitionem quam maxime commendamus, experientia domeſtica deinde magis illuſtrandam, ac confirmandam. Ab eo autem cum expectetur, ut accuratas & nitidas munimentorum delineationes dare poſſit; in iis quoque delineandis multum operæ conſumere tenetur, donec tandem multiplici exercitio eum conſequatur habitum, quo ſe commendare poſſit. Vulgo peritiam Architecturæ militaris ex munimentorum delineationibus æſtimare ſolent, fallaci admodum judicio. Etſi autem in Arte muniendi excellere poſſit, qui in iis delineandis parum excellet; cum tamen qui eidem totum ſeſe dat, nec ea negligere debeat, quæ Artem ornant, nitidas quoque delineationes ab eo jure exigimus; tanto quidem magis, quo certius eſt, haud raro, immo plerumque contemni Artem ornatu iſto deſtitutam. Qui vero praxi operam dare, ipſamque Artem exercere non decrevit, etſi caſtra ſequatur; ei vix ſuademus, ut in habitu iſto comparando tempus fallat, quod longe utilius in aliis addiſcendis conſumere poterit.

§. 336. Quibus tertius cognitionis gradus curæ cordique eſt, in Architectura quoque reperient militari, quæ attentionem ipſius merentur, ſive in ſola Matheſi verſari voluerint, ſive intellectum perficere ſtuduerint, ut eodem prompte ac rite etiam extra eandem utantur. Cum Architectura militaris in numero diſciplinarum practicarum ſit, ratio ultima eorum, quæ in eadem traduntur, finis eſt, qui per eam intenditur. Quamobrem hic probe perpendendum venit, quomodo ex fine, qui in definitione indicatur, deducantur principia, quæ in capite primo propoſuimus; applicata vero deinde ad eadem Geometria, cetera

hinc deriventur, sine quibus forma muniendi concipi nequit, multo minus munimenta actu excitare licet. Hinc enim non solum addiscere datur, quæ ad cognitionem Artis mathematicam venandam usui sunt; verum etiam quomodo in disciplinis practicis versandum, ut satis adæquatas nanciscaris ideas, quæ praxi sufficiunt. Satis autem adæquata est, si in ea singula, quæ fieri debent, determinentur; quemadmodum ex tractatione Architecturæ militaris abunde elucescit, modo attentionem tuam in ea desiderari minime patiaris. Diversæ dantur muniendi formæ; sed, ubi eas juxta principia in capite primo proposita examines, non omnes cum iis æque consentiunt. Unde aliæ aliis tanquam meliores præferuntur. Docet autem progressus Architecturæ militaris, quod primo inventæ muniendi formæ defectibus fuerint obnoxiæ, quos experientia detexit, primum ab inventoribus non animadversas, iis autem mederi studuerint, qui recentiores excogitarunt. Etsi in usum Artis inveniendi non inutile foret, eo fine expendere omnes muniendi formas, quæ hactenus publici juris factæ, & quidem eo ordine, quo luci publicæ expositæ fuerunt; nostri tamen instituti ratio minime ferebat, ut in tantas ambages descenderemus. Ne tamen hac in re prorsus deessemus Lectori ad tertium cognitionis gradum adspiranti, ea tradidimus, quæ ad ideam quandam hujus facti animo concipiendam sufficiunt, profuturam iis, qui in aliis disciplinis practicis Architectos militares non infeliciter imitari voluerint. Non alia sane de causa exposuimus methodum muniendi *Belgicam*; utut propter defectus, quibus laborat, hodie antiquatam, ut nullius usus esse videatur, nisi quatenus adhuc extent munimenta bene multa hac methodo constructa, & iisdem subjunximus methodos muniendi Gallorum. Constat enim formam muniendi Belgicam, tanquam omnium optimam, celebratam fuisse; ejus autem nævis animadversis, Gallos primum publicasse formas alias, quibus hisce mederi tentarunt. Ceterum applicatio Trigonometriæ ad Architecturam militarem, in usum tertii cognitionis gradus, etiam aliquam attentionem meretur; non modo quod hoc ipso confirmetur, quod in Arte inveniendi locum mereatur; verum etiam ut ejus amplissimus usus in majore luce constituatur.

§. 337. Architecturæ civilis cognitionem historicam acquisiturus legat definitiones, & problemata; exceptis iis, quæ ad delineationes Ordinum architectonicorum; & eorum usum in ordinandis januis, atque fenestris spectant, & quæ de Ichnographia & Orthographia ædium agunt. Quodsi desit occasio ædificia juxta regulas architectonicas constructa contemplandi; Ichnographias & Orthographias externas ædificiorum æri incisas perlustret, ut ideam ædificii integri, juxta regulas architectonicas constructi, animo imprimat. Inprimis autem

autem terminos, & constructionem Ordinum architectonicorum sibi familiares reddat, ne in ornatu, qui inde petitur, cœcutiat. Hoc pacto obtinebit, ut non solum libros de Architectura civili conscriptos sine hæsitatione legere, sed quæ usui suo esse possunt, etiam addiscere, ac data occasione ad eundem transferre, queat. Historica igitur cognitio non ob solam curiositatem, sed & ob utilitatem, quam unicuique præstat, acquiritur. Sane qui peregrinantur, quemadmodum Germani facere solent studiis academicis absolutis, cognitione ista animum imbutum habere debent; ne in ædificiis, aliisque operibus architectonicis, spectandis ignorent, quid videant, laudaturi aliis, quod cur laudent, nullam afferre valent rationem. Male adeo sibi consulunt, qui studium architectonicum, quod ea fini intra paucas hebdomades absolvi poterat, in Academiis prorsus negligunt, non alia de causa, quam quod architecti fieri nolint. Perfacile autem hoc studium est, præsertim si ultra cognitionem historicam progredi nolueris. Quodsi otium suppetat, ruditer saltem delineare Ordinem aliquem architectonicum, veluti Toscanum, qui delineatu omnium facillimus, juvat; non modo ut idea Ordinis, sed etiam membrorum memoriæ firmius infigatur: id quod tanto magis suadendum, cum norim plerosque fieri desertores studii architectonici, quod tædiosum videatur terminorum notitiam sibi comparare.

§. 338. Scientificam Architecturæ cognitionem desiderans Elementa integra, eo quo conscripta sunt ordine, perlegat, & eam attentionem afferat, quæ ad singula rite percipienda sufficit. Qui vel in Elementis Geometriæ versatus fuerit, ei attentio huc afferenda nulla fere videbitur: Mathematum vero prorsus ignarus non majorem hic requiri experietur, quam qua in legendo libro alio quocunque utendum; immo minorem, cum omnia distincte explicentur, quod vulgo fieri non solet; nec occurrant verba, quorum dubius est sensus; præter doctrinam vero de Ordinibus architectonicis nihil occurrat, cujus non habeat Lector ideam vulgari experientia acquisitam. Nemo autem hic expectet demonstrationes, quales in Geometria dedimus; sufficit enim addisci eorum, quæ præcipiuntur, rationes, ut intelligatur, cur hoc potius modo fieri debeant, quam aliter. Inprimis etiam probe perpendat in Ordinibus architectonicis multa esse arbitraria; quorum etsi dentur, atque a nobis datæ sint rationes, absit tamen, ut quis rationes istiusmodi desideret, quales sunt ceterorum, quæ necessarias habent. Sane in Arithmetica, quæ rigidas demonstrationes admittit, cum veritates numerorum non minus necessariæ sint, quam linearum & figurarum in Geometria, eorum, quæ arbitraria sunt, veluti legis numerandi & notarum numericarum, non dari possunt rationes, quæ veritatibus necessariis conveniunt. Qui praxi architectonicæ sese

 dedunt,

dedunt, iis inprimis opus est scientifica Architecturæ cognitione: Architectus enim in promptu habere debet rationes, quas reddat quærentibus, cur hoc vel illud ita fecerit (§. 3. *Arch. civ.*). Obtinebit præterea, ne cœca sit aliorum imitatio; quam haud raro esse fallacem, ne opus probetur intelligentium judicio, experientia loquitur. Non desunt exempla, quibus quod dictum est, confirmari poterat; sed nostrum jam non est perstringere ea, quæ ab aliis minus recte facta sunt, cum jam docere id unice intendamus, quomodo tractandum sit studium architectonicum, ut recte fiant omnia. Industriam præterea suam exercere debent in delineationibus architectonicis, quicunque Artem exercere decreverunt, & quæ paulo ante de delineationibus munimentorum annotavimus (§. 335), ea quoque hic notanda veniunt. Ex elegantia delineationum vulgo judicium fertur de peritia Architecti; etsi male, ac subinde non sine damno fundatoris. Quamobrem cum dandum non modo sit aliquid opinioni, sed & qui in Arte quadam excellit, ea negligere non debeat, quæ ad ornatum faciunt; nemo erit, qui ab Architecto elegantiam in delineandis ædificiis, aliisque operibus architectonicis, jure non desideret; quamvis non probemus contemni propterea Artem in eo, qui eadem excellit, quia elegantiam in delineando non possidet. Qui enim hoc faciunt, suo, & aliorum, quibus a consilio esse debebant, hoc faciunt damno. Immo si quis desideret delineationes elegantes; aliorum opera eædem perfici poterunt; modo, qui in Arte excellit, ea suppeditet, quæ ad eas perficiendas necessaria sunt.

§. 339. Qui denique ad tertium cognitionis gradum adspirant, eos quoque juvabit Architectura civilis. In Architectura civili, regulæ omnes deducuntur ex fine, quem loquitur definitio ejusdem. Finis hic in eo consistit, quod ideam ædificii animo concipere, & juxta eam ipsum extruere debeamus, ita ut scopo fundatoris ex asse satisfaciat. Quamobrem huc potissimum animum advertere tenetur, qui tertium cognitionis gradum intendit, quomodo ex hoc fine deriventur regulæ omnes, ita ut rationes earundem tandem in hanc rationem ultimam resolvantur. Monuit jam VITRUVIUS, & nos in Elementis nostris a priori ex ipso fine Architecturæ, ostendimus, regulas Architecturæ omnes redire ad firmitatem, utilitatem seu commoditatem, & venustatem atque ornatum ædificii, vel alterius operis architectonici cujuscunque. Quamobrem regulæ omnes rationem sufficientem, vel in firmitate, vel in utilitate, vel in venustate atque ornatu, vel hisce binis, aut omnibus simul sumtis agnoscunt. Sufficit itaque inquirere, quomodo ex hisce fontibus, vel immediate, vel mediate fuerint deductæ. Cum paucissimæ sint, quæ Geometriæ auxilium postulant; hæc disquisitio plurimum proderit ei, qui disciplinas practicas a Mathesi sejunctas accurata metho-

methodo pertractare voluerit. Notandum præterea, si quis ideam ædificii animo concipit, dato fundatoris scopo, eum inventorem agere, ac regulis Architecturæ civilis uti, tanquam principiis in ratiocinando. Quamobrem qui ad modum, quo hoc facit, animum attendit; is hinc addiscere valet, quomodo theoria ad tractanda negotia, quæ levi brachio tractari minime possunt, dextre ac rite applicentur. Suademus ergo ut ædificiorum, supposito fundatoris scopo, inveniatur constructio etiam ab iis, qui Artem exercere non intendunt: quod ut facilius succedat, ante in examinandis ædificiis juxta regulas architectonicas non inutiliter versabitur, quam ad telam istam pertexendam se accingit. Non adeo levem, nec contemnendæ utilitatis deprehendet demonstrationem, qui ædificium, dato fundatoris scopo, construendum sibi tanquam problema proponit, veluti *construere in data area, datoque loco, ædificium, quod huic fundatoris scopo ex asse satisfacit*; deinde quomodo extruendum sit eodem modo exponat, quo resolutiones problematum per universam Mathesin exhibuimus, & tandem demonstret pro datis circumstantiis scopo fundatoris ex asse satisfieri, siquidem hoc modo exstruatur. Etenim qui in expediendis negotiis, tam privatis, quam publicis, eam certitudinem consequi voluerit, quam consequi datur; plurimum hinc lucis fœnerabitur, quam aliunde vix ac ne vix quidem adeo commode expectet. Non igitur erubescimus studium Architecturæ civilis, hoc modo instituendum, commendare iis, qui ad negotia publica gerenda sese præparant; ut eorum rite tractandorum ideam quandam exemplarem animo insinuent. Plura addere possem, quomodo prudentia Architecti prodesse possit in gerendis negotiis; nisi principiis, quæ in Philosophia practica tradimus, imbutus per se hoc videre possit, ubi ea, quæ hic commendamus, exercitia non neglexerit.

§. 340. Atque ita tandem nos satis docuisse confidimus, quomodo studium mathematicum tractandum sit, ut omnem consequamur usum, qui ab eo expectari potest. Non loquor nisi experta; ac ingenue profiteor, me nunquam ea, quæ hactenus in Philosophia conscripsi, & in posterum, si Deo ita visum fuerit, addíturus sum, daturum fuisse, nisi adminiculis istis adjutus fuissem. Eadem experientia fretus docere quoque poteram, quomodo Mathesi uti possimus ad distinctas, & fœcundas, in Philosophia prima, notiones venandas; & quomodo studio mathematico perfici possit etiam appetitus; sed cum hoc a præsenti instituto alienum sit, quæ hic dici poterant, alii occasioni reservamus. Ne tamen dixisse videamur, quæ absona sunt, unum saltem alterumque exemplum in medium afferre lubet. Poteramus hic tantummodo provocare ad ea, quæ alibi jam tradidimus, veluti quod notio generum, & specierum (*not.* §. 72, 73 *Log.*) atque individui,

ex

ex formulis algebraicis derivari poſſit (*not.* §. 74 *Log.*); & ipſe modus, quo Deus univerſalia, eorundemque nexum, in ſingularibus intuetur, ex iiſdem formulis eliciatur (*not.* §. 275 *part.* 1. *Theol. nat.*); ſed ne lectorem ablegemus ad alibi quærenda, nec hic repetamus alibi dicta, conſultius viſum fuit, exempli loco, alia quædam proferre. Inter notiones difficiles referri ſolet notio determinati & indeterminati. Enimvero nos eandem derivavimus ex exemplis mathematicis: qua etiam de cauſa, ſingula quæ, in Ontologia, de determinato & indeterminato docuimus, exemplis mathematicis illuſtramus. Neque enim dantur alia hiſce clariora, & notionem in Philoſophia longe utiliſſimam felicius illuſtrantia. In formula algebraica quacunque, veluti ſi $\frac{a+b}{2}$ dicatur numerus major, ſumma exiſtente a, & differentia b; numeri a & b dicuntur indeterminati; quia tam a, quam b explicari poteſt per numeros infinitos; conſequenter de a affirmari poteſt, tum quod ſit 6, tum quod ſit 12, tum quod ſit 19, & ita porro in infinitum, & de b affirmari poteſt, tum quod ſit 2, tum quod ſit 4, tum quod ſit 5 & ita porro in infinitum. Indeterminata igitur dicitur ſumma, quatenus conſideratur ut id, de quo affirmari poteſt numerus, 6, 12, 19 &c. nullus tamen adhuc de eadem affirmatur: quæ eſt ipſa notio indeterminati (§. 105 *Ontol.*). Aſt ſi ſumma dicatur 6, determinata dicitur; quia jam conſtat, quinam numerus de ea ſit affirmandus: quæ eſt ipſa notio determinati (§. 112 *Ontol.*). Idem patet de differentia b. Ordinis quoque notio diſtincta inter eas refertur, quæ difficiles ſunt: ſed ex ſeriebus infinitis, quarum termini ordine dicuntur progredi, haud difficulter eruitur. Ex. gr. in ſerie $\frac{1}{1.2}v^2 - \frac{1}{3.4}Av^2 + \frac{1}{5.6}Bv^2 - \frac{1}{7.8}Cv^2$, &c. in infinitum, ubi A terminum primum, B ſecundum, C tertium denotat; terminus ſequens determinatur ex præcedente eodem modo, ac ideo ordo in progreſſu terminorum adeſſe dicitur. Ex identitate determinationis naſcitur ſimilitudo (§. 217 *Ontol.*). Ordo igitur hic eſt ſimilitudo obvia in modo, quo termini ſe invicem conſequuntur; quemadmodum vult definitio noſtra ordinis (§. 472 *Ontol.*). Sed pauca hæc ſufficiant.

Finis Commentationis de Studio Matheſeos recte inſtituendo.

INDICES

INDICES

IN

TOMOS QUINQUE

ELEMENTORUM

MATHESEOS UNIVERSÆ.



I.

CONSPECTUS ELEMENTORUM MATHESEOS UNIVERSÆ.

TOMUS I.

TOMUS II.

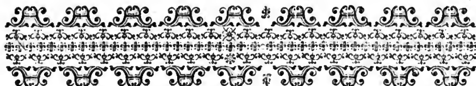
TOMUS III.

TOMUS IV.

TOMUS V.

FINIS TOTIUS CONSPECTUS.

II. INDEX



II.

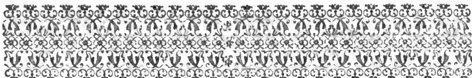
INDEX

Ostendens paragraphos, in quibus definitiones & propositiones Elementorum Euclidis continentur.

Notes velim, Ar. designare Arithmeticam, G. Geometriam, An. Analysin finitorum.

FINIS INDICIS SECUNDI.

III. IN-



III.

INDEX AUTORUM,

Qui in Commentatione de præcipuis scriptis mathematicis recensentur.

Notes velim Numerum Romanum Caput, ceteros vero §. §. ejusdem designare.

C.

Com-

Rober-

Theo-



IV.

INDEX
RERUM ET VERBORUM
TOMO I.
CONTENTORUM.

Notes velim, literam *c* Commentationem de methodo mathematica, *a* Arithmeticam, *g* Geometriam, *t* Trigonometriam planam, *f* Analysin finitorum, *i* Analysin infinitorum; & numeros §§. designare: ubi vero nulla numeris adscribitur litera, eos referri ad proxime praecedentem.

B.

C.

Cono-

Inæqua-

quid

Perpen-

S.

Signa

Unciæ

FINIS INDICIS QUARTI.

V.

INDEX
RERUM ET VERBORUM
TOMO II.
CONTENTORUM.

Notes velim, literam *m.* Mechanicam, *f.* Hydrostaticam, *a.* Aërometriam *h.* Hydraulicam, & numeros §§. designare: ubi vero nulla numeris adscribitur litera, eos referri ad proxime antecedentem.

B.

C.

C.

FINIS INDICIS QUINTI.

VI.

INDEX RERUM ET VERBORUM TOMO III. CONTENTORUM.

Notes velim, literam *o.* Opticam, *c.* Catoptricam, *d.* Dioptricam, *p.* Perspectivam, *s.* Sphaerica & Trigonometricam sphaericam, *a.* Astronomiam, numeros vero §§. designare: ubi autem nulli numeri adscribuntur, eosdem referri ad literam praecedentem.

A.

Aequatoris

Angulus

B.

C.

L.

Leo,

Radii

S.

..*Situs*

T.

Umbræ

FINIS INDICIS SEXTI.

VII.

INDEX RERUM ET VERBORUM TOMO IV. CONTENTORUM.

Notes velim, literam *g.* Geographiam & Hydrographiam, *c.* Chronologiam, *f.* Gnomonicam, sive Sciatericam, *p.* Pyrotechniam, *m.* Architecturam militarem, *a.* Architecturam civilem, & numeros §§. designare; ubi vero nulla numeris adscribitur litera, eos referri ad proxime antecedentem.

A.

Ædes

Calen-

Horolo-

I. *Jaca-*

Linea

Muni-

Poly-

Süd-

FINIS INDICIS TOMI IV.

VIII.

INDEX

Rerum in Commentatione de Studio Mathematico recte instituendo contentarum, quæ legitur Tomo V Elementorum Matheseos.

A.

Q. *Qua-*

Q.

R.

S.

T.

V.

FINIS TOMI V. ELEMENTORUM MATHESEOS.

INDICES

IN

TOMOS QUINQUE

ELEMENTORUM

MATHESEOS UNIVERSÆ.

Fig. 2

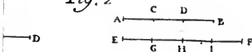


Fig. 4

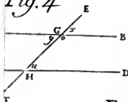
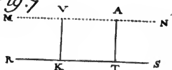


Fig. 5 V



Fig. 7



B

Fig. 11

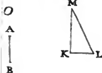


Fig. 12

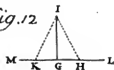


Fig. 9

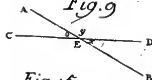


Fig. 14

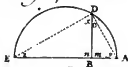
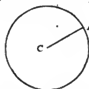
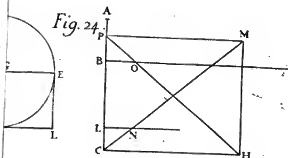
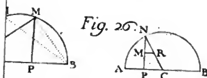
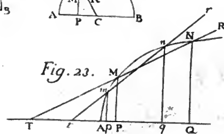


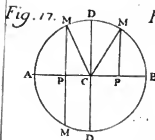
Fig. 15

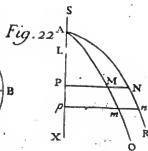



Fig. 24.
A
P
M
B
O
E
L
N
C
H


M
P
Fig. 20.
N
M
R
A
P
C
B


Fig. 23.
r
R
N
n
M
m
T
t
A p P
q
Q


Fig. 17.
M
D
M
A
P
C
P
B
M
D


Fig. 22
S
A
L
P
M
N
p
n
m
X
R
O

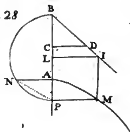
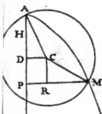
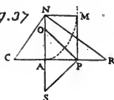
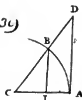
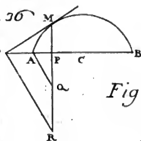
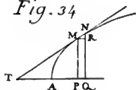
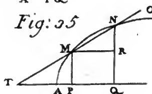
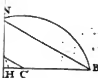
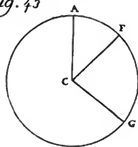
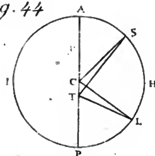
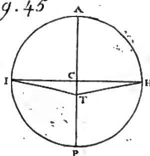

Fig. 28
B
C
D
L
I
A
N
M
P

Fig. 29
A E G C
B
F
H
D

A
H
D
C
P
R
M

Fig. 37
N
M
O
C
A
P
R
S

Fig. 39
D
B
C
I
A

36
M
A
P
C
B
R

Fig. 34
N
M
R
T
A
P

Fig: 35
O
N
M
R
T
A P

N
H C
B


Fig. 43
A
F
C
G


Fig. 44
A
S
I
C
H
T
L
P


Fig. 45
A
I
C
H
T
P



